Traitement numérique du signal.
Deuxième partie : Algorithmes

J. Idier
H. Piet-Lahanier
G. Le Besnerais
F. Champagnat

Première version du document : 1993
Date de la dernière remise à jour : mars 2004

Table des matières

Remerciements . . . 7

I Estimation **9**

I.1 Introduction . . . 9

I.2 Choix du modèle, exemples . . . 10

I.2.1 Choix du modèle . . . 10

I.2.2 Exemples . . . 11

I.3 Propriétés statistiques des estimateurs . . . 14

I.3.1 Statistique, estimateur et vraisemblance . . . 15

I.3.2 Biais, covariance et risque quadratique . . . 16

I.3.3 Inégalité de Cramér et Rao . . . 17

I.3.4 Caractéristiques asymptotiques . . . 20

I.3.5 Caractéristiques moyennes et paramètres probabilisés . . . 21

II Choix et propriétés des estimateurs **23**

II.1 Introduction . . . 23

II.2 Estimation non bayésienne . . . 24

II.2.1 Principe . . . 24

II.2.2 Estimateurs empiriques . . . 24

II.2.3 Méthode des moindres carrés . . . 26

II.2.4 Maximum de vraisemblance . . . 29

II.3 Estimation bayésienne . . . 31

II.3.1 Principe . . . 31

II.3.2 Estimation en moyenne quadratique . . . 32

II.3.3 Estimation linéaire en moyenne quadratique . . . 32

II.3.4 Maximum *a posteriori* . . . 33

III Forme compacte des estimateurs linéaires **35**

III.1 Introduction . . . 35

III.2 Position du problème . . . 35

III.2.1 Exemples . . . 36

III.3 Estimateurs non bayésiens . . . 37

III.3.1 Maximum de vraisemblance gaussien . . . 37

III.3.2 Autres estimateurs . . . 38

III.4 Estimateurs bayésiens . . . 39

III.4.1 Théorème de Gauss-Markov 39
III.4.2 Application 40
III.5 Comparaisons entre estimateurs 41
III.5.1 Synthèse des résultats 41
III.5.2 Choix de l'estimateur 42
III.5.3 Comparaison algébrique 43
Annexe A Réduction du risque quadratique par introduction d'un biais 46

IV Algorithme de Levinson 47
IV.1 Introduction 47
IV.2 Prédiction linéaire dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 49
IV.2.1 Principe 49
IV.2.2 Équations normales de la prédiction 50
IV.2.3 Propriétés 51
IV.3 Algorithme de Levinson 53
IV.3.1 Établissement des équations récurrentes 53
IV.3.2 Inversion d'une matrice de Toeplitz 57
IV.3.3 Interprétation géométrique 58

V Algorithmes des moindres carrés récursifs et adaptatifs 61
V.1 Introduction 61
V.2 Moindres carrés récursifs 61
V.2.1 Algorithme des moindres carrés récursifs 62
V.2.2 Formules de récursion pour d'autres estimateurs 63
V.2.3 Initialisation du MCR 64
V.2.4 Exemple 65
V.3 Algorithmes adaptatifs 65
V.3.1 Position du problème 66
V.3.2 Moindres carrés adaptatifs à oubli exponentiel 66
V.3.3 Fenêtre glissante 67
V.4 Algorithme du gradient stochastique 69
V.4.1 Introduction 69
V.4.2 Convergence et adaptativité 70

VI Filtrage de Kalman 71
VI.1 Introduction 71
VI.1.1 Modèle d'état 71
VI.1.2 Cadre général du filtrage de Kalman 71
VI.1.3 Principe d'estimation 72
VI.2 Équations du filtre de Kalman 73
VI.2.1 Estimation linéaire dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 73
VI.2.2 Détermination des équations 75
VI.2.3 Utilisation réelle du filtrage de Kalman 77

VI.2.4 Considérations économiques et extensions 78
VI.3 Utilisation en déconvolution 79
VI.3.1 Exemple d'application au contrôle non destructif 79
VI.3.2 Équations d'état 80
VI.3.3 Déconvolution par filtrage de Kalman 81
VI.3.4 Exemple 81

Avant-propos

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier les personnes qui ont participé à ce cours à l'ENSTA et, en particulier, Yves Goussard, Stéphane Gautier et Jean-François Giovannelli ; ainsi que celles qui ont fait part de leurs remarques et corrections et contribué à l'amélioration du document écrit, en particulier Caroline Kulcsár.

Chapitre I

Estimation

I.1 Introduction

On considère un vecteur d'observation $\boldsymbol{z}(\omega)$, de dimension N, correspondant à un extrait d'une trajectoire d'un signal aléatoire discret. Ce vecteur d'observation dépend d'un vecteur $\boldsymbol{p}$ de paramètres de dimension M. On représente la relation entre $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{p}$ sous la forme

$$\boldsymbol{z}(\omega) = \varphi(\boldsymbol{p}, \omega), \tag{I.1}$$

où φ est le *modèle* de l'observation et ω est élément de Ω, espace probabilisé. L'objet de l'*choixestim* est de déterminer la valeur des paramètres $\boldsymbol{p}^*$ qui a servi à générer les observations $\boldsymbol{z}(\omega)$. Ce problème peut s'exprimer sous la forme suivante : il s'agit de définir un *estimateur*, c'est-à-dire une application agissant sur le vecteur des données $\boldsymbol{Z} \to \psi(\boldsymbol{Z})$, telle que $\psi(\boldsymbol{z}(\omega))$ approche $\boldsymbol{p}^*$.

Cette problématique recouvre le cas particulier où l'observation est une fonction déterministe de $\boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{z} = \varphi(\boldsymbol{p}). \tag{I.2}$$

Il faut alors inverser l'équation (I.2), ce qui pose les problèmes d'existence et d'unicité de la solution, ainsi qu'un problème numérique qui peut être ardu si φ présente de sévères non-linéarités. Ce faisant, on définit l'estimateur $\psi = \varphi^{-1}$ et, lorsque φ est inversible, on obtient le « résultat idéal » : $\psi(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{p}^*$.

En traitement de données, les observations ne sont en général pas des fonctions déterministes des paramètres, ne serait-ce que parce que les capteurs induisent un bruit sur les données recueillies, ce qui peut conduire à une modification de (I.2)

$$\boldsymbol{z}(\omega) = \varphi(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{b}(\omega), \tag{I.3}$$

qui correspond à une hypothèse de *bruit additif en sortie*. Mais il arrive aussi que les termes déterministes et aléatoires ne puissent pas être séparés de la sorte, et il faut alors considérer l'équation générale (I.1).

Avec le modèle (I.1) ou le cas particulier (I.3), l'estimateur est un vecteur aléatoire $\psi(\boldsymbol{Z})$ et l'on conçoit que le résultat idéal du cas déterministe inversible ne puisse plus être obtenu. A défaut, on s'intéresse aux propriétés de la loi de l'estimateur, par exemple pour évaluer la probabilité de succès « $P(\psi(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{p}^*)$ », ou la norme au carré de la différence entre l'estimateur et le paramètre $\boldsymbol{p}^*$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

$$\mathrm{E}\left(\psi(\boldsymbol{Z}) - \boldsymbol{p}^*)^{\mathrm{t}} \left(\psi(\boldsymbol{Z}) - \boldsymbol{p}^*\right)\right), \tag{I.4}$$

expression qui est appelée *erreur quadratique moyenne*.

Remarquons que dans le cas où $\psi(\boldsymbol{Z})$ suit une loi à densité, la probabilité de succès doit être définie sur un intervalle : $P(\psi(\boldsymbol{Z}) \in \mathcal{V}(\boldsymbol{p}^*))$, où $\mathcal{V}(\boldsymbol{p}^*)$ désigne un voisinage de $\boldsymbol{p}^*$. L'estimateur ψ n'a alors pas besoin d'être une application, on peut associer aux données un sous-ensemble de l'espace des paramètres. Un cas particulier simple est l'exemple déterministe (I.2) lorsque l'on suppose que l'application φ est linéaire et possède un noyau de dimension non nulle. Dans ce cas, on peut considérer que la réponse au problème de l'estimation du paramètre est le sous-espace affine $\psi(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{p}^0 + \mathrm{Ker}\varphi$, où $\boldsymbol{p}^0$ est n'importe quel vecteur vérifiant $\varphi(\boldsymbol{p}^0) = \boldsymbol{z}$. On mène alors ce qu'on appelle une *estimation par intervalle*. Dans ce cours, nous n'étudierons pas ce type de démarche, mais nous nous restreindrons à l'*estimation ponctuelle*, dans laquelle l'estimateur est une application qui associe à un jeu de données un unique point de l'espace des paramètres. Ce point est appelé *vecteur des paramètres estimés* $\widehat{\boldsymbol{p}}_\psi = \psi(\boldsymbol{z})$.

En estimation ponctuelle, le critère de l'erreur quadratique moyenne (I.4) joue un rôle important. Il s'agit simplement d'un moment d'ordre 2 de l'estimateur $\psi(\boldsymbol{Z})$, puisque $\boldsymbol{p}^*$ est déterministe. De même, de nombreuses caractéristiques de la loi de l'estimateur possèdent des dénominations spéciales, à cause de leur interprétation pour l'estimation de $\boldsymbol{p}^*$. L'objet de ce chapitre est de définir un certain nombre de ces caractéristiques, en préalable à la suite du cours dans laquelle la construction des estimateurs sera abordée.

Jusque-là nous avons considéré que le paramètre cherché $\boldsymbol{p}^*$ était un vecteur déterministe. Pourtant, dans la suite du cours, et dès les exemples de la section suivante, nous verrons qu'il peut advenir que l'on cherche en fait à estimer un vecteur aléatoire de paramètres $\boldsymbol{P}$ à l'aide du vecteur aléatoire des données. La forme la plus générale de la relation d'observation est donc :

$$\boldsymbol{z}(\omega) = \varphi(\boldsymbol{p}(\omega), \omega). \tag{I.5}$$

Lorsque le paramètre est aléatoire, quel est le but de l'estimation ? On peut penser qu'il s'agit de caractériser la loi de probabilité de $\boldsymbol{P}$ étant donné les observations recueillies $\boldsymbol{z}(\omega)$, qu'on appelle loi *a posteriori*. En fait, il s'agit toujours là d'un problème très sous-déterminé, puisque $\boldsymbol{p}$ étant de dimension M, sa loi est une fonction de $\mathbb{R}^M$ dans $[0, 1]$, donc appartenant à un espace de dimension infinie, alors que les données sont en nombre fini. On peut utiliser une paramétrisation $\boldsymbol{\theta}$ de la loi de $\boldsymbol{P}$, et le problème $\boldsymbol{z}(\omega) = \varphi(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta}, \omega), \omega)$ revient à l'énoncé initial $\boldsymbol{z}(\omega) = \xi(\boldsymbol{\theta}, \omega)$ pour une nouvelle fonction aléatoire ξ et de nouveaux paramètres $\boldsymbol{\theta}$. En fait l'estimation ponctuelle doit en général fournir *une* valeur déterministe estimée du paramètre, car c'est ce qui est utile au destinataire du résultat. Cette valeur doit rendre compte de la loi *a posteriori* : on choisit souvent la valeur qui maximise la loi *a posteriori* ou la moyenne *a posteriori*.

I.2 Choix du modèle, exemples

I.2.1 Choix du modèle

Dans l'introduction, nous avons noté φ le modèle liant données et paramètres : l'estimation telle que nous l'étudions ici se déroule à *structure de modèle* fixe, ce qui signifie que la fonction φ est donnée et fixée, ou, au moins, qu'elle appartient à une classe précise de fonctions paramétriques, dépendant d'un petit nombre de paramètres. Nous ne nous intéresserons pas, dans la suite de ce cours, au choix de cette structure. Néanmoins, il est bien évident que ce choix conditionne la procédure d'estimation : notons quelques éléments à ce sujet.

Choix de modèle et objectif de l'expérience

Le choix du modèle φ (ou, plus généralement, de la structure de ce modèle) est essentiellement dicté par le modèle physique de l'expérience réalisée. Néanmoins il reste souvent une certaine

latitude concernant

- le niveau de précision du modèle : on peut souvent imaginer des modèles physiques plus ou moins compliqués et précis d'un même phénomène ;
- le choix du paramétrage : choisir d'estimer la résistance plutôt que la conductance d'un élément électrique par exemple ;
- le type de modèle : par exemple, choisir entre plusieurs modèles simples correspondant à certaines plages d'utilisations, ou un unique modèle plus compliqué valable pour une large zone d'évolution.

Ces choix doivent être guidés par l'objectif de l'expérience : cela peut être d'estimer très précisément la valeur du paramètre ou, au contraire, d'en donner une approximation grossière mais aisément calculable.

Enfin d'autres facteurs *a priori* secondaires peuvent peser lourdement sur ces choix, par exemple les ressources de calcul et de stockage disponibles pour réaliser l'estimation.

Complexité

Nous nous contentons de mesurer la complexité du modèle par le nombre de ses paramètres, bien qu'il existe à ce sujet des définitions plus rigoureuses, dont l'introduction dépasse le cadre de ce cours. Le compromis concernant le choix du nombre de paramètres est en général le suivant : un modèle comprenant un grand nombre de paramètres est susceptible de fournir une bonne description de phénomènes complexes, mais l'estimation de ses paramètres devient d'autant plus sous-déterminée, car le nombre de données est en général une constante de l'expérience.

Modèles linéaires et non linéaires

Dans la suite de ce cours, un modèle sera dit *linéaire* si les observations sont une fonction linéaire ou affine des paramètres à estimer. Comme on le verra par la suite, les modèles linéaires présentent souvent l'avantage de permettre l'estimation des paramètres par des formules explicites évitant l'utilisation de procédures itératives. Dans certains cas, on sera amené à décrire un phénomène sous la forme d'un modèle linéaire bien que cette description ne corresponde qu'au premier ordre à la physique du problème.

I.2.2 Exemples

Nous allons présenter ici quelques exemples d'applications en traitement du signal pour illustrer la procédure de choix du modèle. Ces exemples sont volontairement assez complexes, pour donner une idée de la difficulté des problèmes réels de traitement de signal, et sont présentés relativement succinctement : plusieurs d'entre eux seront repris dans la suite du cours.

Traitement radar

Au cours d'instants successifs, $t_1 < \ldots < t_N$, un observateur reçoit à l'extrémité d'une antenne radar une tension z. La tension reçue z_k à l'instant t_k se compose de l'écho x_k des signaux émis par le radar auquel s'ajoute un bruit b_k venant du milieu de transmission. En simplifiant, x_k est fonction des impulsions transmises par le radar ainsi que de la direction et de la distance de l'objet réfléchissant. Le signal émis par l'antenne se compose d'impulsions périodiques et peut s'écrire sous la forme

$$s(t_k) = A(t_k)\,\cos(2\pi\nu t_k).$$

Dans une direction donnée, le signal émis est $G(t_k)s(t_k)$, où $G(t_k)$ est le gain d'antenne pour la direction considérée. Si les signaux sont réfléchis par un obstacle à la distance r, le signal reçu

s'exprime sous la forme

$$x_k = \gamma(t_k, \tau)\, G(t_k - \tau)\, A(t_k - \tau)\, \cos\big((2\pi\nu + 2\pi\nu_\alpha\, t_k - 2\pi\nu\tau\big)$$

où $\tau = 2r/c$ est le temps de parcours de l'onde émise et réfléchie (c est la vitesse de la lumière), γ un coefficient d'atténuation et ν_α la variation de fréquence due à l'effet Doppler si la cible est mobile.

