Méthode de continuation par parallélépipèdes : application à l'optimisation globale continue bi-objectif

Benjamin Martin, Alexandre Goldsztejn, Laurent Granvilliers, Christophe Jermann
Université de Nantes, LINA UMR 6241 CNRS
2, rue de la Houssinière BP 92208, F-44322 Nantes Cedex 3, Nantes (France)
{prenom}.{nom}@univ-nantes.fr

Mots-clés : *Continuation, analyse par intervalles, optimisation multi-objectif*

1 Méthode de continuation rigoureuse

Les méthodes numériques de continuation ont pour but d'approximer les solutions de systèmes d'équations paramétriques, ou de manière équivalente, de problèmes de satisfaction de contraintes sous-contraints. L'objectif est de calculer une approximation de l'ensemble des solutions

$$\Sigma(H,x) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid H(x) = 0\},\ H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ m < n.$$

Cet ensemble est génériquement constitué d'une ou plusieurs composantes de dimension $n-m$. Une méthode de continuation, partant d'une solution $x^* \in \Sigma(H,x)$, trouve de manière locale d'autres solutions. En répétant le processus, il est possible d'identifier une composante connexe de l'ensemble de solutions.

L'utilisation de l'analyse par intervalles permet une approche rigoureuse de la continuation (par exemple Kearfott et Xing [4], Kearfott et Kim [3]). Plus précisément, il est possible d'une part de prouver l'existence d'une solution x dans une boîte $B = I_1 \times \cdots \times I_n$, où I_j est le domaine de x_j, telle que $x \in \Sigma(H,x)$. D'autre part, il est possible de montrer que B intersecte une seule composante connexe de $\Sigma(H,x)$.

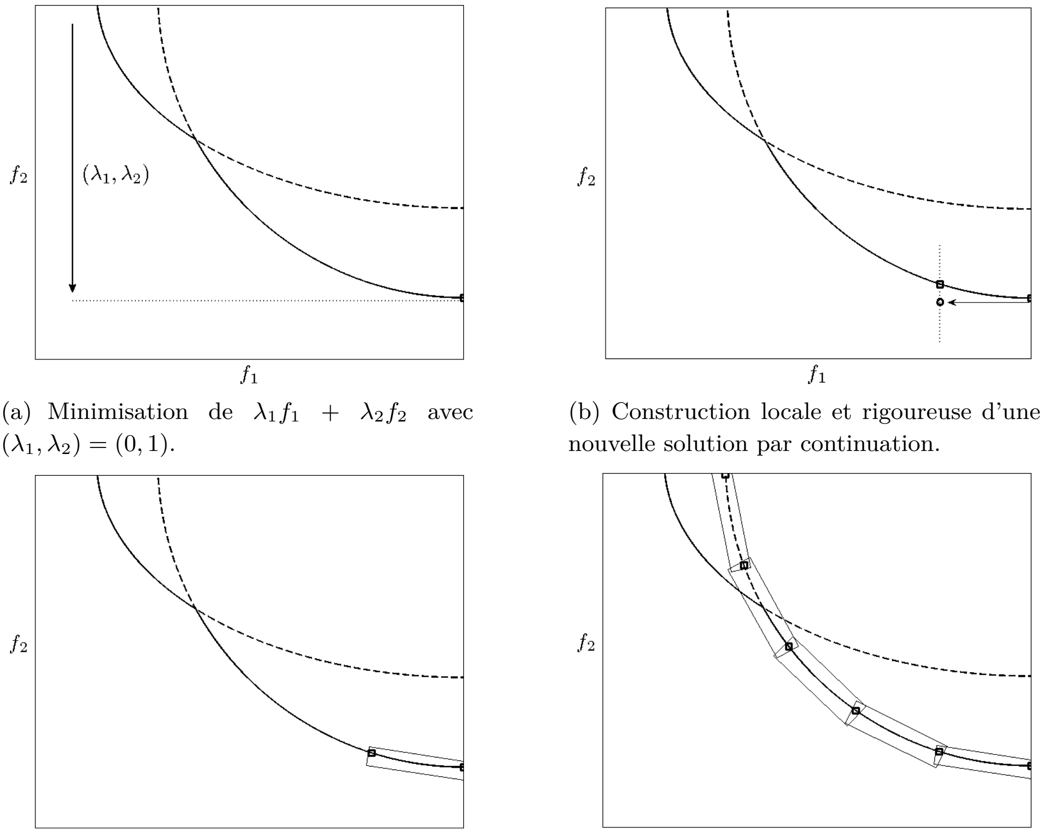
Récemment, Goldsztejn et Granvilliers [1] ont introduit le domaine de calcul des parallélépipèdes permettant d'encadrer précisément des courbes. L'orientation des parallélépipèdes découle d'un changement de base en fonction de la pente de la courbe. Dans ce cadre, les preuves d'existence de solutions sont plus aisées, et les encadrements plus précis. Toutefois, l'approche proposée dans [1] est entièrement globale et déterministe. Elle souffre donc complètement de la complexité NP-Hard du problème.