Le modèle global de l'observation en fonction des paramètres introduit de surcroît des perturbations aléatoires b_k et l'on a finalement :

$$z_k = x_k + b_k = \gamma(t_k, \tau)\, G(t_k - \tau)\, A(t_k - \tau)\, \cos\big((2\pi\nu + 2\pi\nu_\alpha)\, t_k - 2\pi\nu\tau\big) + b_k.$$

En concaténant N équations d'observations successives, on obtient un modèle de la forme (I.3) $\boldsymbol{z} = \varphi(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{b}(\omega)$, avec $\boldsymbol{p} = [\tau, \nu_\alpha]^{\mathrm{t}}$ de dimension 2 et $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{p})$.

Le vecteur aléatoire observé $\boldsymbol{z}$ est donc une réalisation d'un vecteur aléatoire $\boldsymbol{Z}$ dont la loi dépend de $\boldsymbol{p}$ et de la loi du vecteur des perturbations $\boldsymbol{B}$. Les deux paramètres à estimer permettent de caractériser la distance de la cible (donnée par τ) et une composante de sa vitesse (grâce à l'effet Doppler, connaissant ν_α). Notons qu'ils interviennent de façon non linéaire dans l'équation d'observation. Les perturbations sont souvent modélisées par un vecteur gaussien blanc homogène dont on détermine la variance σ^2, par exemple en effectuant une première observation en l'absence de cible (on parle de « référence bruit seul »).

Traitement de la parole

Le signal vocal est obtenu par les fluctuations de la pression de l'air engendrées puis émises par l'appareil phonatoire. L'ensemble poumons-trachée-larynx produit un signal source, qui est ensuite filtré par le conduit vocal. Suivant les sons, le signal source peut être modélisé comme un bruit blanc (sons non voisés) ou comme un signal périodique (sons voisés). Les déformations du conduit vocal conduisent à la production de différents phonèmes pour le même signal source. On représente le conduit vocal sous forme d'un filtre tous-pôles. Ce modèle (simplifié) peut donc être résumé par une équation de filtrage

$$z_k = \sum_{i=0}^{M-1} a_i\, z_{k-i} + x_k,$$

où z_k représente le son émis à l'instant k qui apparaît donc comme un signal AR, et x_k désigne le signal source, bruit blanc ou signal périodique.

Ce modèle est utilisé à des fins de compression en communication, selon une technique dont le principe est le suivant :

1. on estime sur une séquence de sons $\boldsymbol{z} = [z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_N]$ les paramètres du filtrage $\boldsymbol{a}$ ainsi que ceux permettant de caractériser le signal source (sa puissance moyenne, plus sa période dans le cas voisé) ;
2. on transmet ces paramètres estimés au lieu du signal lui-même ;
3. le récepteur reconstitue une version du signal original en utilisant l'équation de filtrage précédente.

Le gain de compression provient du rapport entre le nombre de paramètres transmis ($M + 1$ ou $M + 2$) et la taille de la séquence (N), tandis que la qualité de la restitution dépend de la précision du modèle adopté. Un paramètre important à cet égard est l'ordre M du filtre. La sélection de l'ordre est opérée en faisant un compromis entre la qualité de la restitution du signal et le gain en compression, mais les contraintes de temps de calcul interviennent aussi. Par exemple, on utilisera des filtres d'ordre 10 pour les communications téléphoniques où la vitesse

de traitement est un facteur déterminant et où la qualité de restitution est relativement moins critique. Par contre, des signaux AR de cet ordre ne permettront pas de modéliser des sons avec une qualité proche de la « haute fidélité ».

Le problème d'estimation associé correspond à l'étape 1. Il ne peut pas se mettre exactement sous la forme (I.1), puisque les données interviennent dans les deux membres de l'équation de filtrage. On peut par exemple le poser sous la forme implicite $\varphi(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{z},\ \omega) = \boldsymbol{0}$ où $\boldsymbol{p} = [a(0), \ldots, a(M-1), c(1), c(2)]^{\mathrm{t}}$ (les deux derniers paramètres concernent le signal source). Comme on le verra dans la suite cette forme n'empêche pas de mener à bien l'estimation des paramètres, surtout que, comme on peut le constater dans l'équation de filtrage, la fonction φ est *linéaire* en les paramètres $\boldsymbol{a}$.

Déconvolution en géophysique

La caractérisation de la structure du sol par échographie en géophysique est fondée sur l'émission d'une onde acoustique, appelée « ondelette », dans le milieu à caractériser. Le traitement des échos reçus ensuite en surface doit permettre de déterminer la structure du sous-sol. Notons

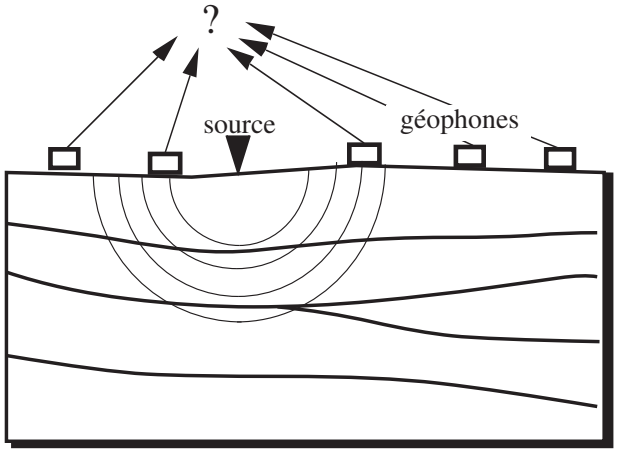

Fig. I.1. *Schéma de principe de l'échographie en géophysique*

que l'échographie est aussi utilisée pour des applications biomédicales, ainsi que dans le domaine du contrôle non destructif. Schématiquement, on retrouve le principe du radar : la présence d'une interface entre deux strates du sol génère un écho de l'ondelette qui sera visible dans les enregistrements en surface après un laps de temps correspondant à la profondeur de l'interface dans le sol. En conséquence on représente le signal reçu en surface comme la convolution de l'ondelette avec un signal appelé *réflectivité* qui se présente comme une suite d'impulsions décalées dans le temps (voir la figure I.2). En supposant l'ondelette RIF, ce modèle s'écrit :

$$z_k = \sum_{i=0}^{M-1} h_i\, x_{k-i} + b_k,$$

avec h_i l'ondelette et x_k la réflectivité qui, après conversion temps-distance, livre la position des strates, leur épaisseur et leur coefficient de réfraction, donc une représentation partielle du sous-sol. Le modèle précédent est très imparfait, il s'appuie sur un prétraitement des données recueillies et impose de négliger un grand nombre de phénomènes qui interviennent lors de l'expérimentation (le problème des échos multiples, le fait que l'ondelette est mal connue et varie suivant l'épaisseur de sol traversé...). Dans ces conditions, le terme de bruit qui est ajouté n'est pas un bruit de mesure généré par le capteur, mais plutôt ce qu'on appelle un *bruit de*

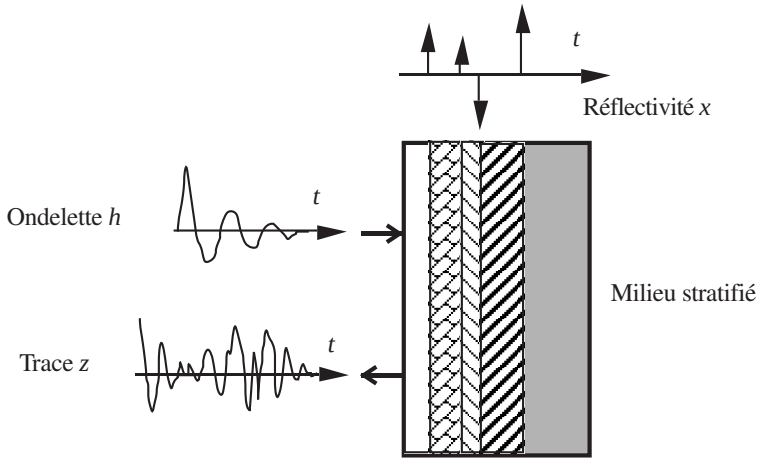

Fig. I.2. *Modèle de convolution et signal de réflectivité*

modèle qui prend la place des contributions des termes négligés dans l'étape de modélisation. Il est très difficile d'estimer les caractéristiques statistiques de ce type de bruit, aussi se contente-t-on en général de le choisir gaussien et centré.

Pour poser le problème d'estimation on concatène les équations d'observation pour tous les instants d'enregistrement $k = 1, \ldots, N$, et l'on obtient le système linéaire

$$\boldsymbol{z} = \mathrm{H}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

avec $\boldsymbol{z} = [z_1, z_2, \ldots, z_N]^{\mathrm{t}}$, le vecteur des données et $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_{N+M-1}]^{\mathrm{t}}$, le vecteur des échantillons de la réflectivité qui interviennent dans la constitution du vecteur des données. La matrice d'observation est de dimension $N \times (M + N - 1)$, elle est formée d'échantillons de l'ondelette et possède la forme suivante :

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \ldots & h_{M-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & h_0 & h_1 & \ldots & h_{M-1} \end{bmatrix}$$

Le problème d'estimation consiste donc ici à estimer le vecteur $\boldsymbol{x}$ connaissant $\boldsymbol{z}$. On remarque que le vecteur des paramètres $\boldsymbol{x}$ est de dimension supérieure à celle du vecteur des données : il s'agit donc d'un problème sous-déterminé. Nous verrons dans la suite du cours que cette circonstance n'empêche pas de fournir une estimation de $\boldsymbol{x}$. Par ailleurs l'intérêt de la modélisation approximative qui a été proposée est de fournir une équation d'observation qui est linéaire en les paramètres, ce qui est un avantage important pour la mise en œuvre de l'estimation.

I.3 Propriétés statistiques des estimateurs

Nous définissons ici quelques notions statistiques associées aux estimateurs ponctuels, un exposé plus complet pourra être trouvé dans [4]. En premier lieu, nous reprenons les notions introduites au paragraphe I.1 sous forme de définitions précises.

I.3.1 Statistique, estimateur et vraisemblance

Les données sont réunies dans un vecteur $\boldsymbol{z} = [z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_N]^{\mathrm{t}}$ de dimension N, réalisation d'un vecteur aléatoire $\boldsymbol{Z} = [Z_1, \ldots, Z_k, \ldots, Z_N]^{\mathrm{t}}$, dépendant d'un paramètre déterministe $\boldsymbol{p}^*$ de dimension M, selon l'une des équations d'observation (I.1) à (I.3). Une *statistique* est un vecteur aléatoire défini comme une fonction déterministe du vecteur des données $\psi : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{y} = \psi(\boldsymbol{Z})$. Un *estimateur* est une statistique à valeur dans l'espace des paramètres, ici $\mathbb{R}^M$. Nous le noterons $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}}$ dans le cas général, « EST » désignant la fonction appliquée aux données pour calculer l'estimateur, ou, plus généralement, le type (ou la structure) d'estimateur choisi(e) : bien souvent, comme on le verra au chapitre II, le choix d'un estimateur se résume au choix d'un type d'estimation qui conduit, sans équivoque, à une fonction particulière à appliquer aux données pour obtenir l'estimée.

Les équations du modèle d'observation (I.1) ou (I.3) montrent que la loi des données appartient à une famille de lois paramétrées par $\boldsymbol{p}$. Pour représenter les membres de cette famille, il est commode d'utiliser les fonctions de répartition $F_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{p})$ conditionnelles à un vecteur de paramètres aléatoire $\boldsymbol{P}$. A ce stade, le vecteur aléatoire $\boldsymbol{P}$ n'est qu'un artifice de notation. En fait, jusqu'au paragraphe I.3.5, on considérera les paramètres comme déterministes, et on ne s'intéressera pas à la loi de $\boldsymbol{P}$ qui est simplement supposée régulière et strictement positive pour toutes les valeurs de paramètres $\boldsymbol{p}$ qui nous intéresseront.

En estimation, il faut noter que les lois paramétrées $F_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{p})$ ne servent pas à prévoir le comportement des données $\boldsymbol{Z}$ pour un paramètre donné $\boldsymbol{p}$, mais au contraire à obtenir de l'information sur la valeur $\boldsymbol{p}^*$ du paramètre à $\boldsymbol{z}$ fixé. Prenons un exemple simple : supposons qu'il nous faille décider si un sportif est marathonien ou haltérophile connaissant son poids. Le paramètre peut prendre deux valeurs $p =$ 'h' (haltérophile) ou $p =$ 'm' (marathonien). La loi de la mesure du poids est gaussienne et dépend du paramètre : $F_{Z|P}(z\,|\,p = \text{'h'}) \propto \mathcal{N}(120, 20)$ et $F_{Z|P}(z\,|\,p = \text{'m'}) \propto \mathcal{N}(60, 20)$. Le poids mesuré est $z = 150$ kg à un kilo près. L'estimation de p s'appuie sur les deux valeurs

$$F_{Z|P}(z \in [149, 151[\,|\,p = \text{'h'}) = 7.10^{-3} \quad \text{et} \quad F_{Z|P}(z \in [149, 151[\,|\,p = \text{'m'}) = 8.10^{-7}.$$

L'écart entre ces deux valeurs reflète le fait que ce poids est typique d'un haltérophile et non d'un marathonien, et l'on décide (à la surprise générale) $p =$ 'h'. On comprend que les lois $F_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{p})$ sont utiles à l'estimation en tant que fonction de $\boldsymbol{p}$ à $\boldsymbol{z}$ fixé. Ceci nous conduit à la définition de la *vraisemblance*, proposée ici dans deux situations particulières.

— Lorsque les données sont des variables aléatoires discrètes, leur probabilité jointe est le nombre $P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \ldots, Z_N = z_N\,|\,\boldsymbol{p})$, qui dépend du paramètre $\boldsymbol{p}$. La vraisemblance des données est cette probabilité considérée comme une fonction du paramètre :

$$L : \boldsymbol{p} \;\to\; L(\boldsymbol{p}\,;\,\boldsymbol{z}) = P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \ldots, Z_N = z_N\,;\,\boldsymbol{p}).$$

— Lorsque les données forment un vecteur aléatoire réel à densité, on note $f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{p})$ cette densité, pour un vecteur de données $\boldsymbol{z}$ et un vecteur de paramètres $\boldsymbol{p}$. Comme dans le cas discret, on parle de vraisemblance des données $\boldsymbol{z}$ lorsque l'on considère cette densité comme une fonction des paramètres :

$$L : \boldsymbol{p} \;\to\; L(\boldsymbol{p}\,;\,\boldsymbol{z}) = f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{p}). \tag{I.6}$$

Donnons tout de suite l'exemple de la vraisemblance gaussienne, qui sera souvent repris dans la suite, et qui intervient avec le modèle de bruit additif (I.3) lorsque le bruit $\boldsymbol{B}$ est gaussien de moyenne $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{B}}$ et de matrice de covariance $\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}$. On note d'abord que, grâce au modèle additif (I.3), on a

$$L(\boldsymbol{p}\,;\,\boldsymbol{z}) = f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{p}) = f_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p})), \tag{I.7}$$

donc la log-vraisemblance du modèle additif gaussien s'écrit :

$$\ln L(\boldsymbol{p}\ ;\ \boldsymbol{z}) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi^N \det \mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}) - \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{B}}\big)^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\big(\boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{B}}\big). \tag{I.8}$$

L'utilisation précise qui peut être faite de la vraisemblance (ou de la log-vraisemblance $\ln L(\boldsymbol{p}\ ;\ \boldsymbol{z})$, très utilisée aussi) pour estimer le paramètre $\boldsymbol{p}^*$ à partir des données $\boldsymbol{z}$ sera abordée dans le chapitre II. A ce stade retenons que dans un problème comportant une partie aléatoire, tels que les énoncés (I.1), (I.3) et (I.5) de l'introduction, la vraisemblance $L(\boldsymbol{p}\ ;\ \boldsymbol{z})$ résume la relation qui existe entre les données et le paramètre. En d'autres termes et pour introduire le paragraphe I.3.3 en particulier, c'est l'étude de la (log-)vraisemblance qui permet de « jauger » l'information que les données $\boldsymbol{z}$ recèlent sur la valeur cherchée du paramètre $\boldsymbol{p}^*$.

I.3.2 Biais, covariance et risque quadratique

Biais et covariance

On appelle *biais associé à l'estimateur* $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}}$, la différence

$$\boldsymbol{b}_{\mathrm{EST}}(\boldsymbol{p}^*) = \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}}\,|\,\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}^*) - \boldsymbol{p}^*. \tag{I.9}$$

Cette valeur est une indication sur le comportement moyen de la méthode d'estimation choisie : bien souvent (mais pas toujours) on cherche à obtenir un estimateur à biais nul (ou non biaisé) c'est-à-dire

$$\mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}}\,|\,\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}^*) = \boldsymbol{p}^*, \quad \forall \boldsymbol{p}^*. \tag{I.10}$$

Le biais ne fournit qu'une indication partielle, en particulier il ne renseigne pas sur la dispersion des valeurs estimées autour de la valeur moyenne : si cette dispersion est importante, la valeur estimée peut être mauvaise même à biais nul. Cette dispersion est déterminée au second ordre par la *matrice de covariance centrée de l'estimateur* (ou variance dans le cas scalaire)

$$\mathrm{V}_{\mathrm{EST}}(\boldsymbol{p}^*) = \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}\left(\big(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}} - \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}}\,|\,\boldsymbol{p}^*)\big)\,\big(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}} - \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}}\,|\,\boldsymbol{p}^*)\big)^{\mathrm{t}}\,|\,\boldsymbol{p}^*\right). \tag{I.11}$$

Risque quadratique et compromis biais-variance

Plus directement, on peut qualifier l'estimation en calculant la distance, au sens de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui sépare $\boldsymbol{p}^*$ et $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}}$. Notons que $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}}$ est un vecteur de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ lorsque sa covariance est bornée, et que le vecteur $\boldsymbol{p}^*$ est un vecteur déterministe, donc un vecteur aléatoire de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de moyenne $\boldsymbol{p}^*$ et de matrice de covariance nulle. La norme dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est donnée par la trace de la matrice de covariance du vecteur d'erreur $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}} - \boldsymbol{p}^*$ (voir chapitre IV de [14]). Cette norme est appelée *risque quadratique*

$$R_{\mathrm{EST}}(\boldsymbol{p}^*) = \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}\left((\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}} - \boldsymbol{p}^*)^{\mathrm{t}}\,(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}} - \boldsymbol{p}^*)\,|\,\boldsymbol{p}^*\right). \tag{I.12}$$

Le risque permet de comparer plusieurs estimateurs entre eux. Un estimateur $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST1}}$ est dit *préférable* à un estimateur $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST2}}$ si

$$R_{\mathrm{EST1}}(\boldsymbol{p}^*) \leqslant R_{\mathrm{EST2}}(\boldsymbol{p}^*), \quad \forall \boldsymbol{p}^*. \tag{I.13}$$

Un estimateur est dit *admissible* s'il n'existe pas d'autre estimateur qui lui soit préférable.

Le risque quadratique peut s'exprimer en fonction du biais et de la matrice de covariance introduits précédemment. En effet, il est immédiat de montrer que

$$R_{\mathrm{EST}}(\boldsymbol{p}^*) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{V}_{\mathrm{EST}}(\boldsymbol{p}^*) + \boldsymbol{b}_{\mathrm{EST}}(\boldsymbol{p}^*)\,\boldsymbol{b}_{\mathrm{EST}}(\boldsymbol{p}^*)^{\mathrm{t}}\right) \tag{I.14}$$

qui se réduit dans le cas scalaire à

$$R_{\text{EST}}(p^*) = \sigma^2_{\text{EST}}(p^*) + b^2_{\text{EST}}(p^*). \tag{I.15}$$

Ainsi l'expression du risque quadratique mélange la variance et le biais de l'estimateur : minimiser ce risque conduit donc à réaliser un *compromis biais - variance*. Ce compromis est souvent présent dans un problème d'estimation. Considérons par exemple l'estimateur constant $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\text{CST0}}$ qui associe toujours la même valeur $\boldsymbol{p}_0$ du paramètre à n'importe quel jeu de données. Cet estimateur a les caractéristiques :

$$\boldsymbol{b}_{\text{CST0}}(\boldsymbol{p}^*) = \boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}^*, \quad \text{V}_{\text{CST0}}(\boldsymbol{p}^*) = \boldsymbol{0},$$

et possède donc une variance nulle mais un biais non nul sauf lorsque $\boldsymbol{p}^* = \boldsymbol{p}_0$. Réciproquement, le périodogramme présenté au chapitre VI du cours [14] possède un biais très faible pour un nombre de données suffisant mais une variance élevée, même pour un nombre arbitrairement grand de données : toute l'étude menée sur le périodogramme moyenné peut être relue comme la réalisation d'un compromis biais-variance.

Remarque

Il est important de noter que toutes les expressions précédentes dépendent, dans le cas général, de la valeur du paramètre $\boldsymbol{p}^*$. Dans une expérience réelle, le paramètre $\boldsymbol{p}^*$ est bien entendu inconnu et ces valeurs ne peuvent donc pas être calculées. C'est la raison pour laquelle on cherche à caractériser le comportement des indicateurs précédents pour tout $\boldsymbol{p}^*$: voir les définitions de biais nul (I.10) et d'estimateur préférable (I.13). Nous reviendrons sur ces problèmes dans les paragraphes qui suivent.

I.3.3 Inégalité de Cramér et Rao

Enoncé standard et commentaires

Dans la plupart des cas, l'énoncé de l'inégalité de Cramér-Rao est restreint au cas des estimateurs non biaisés, pour lesquels, sous certaines conditions de régularité de la vraisemblance, on montre que la covariance est minorée :

$$\text{V}_{\text{EST}}(\boldsymbol{p}^*) \geqslant \text{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}^*)^{-1}. \tag{I.16}$$

Cette inégalité matricielle est prise au sens où $\text{A} \geqslant \text{B}$ signifie que la matrice $\text{A} - \text{B}$ est semi-définie positive. La matrice $\text{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}^*)$ dont l'inverse apparaît au second membre (nous considérons ici uniquement le cas où $\text{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}^*)$ est régulière, mais l'inégalité peut être généralisée au cas singulier en utilisant l'inverse généralisée) est appelée *matrice d'information de Fisher*, c'est la matrice de covariance du vecteur aléatoire

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}}{\partial p_1}(\boldsymbol{p}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}}{\partial p_M}(\boldsymbol{p}^*) \end{pmatrix}, \tag{I.17}$$

appelé *score* chez certains auteurs.

L'inégalité précédente (I.16) peut donner lieu à deux remarques :

1. les deux membres de l'inégalité dépendent dans le cas général de la vraie valeur du paramètre, qui n'est pas disponible dans une expérience réelle ;
2. le premier membre dépend de l'estimateur choisi (ou de la structure d'estimation, voir paragraphe I.3.1) et *non le second membre*.

La caractéristique 2 est à l'origine de l'utilisation suivante de l'inégalité (I.16) : dans un cadre idéal dans lequel on suppose le vrai paramètre connu, la borne est calculée soit pour définir les meilleures performances (en termes de variance de l'estimateur) qui pourront être atteintes *quel que soit l'estimateur utilisé*, soit pour juger des performances comparées de tel ou tel estimateur, relativement à la borne. L'idéal est alors d'atteindre la borne de Cramér-Rao. Un estimateur non biaisé qui réalise l'égalité dans (I.16) est dit *efficace*. Il est important de relativiser ces comparaisons, qui sont souvent présentées comme incontournables. En effet, elles ne concernent que les estimateurs non biaisés, et ne s'appuient que sur un seul critère, la variance de l'estimateur. Or, un estimateur est une variable aléatoire dont la loi ne peut être résumée à ses deux premiers moments.

Il est très courant en statistique de réaliser une étude théorique préliminaire d'un problème dans un cadre idéal. Cette étude permet de sélectionner des techniques qui seront utilisées dans le problème expérimental réel, souvent au prix d'une approximation (car le cadre réel ne colle pas parfaitement au cadre idéal). Conformément à cette démarche, les notions développées dans le cours seront souvent utilisées dans deux cadres d'application différents.

♡ désigne le cadre idéal : par exemple ici, la vraie valeur du paramètre est connue.

Ce cadre permet de mener un certain nombre de calculs, en l'ocurrence (lorsque des expressions explicites sont calculables) de calculer le biais, la variance de l'estimateur et de le positionner relativement à la borne de Cramér-Rao, pour la valeur connue du vrai paramètre. Bien entendu, une fois ces études théoriques achevées, il faut traiter des données réelles, et l'on est alors confronté au cadre beaucoup moins sympathique :

♠ — cadre réaliste : par exemple ici, la vraie valeur du paramètre est inconnue, tout ce qu'on connaît est une valeur estimée du paramètre.

Dans le cadre ♠, l'utilisation qui peut être faite de la borne (I.16) repose sur des circonstances particulières ou sur des approximations. Par exemple, il est facile de voir (à partir de l'expression (I.18) obtenue à la section suivante) que lorsque la log-vraisemblance $\ln L(\boldsymbol{p}\ ;\ \boldsymbol{z})$ est une fonction linéaire ou quadratique des paramètres, la matrice d'information de Fisher ne dépend pas de la valeur du paramètre : $\mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}^*) = \mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}$. On peut dans ce cas calculer la matrice pour la valeur estimée du paramètre $\mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}})$. En dehors de cette situation particulière, on peut quand même décider de calculer la matrice d'information de Fisher pour la valeur estimée du paramètre, mais il est difficile, voire souvent impossible, de justifier rigoureusement cette substitution. La matrice ainsi calculée peut être utile pour donner une valeur approximative de la matrice de covariance de l'estimateur, qui est souvent difficile à calculer. Pour étayer ce type de suppositions, qui doivent souvent être faites dans le cadre ♠, on s'appuie en général sur une *étude empirique*. Ici, cela pourrait consister à réaliser un grand nombre d'estimations à paramètre connu et à vérifier que la matrice $\mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}})$ fournit en général une bonne approximation de la covariance empirique de l'estimateur.

Matrice d'information de Fisher : interprétations

La dénomination de $\mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}$ découle entre autres de l'inégalité (I.16) elle-même : lorsque la matrice $\mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}^*)$ est « grande » (c'est-à-dire ne possède pas de « petites » valeurs propres) le second membre de (I.16) est faible et l'on peut trouver un estimateur de $\boldsymbol{p}^*$ de covariance faible. Cette bonne précision signifie que les données disponibles apportent beaucoup d'information sur le paramètre cherché. *A contrario*, une matrice $\mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}^*)$ faible signifie une borne élevée, donc une estimation imprécise, ce qui révèle une information insuffisante dans les données. La matrice $\mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}^*)$ apparaît en ce sens comme une mesure de l'information contenue dans les données *pour l'estimation de* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^*$: elle caractérise une situation locale autour de la valeur $\boldsymbol{p}^*$.

On peut donner une interprétation géométrique de la matrice $\mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}^*)$. Observons d'abord que, lorsque la vraisemblance est deux fois continûment dérivable, le vecteur score est centré,

car (en abrégeant les notations) :

$$\mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}^*)\,|\,\boldsymbol{p}^*) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}}{\partial \boldsymbol{p}}\, f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}\, d\boldsymbol{z} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}}{\partial \boldsymbol{p}}\, d\boldsymbol{z} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \int_{\mathbb{R}} f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}\, d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}.$$

En dérivant à nouveau cette égalité, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}}{\partial \boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}} f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}\, d\boldsymbol{z} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 \ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}}{\partial \boldsymbol{p}\, \partial \boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}} f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}\, d\boldsymbol{z} + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial \ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}}{\partial \boldsymbol{p}}\Big) \Big(\frac{\partial \ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}}{\partial \boldsymbol{p}}\Big)^{\mathrm{t}} f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}\, d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0},$$

ce qui conduit à l'expression :

$$\mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}^*) = -\mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}\Big(\frac{\partial^2 \ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{Z}\,|\,\boldsymbol{p}^*)}{\partial \boldsymbol{p} \partial \boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}}\,|\,\boldsymbol{p}^*\Big). \tag{I.18}$$

La matrice d'information de Fisher est aussi la valeur moyenne du Hessien de la vraisemblance, c'est-à-dire, pour un paramètre scalaire, la valeur moyenne de la dérivée seconde de la log-vraisemblance :

$$\mathrm{F}_{Z|P}(p^*) = -\mathrm{E}_{Z|P}\Big(\frac{\partial^2 \ln f_{Z|P}(Z\,|\,p^*)}{\partial p^2}\,|\,p^*\Big).$$

La matrice inverse qui définit la borne apparaît ainsi comme le rayon de courbure moyen de la log-vraisemblance autour du vrai paramètre. Lorsque la vraisemblance aux alentours du vrai paramètre $\boldsymbol{p}^*$ forme en moyenne un pic « pointu », les valeurs proches de $\boldsymbol{p}^*$ conduisent à des vraisemblances en moyenne très différentes, donc la vraisemblance est très sélective, ou, en d'autres termes, les données sont en moyenne très informatives sur la valeur précise du paramètre. Cela se traduit par une grande matrice d'information de Fisher, donc une covariance d'estimation faible. Cette interprétation est illustrée à la figure I.3.

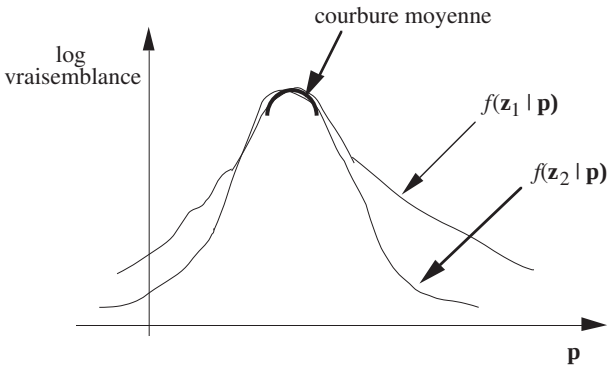

Fig. I.3. *Matrice de Fisher dans le cas scalaire et rayon de courbure moyen*

Inégalité de Cramér et Rao : cas général, démonstration et commentaires

Nous allons démontrer un énoncé plus général que (I.16), intégrant le biais éventuel de l'estimateur.