Dans ce travail, nous proposons une méthode de continuation efficace et rigoureuse. La continuation par intervalles construit et valide des solutions localement. La mise en œuvre des parallélépipèdes de [1] permet de valider et d'encadrer les portions de la composante connexe de $\Sigma(H,x)$ contenue entre les solutions obtenues lors de la précédente étape. Les avantages par rapport à la méthode de Kearfott et Kim [3] seront discutés.

2 Application à l'optimisation globale bi-objectif

Les solutions d'un problème d'optimisation multi-objectif forment un ensemble vérifiant les relations de dominances de Pareto. Plus précisément, dans le cas où on cherche à minimiser k objectifs $f = (f_1, f_2, \cdots, f_k)$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, l'ensemble des solutions optimales $\hat{X}$ vérifient $\forall \hat{x} \in \hat{X}, \nexists\ x \in S\backslash\{\hat{x}\}$ tel que $f(x) \leq f(\hat{x})$ avec S l'ensemble des solutions faisables. Dans nos travaux, nous nous restreignions au cas où $k = 2$.

Hillermeier a décrit une méthode de continuation exploitant les conditions du premier ordre de Kuhn et Tucker nécessaires à la Pareto-optimalité [2]. De ces conditions on extrait un système de contraintes sous-contraint. Ainsi, partant d'une solution $\hat{x} \in \hat{X}$ obtenue par une approche globale mono-critère, la continuation reconstruie une portion continue du front de Pareto.



(a) Minimisation de $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 1)$.

(b) Construction locale et rigoureuse d'une nouvelle solution par continuation.

(c) Construction et validation du parallélépipède.

(d) Réitérations des étapes (b) et (c) ...

FIG. 1 – Continuation appliquée à un problème bi-objectif. L'ensemble des solutions consistent en les solutions non dominées par les relations de Pareto de l'union des deux différents fronts.

Au travers de notre méthode de continuation, nous souhaitons attaquer des problèmes bi-objectif de manière globale et rigoureuse, en évitant cependant une approche purement globale trop coûteuse. La Figure (1) illustre l'approche proposée. En minimisant dans un premier temps une somme pondérée des objectifs, on trouve et valide une première solution de $\hat{X}$ (Figure 1(a)). La continuation détermine de manière locale et rigoureuse une autre solution (Figure 1(b)). Enfin, le parallélépipède contenant les deux solutions est construit et validé, prouvant ainsi qu'il contient un morceau du front de Pareto (Figure 1(c)). Le processus est réitéré jusqu'à la satisfaction du critère d'arrêt (Figure 1(d)).

Références

[1] Alexandre Goldsztejn and Laurent Granvilliers. A new framework for sharp and efficient resolution of NCSP with manifolds of solutions. *Constraints*, 15 :190–212, 2010.

[2] Claus Hillermeier. Generalized homotopy approach to multiobjective optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 110(3) :557–583, 2001.

[3] R. Baker Kearfott and Mihye Kim. Hybrid interval marching / branch and bound method for parametrized nonlinear systems, 2004.

[4] R. Baker Kearfott and Zhaoyun Xing. An interval step control for continuation methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31(3) :pp. 892–914, 1994.