Théorème

Sous conditions de régularité de la log-vraisemblance $\ln L(\boldsymbol{z}\,;\,\boldsymbol{p})$, et lorsque la matrice d'information de Fisher au vrai paramètre $\mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}^*)$ est inversible, la covariance d'un estimateur admet la borne inférieure :

$$\mathrm{V}_{\mathrm{EST}}(\boldsymbol{p}^*) \geqslant \Big(\mathrm{I} + \frac{\partial \boldsymbol{b}_{\mathrm{EST}}}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}^*)\Big)^{\mathrm{t}}\, \mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}^*)^{-1} \Big(\mathrm{I} + \frac{\partial \boldsymbol{b}_{\mathrm{EST}}}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}^*)\Big), \tag{I.19}$$

où I désigne la matrice identité.

Démonstration

La démonstration s'appuie sur l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les vecteurs aléatoires du second ordre. Cette inégalité a déjà été introduite au paragraphe IV.6.1 de [14] pour les variables aléatoires du second ordre. Nous utilisons ici son extension à des vecteurs aléatoires du second ordre : pour $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tels que la matrice d'intercorrélation $\mathrm{R}_{\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}}$ soit définie et la matrice de covariance $\mathrm{R}_{\boldsymbol{V}}$ inversible,

$$\mathrm{R}_{\boldsymbol{U}} \geqslant \mathrm{R}_{\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}}\, \mathrm{R}_{\boldsymbol{V}}^{-1}\, \mathrm{R}_{\boldsymbol{V}\boldsymbol{U}}. \tag{I.20}$$

La démonstration de (I.20) consiste simplement à remarquer que la matrice différence $\mathrm{R}_{\boldsymbol{U}} - \mathrm{R}_{\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}}\, \mathrm{R}_{\boldsymbol{V}}^{-1}\, \mathrm{R}_{\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}}$ est la matrice de covariance du vecteur $\boldsymbol{U} - \mathrm{R}_{\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}}\, \mathrm{R}_{\boldsymbol{V}}^{-1}\, \boldsymbol{V}$. Notons encore que l'égalité dans (I.20) est obtenue si $\boldsymbol{U} = \mathrm{M}\, \boldsymbol{V}$ où M est une matrice déterministe.

Considérons à présent $\boldsymbol{U} = \widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}} - \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}} \,|\, \boldsymbol{p}^*)$, l'estimateur centré et pour $\boldsymbol{V}$, le vecteur score défini en (I.17), qui est lui aussi centré et dont la matrice de covariance est l'information de Fisher. L'inégalité de Cauchy-Schwartz pour ces deux vecteurs s'écrit :

$$\mathrm{V}_{\mathrm{EST}}(\boldsymbol{p}^*) \geqslant \mathrm{E}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{t}})\, \mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}^*)^{-1}\, \mathrm{E}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{U}^{\mathrm{t}}).$$

Il nous reste à calculer l'intercorrélation

$$\mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{t}}) = \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{t}}) - \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}} \,|\, \boldsymbol{p}^*)\, \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{V}) = \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{t}} \,|\, \boldsymbol{p}^*).$$

Or (en allégeant les notations),

$$\mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{t}}) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}} \frac{\partial \ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}}{\partial \boldsymbol{p}} f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}\, d\boldsymbol{z} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}} f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}\, d\boldsymbol{z} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}} \,|\, \boldsymbol{p}^*),$$

et, en dérivant (I.9) :

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}_{\mathrm{EST}}}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}^*) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{EST}} \,|\, \boldsymbol{p}^*) - \mathrm{I},$$

ce qui permet de conclure.

Revenons aux « conditions de régularité » mentionnées dans l'énoncé. Il s'agit de pouvoir dériver par rapport au vecteur des paramètre $\boldsymbol{p}$ sous l'intégrale $\mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}$. Deux conditions doivent être vérifiées :

— la vraisemblance doit suivre une décroissance suffisante pour $\boldsymbol{z}$ tendant vers l'infini, ce qui ne pose pas de problème en pratique ;

— le domaine d'intégration, qui est ici l'ensemble des $\boldsymbol{z}$ tels que $f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{p}) > 0$, ne doit pas dépendre du paramètre : cette seconde condition peut ne pas être vérifiée en pratique.

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, l'énoncé dans le cas général ne confère pas à la borne de Cramér-Rao un domaine d'application beaucoup plus large. Tout d'abord plusieurs des remarques de la section portant sur le cas non biaisé sont toujours valables : on se restreint toujours uniquement à des caractéristiques à l'ordre 2 de l'estimateur, et l'on a toujours les problèmes d'application dans le cadre réaliste (♠). Ensuite parce que la borne est maintenant variable pour des valeurs de biais différentes de l'estimateur, puisque le biais intervient dans le second membre de (I.18). Hormis les cas particuliers dans lesquels les estimateurs sont à biais constant (en $\boldsymbol{p}^*$), il n'est pas possible de l'utiliser pour comparer des estimateurs de biais différents, par exemple pour réaliser un bon compromis biais-variance.

I.3.4 Caractéristiques asymptotiques

Il arrive dans certains problèmes que le nombre de données N augmente avec le temps, ce qui conduit à considérer le cadre asymptotique dans lequel N est, sinon infini, en tous cas très grand

devant le nombre de paramètres M. Pour définir ces notions, notons $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\text{EST}}(N)$ un estimateur utilisant N données, de biais $\boldsymbol{b}_{\text{EST}}(\boldsymbol{p}^*, N)$ et de matrice de covariance $\text{V}_{\text{EST}}(\boldsymbol{p}^*, N)$. Les biais et variance asymptotiques sont définis comme les limites :

$$\lim_{N\to\infty} \boldsymbol{b}_{\text{EST}}(\boldsymbol{p}^*, N) \text{ et } \lim_{N\to\infty} \text{V}_{\text{EST}}(\boldsymbol{p}^*, N)$$

Intuitivement, on peut espérer que l'information disponible sur la valeur du paramètre augmente avec le nombre de données, autrement dit qu'il y a *convergence* de $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\text{EST}}(N)$ vers $\boldsymbol{p}^*$ lorsque N tend vers l'infini. Notons que l'étude de convergence doit alors être effectuée en reprenant les différentes notions de convergence de suites de variables aléatoires, introduites dans [14].

Terminons par une remarque : il arrive que l'on dispose d'un rapport N sur M tel que le cadre asymptotique constitue un bon modèle de la situation réelle. Malheureusement il est plus fréquent que ce rapport soit défavorable, c'est-à-dire proche de (voire inférieur à) 1. Dans ce cas le cadre asymptotique, traditionnellement invoqué en statistique, ne doit pas être considéré comme un cadre de référence : cela peut conduire à négliger certains estimateurs et à restreindre son choix à d'autres qui ne sont pas forcément pertinents.

I.3.5 Caractéristiques moyennes et paramètres probabilisés

Nous avons déjà mentionné que les caractéristiques des estimateurs présentées précédemment dépendent, en général, de la vraie valeur du paramètre $\boldsymbol{p}^*$. C'est la raison pour laquelle on s'est intéressé à certains énoncés indépendants de cette valeur (biais nul, estimateur préférable, information de Fisher dans le cas d'une vraisemblance linéaire ou quadratique en les paramètres). Dans le même ordre d'idées, on peut aussi procéder par évaluation dans le pire des cas, par exemple pour calculer le biais maximum de l'estimateur sur l'ensemble des paramètres possibles.

Lorsque toutes ces possibilités sont épuisées, on est tenté de faire des hypothèses sur la valeur vraie du paramètre. Par exemple, il est courant qu'un expert puisse fournir une idée *a priori* plus ou moins précise sur la valeur du paramètre, et l'on souhaite alors que l'estimateur se conduise bien dans cette plage de fonctionnement au moins. Ce faisant, on introduit, *a priori*, c'est-à-dire avant de recevoir le vecteur de données, une discrimination entre les différentes valeurs du paramètre. Il est parfois possible de traduire le résultat de l'expertise par la définition d'une loi de probabilité *a priori* $\text{F}_{\boldsymbol{P}}$ pour le paramètre, qui indique, au sein du domaine, les zones les plus susceptibles de contenir le vrai paramètre. On peut alors calculer des valeurs moyennes des caractéristiques précédentes, sous cette loi : on définit ainsi le biais moyen pour la loi *a priori* $\text{F}_{\boldsymbol{P}}$

$$\boldsymbol{b}_{\text{EST}}^{\text{F}_{\boldsymbol{P}}} = \text{E}_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{b}_{\text{EST}}(\boldsymbol{p})),$$

la matrice de covariance moyenne

$$\boldsymbol{V}_{\text{EST}}^{\text{F}_{\boldsymbol{P}}} = \text{E}_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{V}_{\text{EST}}(\boldsymbol{p})),$$

et enfin la matrice d'information de Fisher moyenne

$$\text{F}_{\boldsymbol{Z},\boldsymbol{P}} = \text{E}_{\boldsymbol{P}}(\text{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p})),$$

quantités qui ne dépendent plus de la vraie valeur du paramètre, mais de la loi choisie *a priori* pour ce paramètre. On obtient des caractéristiques effectivement calculables pour une expérience réelle dans laquelle le vrai paramètre est inconnu. Ces caractéristiques sont pertinentes à la condition que la loi postulée *a priori* pour le paramètre soit elle-même pertinente.

Observons que nous avons introduit une loi *a priori* sur les paramètres pour pouvoir qualifier un estimateur donné $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\text{EST}}$. Mais si cette loi *a priori* contient une information pertinente sur le paramètre que nous apporte l'expert indépendamment des données, elle doit être prise en compte dans la construction de l'estimateur lui-même. Cet aspect, qui a été évoqué en introduction de ce chapitre, sera développé dans le chapitre II qui traite précisément de la construction des estimateurs.

Chapitre II

Choix et propriétés des estimateurs

II.1 Introduction

La première partie du cours [14] a été consacrée aux définitions et aux propriétés des principaux modèles de signaux utilisés en traitement numérique du signal, déterministes ou probabilistes. Puis dans le cadre d'un modèle donné, le concept d'estimation et les propriétés que l'on peut attendre d'un estimateur ont été introduits dans le chapitre précédent.

Avant même d'aborder les aspects numériques liés aux problèmes du calcul efficace d'un estimateur, il reste encore à trancher les questions suivantes : étant donnée une structure de modèle faisant intervenir une quantité inconnue (déterministe ou aléatoire), y a-t-il un estimateur unique pour cette quantité ? Si oui, lequel ? Si non, pourquoi et comment choisir un estimateur plutôt qu'un autre ?

Malheureusement, la réponse à ces questions ne va pas dans le sens de la facilité : étant donné un modèle, il n'existe pas en général de procédure systématique pour sélectionner un estimateur unique et optimal. Ce problème n'est pas propre au traitement du signal ; il est celui du traitement statistique de données et de la théorie de la décision [5], et, plus généralement, de toutes les sciences appliquées. Ainsi, la prescription d'un médecin n'est pas entièrement déterminée par le dossier de son patient ; elle peut dépendre aussi des moyens médicaux disponibles (inutile de prescrire un médicament introuvable), des conséquences plus ou moins graves d'un défaut de diagnostic... De la même façon, le choix d'un estimateur réalise un compromis qui peut faire intervenir d'autres considérations que la seule étude du modèle qui a produit les observations, et en particulier les contraintes de mises en œuvre. Un économiste parlerait de la prise en compte de contraintes exogènes.

Il serait donc illusoire et fastidieux de vouloir cataloguer systématiquement les formes d'estimateurs envisageables dans une situation donnée. Il apparaît néanmoins nécessaire de passer en revue les plus classiques, en mettant en évidence ce qui peut faire leurs avantages et leurs défauts.

Nous nous placerons dans le cadre établi au chapitre I : soit un vecteur d'observations $\boldsymbol{z} = [z_1, \ldots, z_N]^{\mathrm{t}}$ et un modèle de la forme

$$\boldsymbol{z} = \varphi(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{b}), \tag{II.1}$$

où φ est une fonction déterministe et où le « vecteur de bruit » $\boldsymbol{b}$ contient la partie parasite du problème, c'est-à-dire des paramètres inconnus mais sans intérêt (voir les commentaires au sujet de la notion de bruit au paragraphe V.3.1 de [14]). Le vecteur $\boldsymbol{p}^* = [p_1^*, \ldots, p_M^*]^{\mathrm{t}}$ contient également des quantités inconnues, mais dont la connaissance présente un intérêt : l'objet du problème est d'estimer ces quantités.

Nous distinguerons principalement deux cadres de travail et deux catégories d'estimateurs :

— dans le cas d'un *modèle paramétrique*, les observations $\boldsymbol{z}$ sont en nombre N au moins égal à la taille M du vecteur à estimer $\boldsymbol{p}^*$ et $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{z}$ sont d'une taille voisine. Dans ce cadre, on peut concevoir formellement la « production » d'un plus grand nombre de données, en conservant inchangée la dimension du vecteur de paramètres. Par exemple, soit à estimer un signal de niveau constant, noyé dans un bruit de mesure :

$$z_n = x + b_n, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{II.2}$$

Dans ce cas, $M = 1$ et $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{z}$ sont de même taille. L'estimation *non bayésienne* est adaptée à ce type de problème. Les principaux estimateurs non bayésiens et leurs propriétés sont présentés dans la partie II.2.

— Dans le cas d'un *modèle non paramétrique*, la taille du vecteur d'observation $\boldsymbol{z}$ est liée au nombre de paramètres à estimer, ce dernier n'étant pas nécessairement inférieur au nombre de données (on peut même avoir $M > N$). Par exemple, soit à estimer N échantillons $x_1, \ldots, x_N$ d'un signal noyé dans un bruit de mesure :

$$z_n = x_n + b_n, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{II.3}$$

Dans ce cas, $M = N$ et l'augmentation de l'horizon d'observation fait augmenter d'autant le nombre de paramètres à estimer. Les outils de l'estimation *bayésienne* sont adaptés à ce type de problème. Les principaux estimateurs bayésiens et leurs propriétés sont présentés dans la partie II.3.

II.2 Estimation non bayésienne

II.2.1 Principe

Le fil conducteur de l'estimation non bayésienne est de chercher un estimateur $\widehat{\boldsymbol{p}}$ en introduisant le moins possible d'hypothèses sur la valeur inconnue de $\boldsymbol{p}^*$. Ce souci de non discrimination entre les valeurs possibles conduit en général à traiter $\boldsymbol{p}^*$ comme un vecteur déterministe, à valeur dans $\mathbb{R}^M$ pour des paramètres réels, ou éventuellement dans un sous-ensemble (par exemple dans $\mathbb{R}_+^M$ pour des paramètres positifs, ou dans $\mathbb{N}^M$ pour des paramètres entiers). En revanche, le bruit est traité comme un vecteur aléatoire de loi connue. C'est l'exploitation de la redondance des observations ($N \geqslant M$) qui permet d'atténuer au mieux l'influence du bruit dans l'estimation de $\boldsymbol{p}^*$.

II.2.2 Estimateurs empiriques

Comme leur nom l'indique, ces estimateurs se déduisent de considérations artisanales, intuitives mais difficiles à généraliser en une méthode d'estimation systématique. Leur importance pratique les rend néanmoins incontournables. D'ailleurs il existe de nombreux problèmes qu'aucune des méthodes d'estimation systématique présentées dans la suite ne résoud aussi bien qu'une méthode empirique.

Comment construire un estimateur empirique ?

En général, la construction d'un estimateur empirique est facilitée par l'existence d'une statistique exhaustive $T(\boldsymbol{z})$ pour le paramètre $\boldsymbol{p}^*$ (voir [5]). Dans ce cas, il est inutile de chercher d'autres estimateurs que des fonctions $\widehat{\boldsymbol{p}}(T(\boldsymbol{z}))$, ce qui simplifie la construction. Parmi ceux-ci, on peut finalement chercher une structure particulière qui possède des propriétés spécifiques : minimisation du risque quadratique, annulation du biais (ou à défaut, réduction)... Si aucune statistique exhaustive n'est connue, il est toujours possible de procéder de la même façon à partir de toute autre statistique indiquée par l'intuition.

Moyenne empirique

La *moyenne empirique* d'un N-échantillon $x_1, \ldots, x_N$ est

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n. \tag{II.4}$$

Si $x_1, \ldots, x_N$ sont extraits de la réalisation d'un signal $\{X_k\}$ aléatoire stationnaire d'ordre un d'espérance m, alors $\bar{x}$ est évidemment un estimateur sans biais de m construit à partir des observations $x_1, \ldots, x_N$. Le reste des propriétés de $\bar{x}$ (variance, propriétés asymptotiques...) dépend de la loi de $\{X_k\}$. En particulier, si $\{X_k\}$ est blanc stationnaire d'ordre deux de variance σ^2, la variance de $\bar{x}$ est σ^2/N : $\bar{x}$ converge vers m en moyenne quadratique quand N tend vers l'infini.

Variance empirique

Pour N échantillons $x_1, \ldots, x_N$ extraits d'un bruit blanc $\{X_k\}$ stationnaire d'ordre deux de variance σ^2, l'estimateur empirique de la variance

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_n - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n^2 - \bar{x}^2 \tag{II.5}$$

possède un biais égal à $-\sigma^2/N$. Dans le cas où $\{X_k\}$ est gaussien, la variance de $\bar{\sigma}^2$ est

$$\mathrm{var}\,(\bar{\sigma}^2) = 2\,\frac{N-1}{N^2}\,\sigma^4,$$

et le risque quadratique :

$$\mathrm{E}\left((\bar{\sigma}^2 - \sigma^2)^2\right) = \frac{2N-1}{N^2}\,\sigma^4.$$

Il est possible d'obtenir un nouvel estimateur empirique en annulant le biais de $\bar{\sigma}^2$:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{N}{N-1}\,\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} (x_n - \bar{x})^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} x_n^2 - \frac{N}{N-1}\bar{x}^2. \tag{II.6}$$

Dans le cas où $\{X_k\}$ est blanc gaussien, on obtient simultanément la variance de $\widehat{\sigma}^2$ et son risque quadratique sous la forme

$$\mathrm{E}\big((\widehat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2\big) = \mathrm{var}\,(\widehat{\sigma}^2) = \frac{2}{N-1}\,\sigma^4.$$

Il est facile de vérifier que le risque quadratique de l'estimateur sans biais $\widehat{\sigma}^2$ est supérieur à celui de l'estimateur biaisé $\bar{\sigma}^2$, tandis que tous deux sont convergents en moyenne quadratique. Chacun des deux estimateurs de la variance a donc son avantage dans le cas blanc gaussien : l'un est sans biais, l'autre possède un risque quadratique plus faible.

Estimation empirique de la fonction de corrélation

Soit N échantillons $x_1, \ldots, x_N$ extraits d'un signal stationnaire $\{X_k\}$ d'ordre deux de fonction de corrélation inconnue $\{c_X(n)\}$. Supposons pour simplifier que $\{X_k\}$ est centré. On peut généraliser l'estimation empirique de la variance aux $2N-1$ points centraux de la fonction de corrélation sous la forme :

$$\bar{c}(n) = \bar{c}(-n) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=1}^{N-n} x_k\, x_{k+n}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{II.7}$$

et vérifier facilement que les coefficients estimés sont sans biais. Cette forme empirique présente néanmoins un défaut majeur : les $2N-1$ coefficients estimés ne forment en général pas le début d'une fonction définie non négative, ou, de façon équivalente, il n'y a aucune garantie sur la définie non-négativité de la matrice de covariance centrée de taille $N \times N$ formée par les $\{\bar{c}(n)\}$.

Considérons le nouvel estimateur empirique

$$\widehat{c}(n) = \widehat{c}(-n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-n} x_k \, x_{k+n}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{II.8}$$

Cette fois $\mathrm{E}(\widehat{c}(n)) = c_X(n)\,(N-n)/N$: les coefficients $\widehat{c}(n)$ sont biaisés (sauf $\widehat{c}(0)$) et le biais varie linéairement avec n. Mais la supériorité de $\{\widehat{c}(n)\}$ sur $\{\bar{c}(n)\}$ réside dans la définie positivité de la matrice

$$\widehat{\mathrm{R}}_n = \begin{bmatrix} \widehat{c}(0) & \widehat{c}(1) & \ldots & \widehat{c}(n) \\ \widehat{c}(1) & & & \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \widehat{c}(1) \\ \widehat{c}(n) & \ldots & \widehat{c}(1) & \widehat{c}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_N & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \ldots & 0 \\ x_2 & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 \\ \vdots & & & x_1 \\ & & & \\ x_N & & & \vdots \\ 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_{N-1} \\ 0 & \ldots & 0 & x_N \end{bmatrix}.$$

Estimation empirique de la densité spectrale de puissance

Il s'agit du périodogramme sous ses différentes variantes, déjà vu au paragraphe VI.5.2 de [14].

II.2.3 Méthode des moindres carrés

Introduction

Historiquement, la méthode des moindres carrés est le premier outil d'estimation, revendiqué indépendamment par Gauss et Legendre au début du XIXe siècle [18]. Elle reste encore très utile et appréciée pour son caractère intuitif et le peu de concepts mathématiques et d'hypothèses qu'elle nécessite. En fait la méthode des moindres carrés reste la référence partout où elle est applicable : il est inutile de faire plus compliqué si la solution des moindres carrés donne déjà satisfaction.

Le cadre rendant applicable la méthode des moindres carrés est donné par l'équation I.3 :

$$\boldsymbol{z} = \varphi(\boldsymbol{p}^*) + \boldsymbol{b}. \tag{II.9}$$

Ce modèle de bruit additif (et indépendant de la valeur de $\boldsymbol{p}$) est fréquemment utilisé en traitement de données, en particulier lorsque $\varphi(\boldsymbol{p}^*)$ rassemble des équations issues de la physique et que $\boldsymbol{b}$ désigne les incertitudes et les erreurs commises lors de la mesure. On peut donner quelques exemples historiques : l'application des moindres carrés permit à Gauss de déterminer le coefficient d'ellipticité de la Terre (environ 1/300), les paramètres de la trajectoire d'Uranus à partir d'observations télescopiques, ainsi que, plus tard, les éléments des orbites des astéroïdes Cérès, Pallas, Junon et Vesta circulant entre Mars et Jupiter.

Moindres carrés (simples)

Dans la situation résumée par l'équation (II.9), il est logique de chercher un estimateur $\widehat{\boldsymbol{p}}$ « collant » au mieux aux données. La solution des moindres carrés simples fait intervenir la distance euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^N$: elle est obtenue en minimisant le *critère des moindres carrés simples*

$$J(\boldsymbol{p}) = \|\boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p})\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \big(z_n - \varphi_n(\boldsymbol{p})\big)^2, \tag{II.10}$$

c'est-à-dire

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{\text{MC}}(\boldsymbol{z}) = \arg\min_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p}). \tag{II.11}$$

En général, trouver $\widehat{\boldsymbol{p}}$ vérifiant (II.11) ne résulte pas de la simple inversion de l'équation vectorielle $\varphi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{z}$, comme on pourrait le penser naïvement au vu de la formulation (II.9)-(II.10). En effet, on a le plus souvent $N > M$, ce qui rend le système $\varphi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{z} = \varphi(\boldsymbol{p}^*) + \boldsymbol{b}$ en général incompatible (N équations pour M inconnues). Et paradoxalement, plus on possède de données, plus on s'écarte d'un système compatible ! Cette situation paradoxale préoccupait beaucoup les mathématiciens à la fin du XVIIIe siècle, et c'est dans ce contexte que Gauss utilisa pour la première fois le formalisme des moindres carrés (en 1795), alors que d'autres mathématiciens tels qu'Euler insistaient pour rendre compatibles les équations du système $\varphi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{z}$ par une méthode *ad hoc*.

Notons qu'en (II.10), l'existence de $\widehat{\boldsymbol{p}}$ est assurée dans tout compact de $\mathbb{R}^M$ par la positivité de $J(\boldsymbol{p})$, pourvu que φ soit continue, et dans tout sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^M$. En revanche l'unicité n'est pas garantie, même si φ est injective. Enfin, si φ est dérivable par rapport à $\boldsymbol{p}$, par condition nécessaire, on a

— ou bien l'annulation du gradient du critère au point $\widehat{\boldsymbol{p}}$, ce qui s'écrit

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^{\text{t}} \varphi(\boldsymbol{p}) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^{\text{t}} \boldsymbol{z} \text{ pour } \boldsymbol{p} = \widehat{\boldsymbol{p}}, \tag{II.12}$$

en notant $(\partial\varphi/\partial\boldsymbol{p})$ la matrice $N \times M$ des dérivées $\partial\varphi_n/\partial p_m$;

— ou bien $\widehat{\boldsymbol{p}}$ se trouve sur la frontière du domaine admissible si c'est un compact.

Le calcul effectif de $\widehat{\boldsymbol{p}}$ dépend évidemment de la forme de φ. Il est fréquent de ne pouvoir aboutir à une forme explicite. Dans ce cas on peut mettre en œuvre une méthode numérique de « descente » pour faire diminuer le critère des moindres carrés par itérations successives : algorithme du gradient, de Newton... mais en général, ces méthodes se contentent de fournir un extremum local, sans garantie d'optimisation globale. Le cas particulier d'une fonction φ linéaire est beaucoup plus favorable, puisqu'on dispose alors à la fois d'une forme explicite pour $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\text{MC}}$ (voir le chapitre III) et d'algorithmes économiques pour la calculer (voir les chapitres IV et V).

Exemple : sinusoïde noyée dans un bruit

Soit $2N + 1$ points d'une sinusoïde bruitée

$$z_n = a^* \cos(2\pi\nu^* n + \phi^*) + b_n,$$

de paramètres (a^*, ν^*, ϕ^*) inconnus ($a > 0$, $\nu \in [0, 1/2[$, $\phi \in [0, 2\pi[$). On cherche à estimer (a^*, ν^*, ϕ^*) en minimisant le critère des moindres carrés

$$J(a, \nu, \phi) = \sum_{n=1}^{N} \big(z_n - a\cos(2\pi\nu n + \phi)\big)^2.$$

Le résultat est classique : on commence par effectuer le changement de variable bijectif $a\cos\phi = \alpha, -a\sin\phi = \beta$. Le critère résultant

$$M(\alpha,\beta,\nu) = \sum_{n=1}^{N}(z_n - \alpha\cos 2\pi\nu n - \beta\sin 2\pi\nu n)^2$$

est linéaire en (α,β) à ν fixé. On peut donc exprimer $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{z},\nu)$ et $\widehat{\beta}(\boldsymbol{z},\nu)$ explicitement puis reporter dans M. On montre alors que le résultat vaut approximativement (pour N assez grand et ν au centre de l'intervalle $[0,1/2[$)

$$M(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{z},\nu),\,\widehat{\beta}(\boldsymbol{z},\nu),\,\nu) = \frac{-2}{2N+1}\Big|\sum_{n=-N}^{N} z_n e^{-2i\pi\nu n}\Big|^2,$$

qui est proportionnel au périodogramme simple des observations $z_{-N},\ldots,z_N$! Par conséquent on trouve la solution des moindres carrés en sélectionnant $\widehat{\nu}$ comme la fréquence qui maximise le périodogramme, puis en calculant $\widehat{a}$ et $\widehat{\phi}$ via $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{z},\nu)$ et $\widehat{\beta}(\boldsymbol{z},\nu)$.

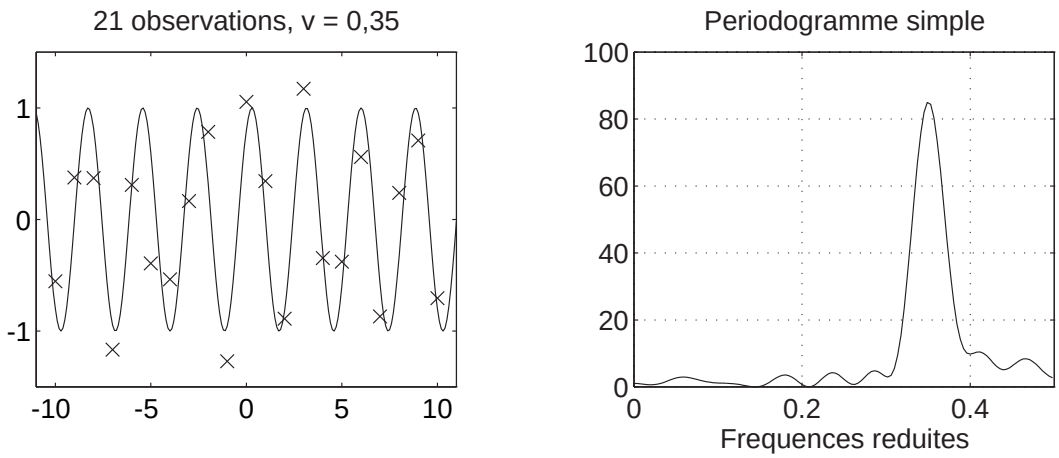

Fig. II.1. *Sinusoïde noyée dans du bruit*

Variantes

— Si le bruit possède une moyenne $\boldsymbol{m} = \mathrm{E}(\boldsymbol{B})$ connue et différente du vecteur nul, il est clair que cette moyenne induit une erreur systématique dans le critère des moindres carrés simples. Mais il est facile d'en corriger l'effet en remplaçant (II.10) par le critère modifié

$$J(\boldsymbol{p}) = \|\boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{m}\|^2 = \sum_{n=1}^{N}(z_n - \varphi_n(\boldsymbol{p}) - m_n)^2. \tag{II.13}$$

— Si le bruit est stationnaire d'ordre 1 et de moyenne $m = \mathrm{E}(B_k)$ inconnue, on peut encore appliquer la méthodologie des moindres carrés en ajoutant cette moyenne m au vecteur des paramètres à estimer. Il faut alors minimiser le critère

$$J(\boldsymbol{p},m) = \|\boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p}) - m\mathbf{1}\|^2$$

à la fois en $\boldsymbol{p}$ et en m. A $\boldsymbol{p}$ fixé, l'annulation de la dérivée par rapport à m donne

$$\widehat{m}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}) = \mathbf{1}^{\mathrm{t}}\,(\boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p}))/N,$$

qui correspond nécessairement à un minimum, ce qui permet de restituer un critère à minimiser en $\boldsymbol{p}$ seulement :

$$J(\boldsymbol{p}) = J(\boldsymbol{p}, \widehat{m}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{z})) = \left\| \boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p}) - \mathbf{1}^{\mathrm{t}} \left(\boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p}) \right) \mathbf{1}/N \right\|^2 . \tag{II.14}$$

Notons que, pour un bruit non stationnaire, il serait illusoire de considérer toutes les composantes de $\boldsymbol{m}$ comme autant de paramètres supplémentaires à estimer en minimisant (II.13) conjointement en $\boldsymbol{p}$ et en $\boldsymbol{m}$: il faudrait alors estimer $N+M$ paramètres pour seulement N données, et il est facile de voir que tout vecteur $\boldsymbol{p}$ associé à $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p})$ annule le critère des moindres carrés ! Cet exemple sort du cadre paramétrique pour lequel l'estimation non bayésienne est conçue.

— Il est parfois utile de remplacer la norme euclidienne canonique dans (II.10) et dans (II.13) par une norme dérivant d'un autre produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$. En général, on peut choisir une matrice définie positive quelconque Q, ou même une matrice définie non négative, et former un *critère des moindres carrés pondérés*

$$J_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{p}) = \left(\boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p}) \right)^{\mathrm{t}} \mathrm{Q} \left(\boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p}) \right) \geqslant 0. \tag{II.15}$$

Par exemple, le critère (II.14) obtenu indirectement s'avère du type (II.15), pour la matrice idempotente définie non négative $\mathrm{Q} = \mathrm{I} - (\mathbf{1}\,\mathbf{1}^{\mathrm{t}})/N$. Un autre cas fréquent résulte de l'utilisation d'une matrice Q diagonale mais non proportionnelle à l'identité ; (II.15) s'écrit alors

$$J_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{p}) = \sum_{n=1}^{N} q_{nn} (z_n - \varphi_n(\boldsymbol{p}))^2, \quad q_{nn} \geqslant 0,$$

ce qui permet de pondérer sélectivement l'adéquation à chacune des données. Si la qualité de la mesure est variable (mais connue), il est logique d'augmenter q_{nn} avec la fiabilité de la donnée z_n.

II.2.4 Maximum de vraisemblance

Définition

La vraisemblance a été définie au chapitre I. Elle peut servir de critère à maximiser, pour trouver le vecteur $\boldsymbol{p}$ le plus « vraisemblable » parmi toutes les valeurs possibles :

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{MV}}(\boldsymbol{z}) = \arg\max_{\boldsymbol{p}} L(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{z}) = \arg\max_{\boldsymbol{p}} \ln(L(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{z})). \tag{II.16}$$

Comme pour les moindres carrés, la solution n'est pas forcément unique mais il en existe au moins une dans tout compact de $\mathbb{R}^M$ pourvu que la loi conditionnelle de $(\boldsymbol{Z} \,|\, \boldsymbol{P})$ soit à densité $L(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{z}) = f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{p})$ continue en $\boldsymbol{p}$. L'existence est également assurée sur tout ensemble fini de $\mathbb{R}^M$.

Interprétation

Le maximum de vraisemblance est un cadre qui permet d'étendre la logique des moindres carrés à d'autres distances que la norme quadratique et à des modèles plus généraux que le modèle additif (II.9). La modélisation du vecteur de bruit comme un vecteur aléatoire et la manipulation d'une densité conditionnelle $f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{p})$ déduite de la densité du bruit $f_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{b})$ supposée connue sont le prix à payer pour obtenir cette généralisation.

Premier exemple : les moindres carrés

Montrons tout d'abord que la solution des moindres carrés est un cas particulier du maximum de vraisemblance : considérons le modèle additif (II.9) pour un vecteur de bruit $\boldsymbol{b}$ gaussien de moyenne $\boldsymbol{m_B}$ et de matrice de covariance centrée $\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}$. Exprimons dans ces conditions la log-vraisemblance[1] du vecteur $\boldsymbol{p}$:

$$\ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{p}) = \ln f_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{z}-\varphi(\boldsymbol{p}))\,\# \,-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\varphi(\boldsymbol{p})-\boldsymbol{m_B})^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,(\boldsymbol{z}-\varphi(\boldsymbol{p})-\boldsymbol{m_B}), \tag{II.17}$$

qui apparaît donc comme une forme définie négative qu'on peut interpréter comme l'opposé d'un critère des moindres carrés à minimiser. En particulier, un bruit gaussien blanc et centré restitue exactement le critère des moindres carrés simples.

Deuxième exemple : bruit laplacien

Conservons le modèle additif (II.9) mais calculons la log-vraisemblance du vecteur $\boldsymbol{p}$ sous hypothèse d'un bruit blanc centré laplacien, c'est-à-dire en supposant connue la densité de $\boldsymbol{B}$ sous la forme

$$f_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{b}) = \prod_{n=1}^{N} \frac{\alpha}{2}\exp(-\alpha|b_n|). \tag{II.18}$$

On trouve alors

$$\ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{p})\,\# \,-\alpha\sum_{n=1}^{N}|z_n-\varphi_n(\boldsymbol{p})|, \tag{II.19}$$

donc le maximum de vraisemblance dans ce contexte est un estimateur de moindres modules[2].

Troisième exemple : bruit gaussien multiplicatif

Montrons sur un exemple que le principe du maximum de vraisemblance peut aussi s'appliquer à d'autres modèles de perturbations que le bruit additif apparaissant en (II.9). Soit le modèle multiplicatif

$$z_n = \varphi_n(\boldsymbol{p}^*)\,b_n, \quad n = 1,\ldots,N, \tag{II.20}$$

utilisé en particulier pour modéliser la granularité des films photographiques en traitement d'image. Supposons que $\boldsymbol{b} = [b_1,\ldots,b_N]^{\mathrm{t}}$ est un vecteur gaussien blanc centré de variance σ^2. Alors

$$f_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{b}) = \prod_{n=1}^{N} f_B(b_n) = \prod_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\Big(-\frac{b_n^2}{2\sigma^2}\Big),$$

et l'on trouve

$$\ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{p}) = \sum_{n=1}^{N}\ln\frac{f_B(z_n\,|\,\varphi_n(\boldsymbol{p}))}{|\varphi_n(\boldsymbol{p})|} - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{z_n^2}{2\sigma^2\varphi_n^2(\boldsymbol{p})} + \ln|\varphi_n(\boldsymbol{p})|\right),$$

à minimiser en $\boldsymbol{p}$.

[1] Le dièse # sépare deux fonctions égales à une constante près

[2] On parle aussi d'estimateur en norme L^1

Propriétés

Sauf dans le cas linéaire (voir le chapitre III), à nombre d'échantillons fixé, le maximum de vraisemblance est en général biaisé et ne bénéficie d'aucune propriété particulière.

En revanche, sous certaines conditions portant sur la régularité de la log-vraisemblance $f_{Z|\boldsymbol{P}}(z\,|\,\boldsymbol{p})$ pour une observation scalaire z, on peut montrer pour un N-échantillon $z_1, \ldots, z_N$ de taille N croissante de loi $f_{Z|\boldsymbol{P}}(z\,|\,\boldsymbol{p}^*)$ qu'il existe une suite d'estimateurs $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{m}}(z_1, \ldots, z_N)$ convergeant presque sûrement vers $\boldsymbol{p}^*$, et que l'estimateur $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{m}}(z_1, \ldots, z_n)$ extrait de cette suite est asymptotiquement sans biais et efficace, c'est-à-dire atteint asymptotiquement la borne de Cramér-Rao (voir le chapitre I et [7] par exemple).

On peut donc retenir que le maximum de vraisemblance tire l'essentiel de ses qualités de son efficacité asymptotique. Si le nombre de données disponibles est important (par rapport au nombre de paramètres) et si le maximum de vraisemblance est calculable, il est certainement vain de rechercher un estimateur de meilleure qualité.

II.3 Estimation bayésienne

II.3.1 Principe

Comparaison avec l'estimation non bayésienne

En estimation bayésienne, on ne se repose pas sur un contraste favorable entre le nombre de données et le nombre de quantités à estimer. Au contraire, le nombre d'inconnues peut dépasser largement le nombre d'observations, et le bruit peut atteindre un niveau comparable à celui du signal « utile ». Mais on cherche à compenser la déficience des observations en structurant le vecteur $\boldsymbol{p}$ comme un vecteur aléatoire dont on suppose la loi connue. La modélisation aléatoire choisie privilégie *a priori* certaines réalisations plus probables que d'autres. C'est ensuite en confrontant l'*a priori* et les observations que l'on construit des estimateurs bayésiens. Le point de vue bayésien est explicitement discriminatoire, donc radicalement différent du point de vue précédent. En fait les deux démarches possèdent leur philosophie propre, leurs adeptes et leurs détracteurs, leurs qualités et leurs défauts. Considérons un problème d'estimation d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ de N points d'un signal inconnu à partir d'un vecteur de N observations bruitées $\boldsymbol{z}$.

— L'optique non bayésienne préconise de chercher un modèle déterministe paramétrique $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{p})$ pour le signal inconnu, faisant intervenir un petit nombre de paramètres dans $\boldsymbol{p}$, puis d'estimer ces paramètres.

— L'optique bayésienne consiste à traiter $\boldsymbol{x}$ comme la réalisation d'un vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$ dont on doit choisir la loi puis estimer la trajectoire la plus probable étant donné les observations.

Dans les deux cas, le bruit est supposé aléatoire et de loi connue.

Vraisemblance *a posteriori*

Tandis que la vraisemblance $f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{p})$ est l'outil central de l'estimation non bayésienne, l'estimation bayésienne fait intervenir également la loi *a priori*. Si cette loi est à densité $f_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p})$ ce que nous supposerons sauf mention contraire, on définit la *vraisemblance a posteriori* comme la densité conditionnelle

$$f_{\boldsymbol{P}|\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{z}) = \frac{f_{\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{z})}{f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})} = \frac{f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{p})\, f_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p})}{f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})}. \tag{II.21}$$

On rencontre également le cas d'un vecteur $\boldsymbol{p}$ à valeurs discrètes. La vraisemblance *a posteriori* est alors définie par la donnée des probabilités discrètes conditionnelles

$$P_{\boldsymbol{P}|\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{z}) = \frac{f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{p})}{f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})}\,P_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}). \tag{II.22}$$

Comme on le voit en (II.21), c'est la règle de Bayes qui permet de fusionner les deux sources d'information, la vraisemblance classique apportant l'information en provenance des données et la densité *a priori* apportant la structure aléatoire du vecteur $\boldsymbol{p}$.

Estimateurs bayésiens

Comment choisir la structure d'un estimateur bayésien ? Comme dans le cas non bayésien, les candidats sont nombreux et le choix n'est pas évident. En fait les aspects pratiques l'emportent souvent sur les considérations théoriques. Il est classique de relier le problème du choix d'une structure d'estimateur bayésien à la minimisation d'un coût moyen $\mathrm{E}(C(\widehat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{p}))$, faisant intervenir une fonction de coût $C(\widehat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{p})$ évaluant le prix d'une estimée $\widehat{\boldsymbol{p}}$ au lieu de $\boldsymbol{p}$. S'il est vrai que les estimateurs classiques présentés ci-dessous correspondent chacun à une fonction de coût particulière (qu'on signalera), le choix d'une fonction de coût s'avère plutôt moins intuitif que le choix de l'estimateur lui-même. Nous n'avons pas développé cet aspect formel du choix d'un estimateur bayésien, qui est peu utilisé en pratique.

II.3.2 Estimation en moyenne quadratique

Ce cadre est limité à des vecteurs aléatoires $\boldsymbol{Z}$ et $\boldsymbol{P}$ du second ordre, c'est-à-dire constitués de variables aléatoires dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Dans ce contexte, la projection orthogonale de $\boldsymbol{P}$ sur le sous-espace engendré par $\boldsymbol{Z}$ (voir IV.6.2 de [14]) est un estimateur naturel pour le vecteur $\boldsymbol{P}$ étant donné $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{z}$. Il s'agit de l'espérance conditionnelle

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{PM}}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{z}), \tag{II.23}$$

qui minimise le *risque quadratique moyen*

$$\mathrm{E}\left((\Psi(\boldsymbol{Z})-\boldsymbol{P})^{\mathrm{t}}\,(\Psi(\boldsymbol{Z})-\boldsymbol{P})\right)$$

composante par composante dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ (voir le paragraphe IV.6.3 de [14]). Dans le contexte de l'estimation, $\mathrm{E}(\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{z})$ est nommée *moyenne a posteriori* (ou « *Posterior Mean* » en anglais, d'où la notation $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{PM}}$). La fonction de coût associée est l'erreur quadratique $(\widehat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{z})-\boldsymbol{p})^{\mathrm{t}}(\widehat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{z})-\boldsymbol{p})$.

II.3.3 Estimation linéaire en moyenne quadratique

Essentiellement pour des raisons de facilité de calcul, on peut reprendre la formulation du paragraphe précédent en contraignant l'estimateur à une structure affine en fonction des observations. D'après le paragraphe IV.6.2 de [14], la structure ainsi obtenue s'interprète encore composante par composante comme un projecteur dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, sur le sous-espace de Hilbert des combinaisons affines des observations $\boldsymbol{Z}$.

Soit à minimiser le risque quadratique moyen

$$\begin{aligned} R &= \mathrm{E}\big((\Psi(\boldsymbol{Z})-\boldsymbol{P})^{\mathrm{t}}\,(\Psi(\boldsymbol{Z})-\boldsymbol{P})\big) && \text{(II.24)}\\ &= \mathrm{tr}\left(\mathrm{E}\left((\Psi(\boldsymbol{Z})-\boldsymbol{P})\,(\Psi(\boldsymbol{Z})-\boldsymbol{P})^{\mathrm{t}}\right)\right) && \text{(II.25)} \end{aligned}$$

sur les structures affines $\Psi(\boldsymbol{Z}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{c}$. Pour de telles structures, le risque moyen prend la forme

$$R = \mathrm{tr}\Big((\boldsymbol{c} + \mathrm{A}\,\boldsymbol{m_Z} - \boldsymbol{m_P})\,(\boldsymbol{c} + \mathrm{A}\,\boldsymbol{m_Z} - \boldsymbol{m_P})^{\mathrm{t}} + \mathrm{A}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}\,\mathrm{A}^{\mathrm{t}} + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}} - \mathrm{A}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{ZP}} - \mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{A}^{\mathrm{t}}\Big),$$

en notant $\boldsymbol{m_P} = \mathrm{E}(\boldsymbol{P}), \boldsymbol{m_Z} = \mathrm{E}(\boldsymbol{Z})$ les espérances, $\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}, \mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}$ les matrices de covariance centrées et $\mathrm{R}_{\boldsymbol{ZP}}$ la matrice d'intercorrélation de $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Z}$. Le minimum du risque est donc obtenu quand $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{m_P} - \mathrm{A}\boldsymbol{m_Z}$, et on peut alors l'exprimer sous la forme

$$R = \mathrm{tr}\Big((\mathrm{A}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}} - \mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}})\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,(\mathrm{A}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}} - \mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}})^{\mathrm{t}} + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}} - \mathrm{R}_{\boldsymbol{ZP}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{ZP}}^{\mathrm{t}}\Big),$$

qui permet de déduire $\mathrm{AR}_{\boldsymbol{Z}} - \mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}} = 0$, donc $\mathrm{A} = \mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}$ sous réserve que $\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}$ soit inversible, c'est-à-dire que les observations soient des variables aléatoires linéairement indépendantes dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dans ces conditions, l'estimée linéaire d'erreur moyenne quadratique minimale (ELMQ) s'écrit finalement

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{ELMQ}}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m_Z}) + \boldsymbol{m_P}. \tag{II.26}$$

Le risque moyen minimum associé vaut

$$R = \mathrm{tr}(\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}} - \mathrm{R}_{\boldsymbol{ZP}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{ZP}}^{\mathrm{t}}),$$

c'est-à-dire la trace de la matrice de covariance d'erreur moyenne

$$\mathrm{R}_{\mathrm{ELMQ}} = \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}} - \mathrm{R}_{\boldsymbol{ZP}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{ZP}}^{\mathrm{t}}.$$

On peut remarquer que ces expressions ne font intervenir que des caractéristiques à l'ordre deux du couple de vecteurs aléatoires $(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{P})$. D'autre part ce résultat est à rapprocher de l'expression (IV.18) de [14] concernant l'espérance conditionnelle pour un couple de vecteurs gaussiens. Les deux résultats sont formellement identiques : ELMQ et moyenne *a posteriori* se confondent pour un couple de vecteurs aléatoires $(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{P})$ conjointement gaussiens.

II.3.4 Maximum *a posteriori*

L'estimation au sens du maximum *a posteriori* (MAP) consiste à rechercher la valeur « la plus probable » du vecteur des paramètres compte tenu des observations en maximisant la vraisemblance *a posteriori*. On montre que la fonction de coût associée au MAP est la fonction de Kronecker $\delta(\widehat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{p})$.

Comme $f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})$ est une constante dans (II.21), on obtient le MAP en maximisant le critère

$$J(\boldsymbol{p}) = \ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{p}) + \ln f_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}).$$

Le premier terme de ce critère n'est autre que la log-vraisemblance et le deuxième terme permet de tenir compte de l'information *a priori* sur les variations des paramètres. L'estimateur du maximum de vraisemblance peut être considéré comme un cas limite d'estimation au sens du maximum *a posteriori* en prenant pour $f_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p})$ une loi uniforme.

Pour finir, revenons à la structure simple d'un bruit additionnel (II.9) et supposons à nouveau que le vecteur de bruit $\boldsymbol{b}$ est gaussien de moyenne $\boldsymbol{m_B}$ et de matrice de covariance centrée $\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}$. Supposons aussi que le vecteur des paramètres $\boldsymbol{p}$ est gaussien de moyenne $\boldsymbol{m_P}$ et de matrice de covariance centrée $\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}$. Alors $J(\boldsymbol{p})$ s'écrit à une constante près

$$J(\boldsymbol{p})\,\# \,-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{m_B})^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,(\boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{m_B}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{m_P})^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{m_P}), \tag{II.27}$$

qui n'est autre qu'une nouvelle variante des moindres carrés, dans laquelle apparaît un terme de « rappel » de $\boldsymbol{p}$ vers sa moyenne *a priori* $\boldsymbol{m_P}$: on parle alors de *moindres carrés régularisés*.

Chapitre III

Forme compacte des estimateurs linéaires

III.1 Introduction

L'hypothèse de structure linéaire du modèle et bruit additif est fréquemment utilisée dans la pratique car elle constitue une approximation convenable d'un grand nombre de problématiques physiques et, surtout, elle permet d'obtenir des expressions linéaires pour certains des estimateurs vus au chapitre II. Nous verrons que l'utilisation d'estimateurs linéaires[1] correspond non seulement à un modèle linéaire mais aussi à un choix concernant la description statistique du problème, qui est limitée aux caractéristiques du premier et second ordre, ou, de manière équivalente, à des lois gaussiennes.

D'un point de vue pratique, il est possible de calculer les estimateurs linéaires avec des algorithmes efficaces, qui feront l'objet des chapitres suivants.

Mais le cadre modèle linéaire – estimateur linéaire a aussi une grande importance théorique, qui en font un cadre de référence en estimation. Sa simplicité permet en effet d'étudier les propriétés des différents estimateurs, les liens qui existent entre eux et de mettre en évidence leurs paramètres de réglages. Au-delà, il permet de caractériser le problème d'estimation lui-même et, par exemple, de juger de sa difficulté *a priori*.

Ce chapitre présente des résultats généraux sur ces aspects théoriques.

III.2 Position du problème

Dans la suite, $\boldsymbol{z}$ désigne le vecteur des observations de dimension N et $\boldsymbol{p}$ le vecteur des paramètres à estimer de dimension M. Les hypothèses de structure linéaire sur le modèle et de bruit additif reviennent à exprimer les observations sous la forme

$$\boldsymbol{z} = \mathrm{H}\,\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b} \tag{III.1}$$

où H est une matrice $N \times M$ de composantes connues et $\boldsymbol{b}$ est le vecteur de bruit. La description statistique du bruit est limitée à ses caractéristiques au second ordre : moyenne $\boldsymbol{m_B}$ et de matrice de covariance $\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}$. Dans la suite, on supposera fréquemment que le bruit suit la loi gaussienne de moyenne $\boldsymbol{m_B}$ et de matrice de covariance $\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}$, ce qui définit entièrement la vraisemblance

$$L(\boldsymbol{p};\boldsymbol{z}) = f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{p}) \,\#\, \exp\Big(-\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{z} - \mathrm{H}\,\boldsymbol{p} - \boldsymbol{m_B})^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,(\boldsymbol{z} - \mathrm{H}\,\boldsymbol{p} - \boldsymbol{m_B})\Big) \tag{III.2}$$

[1] Par estimateur linéaire, nous désignerons des estimateurs définis comme des fonctions affines des données.

Dans le cas bayésien, on associe également au vecteur des paramètres $\boldsymbol{p}$ une densité *a priori*, qu'on suppose gaussienne de moyenne $\boldsymbol{m_P}$ et de matrice de covariance $\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}$, ce qui définit entièrement la vraisemblance *a posteriori*.

III.2.1 Exemples

Identification de réponse impulsionnelle

On cherche à identifier un système inconnu supposé linéaire et à réponse impulsionnelle finie. L'équation de convolution discrète pour une entrée x_k s'écrit

$$z_k = \sum_{i=0}^{M-1} h_i \, x_{k-i} + b_k$$

où z_k et b_k représentent respectivement la sortie du système et le bruit additif à l'instant k, et $\boldsymbol{h} = [h_0, \ldots, h_{M-1}]^{\mathrm{t}}$ est le vecteur des paramètres à estimer, formé des coefficients non nuls de la réponse impulsionnelle. En définissant également $\boldsymbol{x}_k = [x_k, \ldots, x_{k-M-1}]^{\mathrm{t}}$, l'équation de sortie précédente s'écrit

$$z_k = \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{t}} \, \boldsymbol{h} + b_k.$$

Si l'on dispose de N observations de la sortie du système et des $N + M - 1$ valeurs de l'entrée, on obtient une équation linéaire en les paramètres

$$\boldsymbol{z} = \mathrm{X} \, \boldsymbol{h} + \boldsymbol{b}$$

où X est la matrice $N \times M$ dont la k^{e} ligne est $\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{t}}$. L'hypothèse gaussienne peut s'appliquer au bruit et il est possible d'en traduire le caractère corrélé en introduisant une matrice de covariance non diagonale.

Prédiction linéaire

On considère d'identification de filtre similaire au précédent, mais pour un filtre tous pôles, écrit sous forme récursive :

$$x_n + \sum_{i=1}^{M} a_i \, x_{n-i} = b_n.$$

Le modèle précédent est linéaire en les paramètres $a_i, i = 1, \ldots, M$. Leur estimation peut se faire en supposant l'entrée b_n blanche gaussienne réduite, ce qui conduit au critère des moindres carrés :

$$\sum_n (x_n - \sum_{i=1}^{M} a_i \, x_{n-i})^2.$$

Ce critère s'interprète comme une erreur de *prédiction linéaire* de x_n par les M échantillons du passé $x_{n-1}, \ldots, x_{n-M}$. Nous reviendrons en détail sur ce concept dans le chapitre IV.

Restauration de signal

Ce problème est le « problème dual » de celui de l'identification d'une réponse impulsionnelle. On cherche à présent à reconstituer l'entrée d'un système linéaire connaissant sa réponse impulsionnelle et sa sortie bruitée. L'équation de convolution est donc identique

$$z_k = \sum_{i=0}^{M-1} h_i \, x_{k-i} + b_k.$$

mais les paramètres recherchés sont les échantillons du signal x_k. On suppose que l'on dispose de N observations $z_1, \ldots, z_N$ de la sortie. On définit le vecteur des paramètres à estimer $\boldsymbol{p} = [x_{-M+2}, \ldots, x_{N-1}, x_{N-2}]^{\mathrm{t}}$ et le vecteur de régression

$$\boldsymbol{h}_k = [0, \ldots, 0, h_{M-1}, \ldots, h_0, 0, \ldots, 0]^{\mathrm{t}},$$

de façon à pouvoir écrire

$$z_k = \boldsymbol{h}_k^{\mathrm{t}} \boldsymbol{p} + b_k$$

et donc, pour les N observations, on obtient le modèle linéaire

$$\boldsymbol{z} = \mathrm{H}\,\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b},$$

ce qui rentre bien dans le cadre des hypothèses de ce chapitre. Cependant, il faut noter que le problème est indéterminé, puisque le vecteur des paramètres à estimer est de dimension $N + M - 1$ alors que le vecteur d'observations n'est que de dimension N. On se trouve dans un cas où il est indispensable d'introduire un *a priori* sur la solution recherchée car la solution obtenue en exploitant uniquement la structure des phénomènes ne peut conduire qu'à des résultats décevants. Dans ce cours, cet *a priori* est introduit par la définition d'une loi de probabilité gaussienne sur $\boldsymbol{p}$. Dans le cas présent, cela revient à postuler une loi gaussienne sur le signal $\{X_k\}$, qui permet de traduire le caractère plus ou moins régulier du signal $\{x_k\}$ *a priori*.

III.3 Estimateurs non bayésiens

Reprenant la notation du chapitre I, nous notons dans cette section $\boldsymbol{p}^*$ la vraie valeur du paramètre, que l'on cherche à estimer.

III.3.1 Maximum de vraisemblance gaussien

L'estimateur du maximum de vraisemblance, déjà présenté en II.2.4, est défini pour un bruit gaussien par l'argument du maximum de la vraisemblance (III.2). De manière équivalente, c'est aussi l'argument du minimum du critère

$$J(\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{z} - \mathrm{H}\,\boldsymbol{p} - \boldsymbol{m_B})^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,(\boldsymbol{z} - \mathrm{H}\,\boldsymbol{p} - \boldsymbol{m_B}). \tag{III.3}$$

Le gradient de J par rapport à $\boldsymbol{p}$ est égal à

$$-2\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,(\boldsymbol{z} - \mathrm{H}\,\boldsymbol{p} - \boldsymbol{m_B}),$$

dont l'annulation nous donne l'équation que doit satisfaire $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{m}}$:

$$\boxed{(\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H})\,\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{m}} = \mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m_B}).} \tag{III.4}$$

L'obtention de ce type d'équation $\mathrm{A}\widehat{\boldsymbol{p}} = \mathrm{B}\,\boldsymbol{z} + \boldsymbol{c}$ (où A est une matrice symétrique définie non négative) est caractéristique des problèmes d'estimation linéaire. Elle est appelée *équation normale* du problème, et la matrice A est la *matrice normale* associée.

Si la matrice normale $\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H}$ est inversible, le problème admet une solution unique au sens du maximum de vraisemblance :

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{m}} = (\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H})^{-1}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m_B}). \tag{III.5}$$

Dans le cas où le bruit est gaussien réduit (blanc centré de variance unité) (III.5) se simplifie pour donner

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{m}} = (\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H})^{-1}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{z}. \tag{III.6}$$

Calcul du biais

Le biais s'exprime sous la forme

$$\boldsymbol{b}_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{p}^*) = \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{m}} - \boldsymbol{p}^*). \tag{III.7}$$

on calcule facilement

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{p}^*) &= \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}\left((\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H})^{-1}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{B}}) - \mathrm{H}\,\boldsymbol{p}^*\right) \\ &= (\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H})^{-1}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{E}_{\boldsymbol{B}}(\mathrm{H}\,\boldsymbol{p}^* + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{B}} - \mathrm{H}\,\boldsymbol{p}^*) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{III.8}$$

Matrice de covariance de l'estimateur

En utilisant (III.5), la covariance de l'estimateur $\mathrm{V}_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{p}^*)$ s'exprime sous la forme

$$\mathrm{E}\left((\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{m}} - \boldsymbol{p}^*)(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{m}} - \boldsymbol{p}^*)^{\mathrm{t}}\right) = \mathrm{E}\left((\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H})^{-1}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{B}})\,(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{B}})^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H}\,(\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H})^{-1}\right)$$

en exploitant le fait que $\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}$ et $(\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H})^{-1}$ sont des matrices symétriques, on obtient

$$\mathrm{V}_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{p}^*) = (\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H})^{-1}. \tag{III.9}$$

La matrice de covariance est indépendante de la vraie valeur du paramètre $\boldsymbol{p}^*$ et égale à l'inverse de la matrice normale.

Dans le cas où le bruit est blanc d'écart-type $\sigma_{\boldsymbol{B}}$, la variance s'écrit

$$\mathrm{V}_{\mathbf{m}} = \sigma_{\boldsymbol{B}}^2\,(\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H})^{-1}. \tag{III.10}$$

Pour déterminer l'efficacité de cet estimateur non biaisé, il faut comparer sa matrice de covariance à la matrice inverse de la matrice d'information de Fisher. Rappelons que cette matrice, définie au chapitre I, vaut

$$\mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}^*) = \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}\left(\frac{\partial \ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial \ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}}{\partial \boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}}\,|\,\boldsymbol{p}^*\right).$$

En utilisant

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \ln f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}^*}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,(\boldsymbol{z} - \mathrm{H}\,\boldsymbol{p}^* - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{B}}),$$

on obtient

$$\mathrm{F}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}} = \mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H} = \mathrm{V}_{\mathbf{m}}. \tag{III.11}$$

ce qui nous conduit au résultat suivant :

> Dans le cas linéaire gaussien, l'estimateur du maximum de vraisemblance est non biaisé et de variance minimale, c'est-à-dire *efficace*.

III.3.2 Autres estimateurs

L'estimateur des moindres carrés pondérés en fonction des informations disponibles sur le bruit (moyenne et matrice de covariance), minimise précisément le critère (III.3) et est donc confondu avec le maximum de vraisemblance gaussien.

Un autre estimateur souvent présenté dans la littérature est l'estimateur linéaire non biaisé à variance minimale. Nous venons de voir que le maximum de vraisemblance sous hypothèse gaussienne possédait ces propriétés. Dans le cadre traité ici, il est facile de voir que ces propriétés définissent de manière unique l'estimateur, comme la solution de l'équation normale (III.4). Autrement dit, l'estimateur linéaire non biaisé à variance minimale est confondu avec l'estimateur du maximum de vraisemblance.

III.4 Estimateurs bayésiens

Comme dans le cas des estimateurs non bayésiens, les estimateurs bayésiens dans le cadre linéaire (et connaissant les caractéristiques au second ordre *a priori* du paramètre $\boldsymbol{P}$ et celles du bruit) sont tous confondus[2]. Ce résultat fait l'objet du *théorème de Gauss-Markov* ci-dessous, c'est la raison pour laquelle on note $\boldsymbol{p}_{\mathrm{GM}}$ l'estimateur ainsi caractérisé.

III.4.1 Théorème de Gauss-Markov

Soit l'estimateur :

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}} = \mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Z}}) + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}} \\ \mathrm{R}_{\mathrm{GM}} = \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}} - \mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{ZP}}, \end{cases} \tag{III.12}$$

où $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Z}} = \mathrm{E}(\boldsymbol{Z})$, et $\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}$ et $\mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}$ désignent respectivement la matrice de covariance centrée de $\boldsymbol{Z}$ (supposée inversible) et la matrice d'intercorrélation de $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Z}$ (on a $\mathrm{R}_{\boldsymbol{ZP}} = \mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}^{\mathrm{t}}$).

(i) L'estimateur $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}}$ possède un biais moyen nul et une matrice de covariance d'erreur égale à R_{GM} :

$$\begin{cases} \mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}} - \boldsymbol{P}) = 0 \\ \mathrm{E}((\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}} - \boldsymbol{P})\,(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}} - \boldsymbol{P})^{\mathrm{t}}) = \mathrm{R}_{\mathrm{GM}} \end{cases} \tag{III.13}$$

(ii) On a l'identité :

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{ELMQ}} = \widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}}, \tag{III.14}$$

c'est-à-dire que $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}}$ minimise le risque quadratique moyen parmi les estimateurs de structure affine. La valeur minimale correspondante est $\mathrm{tr}\,(\mathrm{R}_{\mathrm{GM}})$.

(iii) Si de plus $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Z}$ sont conjointement gaussiens, alors la loi *a posteriori* $P_{\boldsymbol{P}|\boldsymbol{Z}}$ est gaussienne de moyenne $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}}$ et de covariance R_{GM} :

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{MAP}} = \widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{PM}} = \widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}} \\ \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}|\boldsymbol{Z}} = \mathrm{R}_{\mathrm{GM}} \end{cases} \tag{III.15}$$

Démonstration

(i) $\mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}} - \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}} - \boldsymbol{P}$, donc $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}}$ est biaisé mais son biais moyen est nul. Pour trouver sa covariance d'erreur, vérifions d'abord que $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}}$ et $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}} - \boldsymbol{P}$ sont orthogonaux :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}}\,(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}} - \boldsymbol{P})^{\mathrm{t}}) &= \mathrm{E}((\mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Z}}) + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}})\,(\mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Z}}) + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}} - \boldsymbol{P})^{\mathrm{t}}) \\ &= \mathrm{E}\left(\mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Z}})\,(\mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Z}}) + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}} - \boldsymbol{P})^{\mathrm{t}}\right) \\ &= \mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{ZP}} - \mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{ZP}} = 0. \end{aligned}$$

(En partant de la propriété *(ii)*, on aurait pu éviter ce calcul en déduisant l'orthogonalité comme conséquence directe).

Finalement, la covariance d'erreur s'écrit

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left((\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}} - \boldsymbol{P})\,(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}} - \boldsymbol{P})^{\mathrm{t}}\right) &= -\mathrm{E}\left((\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}} - \boldsymbol{P})\,\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}\right) \\ &= -\mathrm{E}\left((\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}} - \boldsymbol{P})\,(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}})^{\mathrm{t}}\right) \\ &= -\mathrm{E}\left((\mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Z}}) + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}} - \boldsymbol{P})\,(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}})^{\mathrm{t}}\right) \\ &= -\mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{ZP}} + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}} \\ &= \mathrm{R}_{\mathrm{GM}}. \end{aligned}$$

[2] ce qui n'est pas toujours apparent dans la littérature

(ii) Cette propriété a été démontrée dans le chapitre II (§II.3.2).

(iii) Si $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Z}$ sont conjointement gaussiens, alors la loi $P_{\boldsymbol{P}|\boldsymbol{Z}}$ est gaussienne. Sa densité est proportionnelle à

$$\exp\Big(-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{p}-\mathrm{E}_{\boldsymbol{P}|\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{P})\right)^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}|\boldsymbol{Z}}^{-1}\,\left(\boldsymbol{p}-\mathrm{E}_{\boldsymbol{P}|\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{P})\right)\Big),$$

où les expressions de $\mathrm{E}_{\boldsymbol{P}|\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{P})$ et de $\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}|\boldsymbol{Z}}$ ont été données dans la première partie du cours [14], (IV.19) et (IV.20), à établir à titre d'exercice. Il s'agit bien des expressions de $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}}$ et de R_{GM} (III.12). De plus il est facile de constater que le maximum d'une densité gaussienne est atteint en sa valeur moyenne. Dans le cas de la loi $P_{\boldsymbol{P}|\boldsymbol{Z}}$, cette propriété s'écrit précisément $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{MAP}}=\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{PM}}$, c'est-à-dire que maximum *a posteriori* et moyenne *a posteriori* se confondent.

III.4.2 Application

Forme covariance

Particularisons les résultats précédents au cas de l'équation (III.1) d'observation linéaire

$$\boldsymbol{z}=\mathrm{H}\,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}.$$

En exploitant la structure linéaire du modèle, $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Z}}=\mathrm{E}(\boldsymbol{Z})$ s'exprime sous la forme

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{Z})=\mathrm{E}(\mathrm{H}\,\boldsymbol{P}+\boldsymbol{B})=\mathrm{H}\,\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}}$$

si le bruit est centré. De plus

$$\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}=\mathrm{E}\left((\mathrm{H}\,(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}})+\boldsymbol{B})\,(\mathrm{H}\,(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}})+\boldsymbol{B})^{\mathrm{t}}\right)=\mathrm{H}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}+\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}},$$

et, en supposant que $\boldsymbol{B}$ est décorrélé de $\boldsymbol{P}$:

$$\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}}=\mathrm{E}\left((\boldsymbol{P}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}})\,(\mathrm{H}\,(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}})+\boldsymbol{B})^{\mathrm{t}}\right)=\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}.$$

On obtient ainsi :

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}}=\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}}+\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,(\mathrm{H}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}+\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}})^{-1}(\boldsymbol{z}-\mathrm{H}\,\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}}),\tag{III.16}$$

ou, dans le cas plus général d'un bruit non centré,

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}}=\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}}+\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,(\mathrm{H}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}+\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}})^{-1}\,(\boldsymbol{z}-\mathrm{H}\,\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{B}}),}\tag{III.17}$$

qui constitue l'expression de $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}}$ sous sa *forme covariance* (par référence à l'expression de $\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}=\mathrm{H}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}+\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}$ qu'elle contient).

On peut former également la matrice de covariance R_{GM} associée :

$$\boxed{\mathrm{R}_{\mathrm{GM}}=\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}-\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,(\mathrm{H}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}+\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}})^{-1}\,\mathrm{H}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}},}\tag{III.18}$$

et remarquer que cette matrice de covariance *a posteriori* est « inférieure » à la covariance *a priori* $\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}$, au sens où la différence $\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}-\mathrm{R}_{\mathrm{GM}}$ est une matrice définie non négative. Cette réduction de variance traduit l'effet informatif du vecteur de données $\boldsymbol{Z}$.

Forme information

L'obtention de la forme dite « information » utilise le résultat suivant, dont la vérification est immédiate :

Lemme d'inversion de matrice (Lemme de Schur)

Soient A et C deux matrices carrées régulières et B et D deux matrices quelconques dont les dimensions sont telles que $\dim(\mathrm{A}) = \dim(\mathrm{B\,C\,D})$. Si $(\mathrm{A} + \mathrm{B\,C\,D})$ est une matrice régulière alors $(\mathrm{C}^{-1} + \mathrm{D\,A}^{-1}\,\mathrm{B})$ est une matrice régulière, et

$$(\mathrm{A} + \mathrm{B\,C\,D})^{-1} = \mathrm{A}^{-1} - \mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{B}\,(\mathrm{C}^{-1} + \mathrm{D\,A}^{-1}\,\mathrm{B})^{-1}\,\mathrm{D\,A}^{-1}. \tag{III.19}$$

En appliquant le lemme d'inversion à $\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}$, on obtient

$$\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1} = \mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1} - \mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H}\,(\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H} + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1})^{-1}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}$$

puis

$$\mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1} = \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1} - \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H}\,(\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H} + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1})^{-1}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}.$$

En remarquant de plus que

$$\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}\,(\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H} + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1}) = \mathrm{I} + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H},$$

donc que

$$\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}} = (\mathrm{I} + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H})\,(\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H} + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1})^{-1},$$

on obtient

$$\mathrm{R}_{\boldsymbol{PZ}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{Z}}^{-1} = (\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H} + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1})^{-1}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1},$$

ce qui permet d'obtenir de nouvelles expressions de $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}}$, dites *forme information*, par référence à la matrice normale

$$\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H} + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1},$$

qui est précisément la matrice d'information de Fisher moyenne du problème :

$$\boxed{\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM}} &= \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}} + (\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H} + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1})^{-1}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,(\boldsymbol{z} - \mathrm{H}\,\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}} - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{B}}) \\ &= (\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H} + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1})^{-1}\,(\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1})\,(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{B}}) + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1}\,\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{P}}. \end{aligned}} \tag{III.20}$$

La comparaison de cette dernière expression avec l'expression (III.4) de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{m}}$ est instructive : on obtient formellement cette dernière en « annulant » $\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1}$, ce qui peut paraître surprenant. Cette manipulation formelle est pourtant conforme à l'intuition : elle signifie qu'un estimateur bayésien dont la covariance *a priori* tend vers l'infini tend vers l'estimateur non bayésien construit sans *a priori*.

III.5 Comparaisons entre estimateurs

III.5.1 Synthèse des résultats

L'ensemble des estimateurs étudiés se résume sous l'hypothèse linéaire et gaussienne à un estimateur non bayésien et un estimateur bayésien. Tous deux peuvent s'exprimer de façon explicite en fonction des observations et présentent de plus une même structure linéaire en fonction de $\boldsymbol{z}$.

Sous l'hypothèse linéaire et gaussienne, l'estimateur du maximum de vraisemblance est à variance minimale. Cet estimateur nécessite de connaître la loi complète du bruit c'est-à-dire, dans le cas gaussien, les moments jusqu'à l'ordre deux. L'équation normale associée à l'estimateur du maximum de vraisemblance est identique à celle obtenue pour les moindres carrés pondérés si on choisit comme matrice de pondération la matrice inverse de la matrice de covariance du bruit. L'estimateur obtenu est efficace (non biaisé et à variance minimale).

Dans le cas des estimateurs bayésiens, l'hypothèse linéaire et gaussienne permet d'obtenir une forme identique pour les estimateurs du maximum *a posteriori*, d'erreur quadratique moyenne minimale et linéaire d'erreur quadratique moyenne minimale. Ces estimateurs nécessitent de connaître la loi *a priori* sur $\boldsymbol{p}$ et sur le bruit, ce qui dans l'hypothèse gaussienne, signifie qu'il faut disposer des moments d'ordre deux pour ces deux lois.

D'un point de vue algorithmique, les deux estimateurs obtenus sont solutions d'une équation normale de la forme

$$\mathrm{A}\,\widehat{\boldsymbol{p}} = \mathrm{B}\,\boldsymbol{z} + \boldsymbol{c}. \tag{III.21}$$

La résolution de cette équation nécessite l'inversion directe ou récursive de la matrice normale du problème. Plusieurs facteurs interviennent pour l'élaboration de méthodes adaptées à ce problème. Tout d'abord, le nombre de données et/ou le nombre de paramètres peut être important. D'autre part, en traitement du signal, des contraintes de temps réel peuvent jouer dans un certain nombre d'applications. C'est pourquoi nous présenterons dans les chapitres IV à VI des méthodes récursives d'inversion de l'équation normale qui possèdent le double avantage d'être adaptées au temps réel et de pouvoir traiter un nombre important de données sans nécessairement les conserver en mémoire.

III.5.2 Choix de l'estimateur

Compte tenu des remarques précédentes, le choix d'un estimateur adapté au problème posé ne peut s'effectuer dans le cas linéaire gaussien à l'aide de considérations pratiques de mise en œuvre numérique des méthodes. En effet, les expressions obtenues sont de complexité similaire et un algorithme permettant d'inverser l'équation normale de l' estimateur du maximum de vraisemblance permettra de calculer l'estimateur au sens du maximum *a posteriori*.

Si l'on dispose de la moyenne et de la matrice de covariance *a priori* du vecteur des paramètres, l'estimateur bayésien doit être utilisé puisqu'il tient compte (de manière optimale) de ces informations.

Dans beaucoup de cas pratiques la loi *a priori* est inconnue. Dans ce cas, l'estimateur non bayésien semble s'imposer puisqu'il n'utilise que des informations sur la loi du bruit (qui est supposée connue). L'estimateur bayésien qui est biaisé et dont le biais moyen n'est pas forcément nul, puisque le choix de la loi *a priori* sera arbitraire, apparaît sous-optimal. Deux remarques viennent modérer ces jugements.

En premier lieu, le choix d'un estimateur biaisé peut améliorer la performance en termes d'erreur quadratique moyenne. En fait, on montre dans le cas linéaire qu'un léger biais de l'estimateur permet *toujours* de gagner sur l'erreur quadratique moyenne : ce résultat fait l'objet de l'annexe A du présent chapitre.

Ensuite, beaucoup de problèmes d'estimation réels correspondent à une situation difficile pour laquelle la performance de l'estimateur non bayésien est très mauvaise, voire au cas où cet estimateur n'est pas calculable parce que la matrice normale est singulière. On peut alors avoir recours à un estimateur bayésien qui peut permettre d'améliorer très sensiblement la qualité de l'estimation avec un choix « raisonnable » de la loi *a priori* (c'est-à-dire, puisque nous nous plaçons dans le cas gaussien, de ses deux premiers moments) . Intuitivement, les paramètres qui révèlent la difficulté du problème d'estimation sont les suivants :

— les dimensions respectives des observations et du vecteur des paramètres. Ce point a déjà été évoqué précédemment. Si $\boldsymbol{p}$ a une dimension supérieure à celle de $\boldsymbol{z}$, le système linéaire est sous-déterminé et les procédures d'estimation non bayésiennes sont inadéquates.

— Le rapport *signal à bruit*, c'est-à-dire le rapport entre la puissance des observations non bruitées $\mathrm{H}\boldsymbol{p}$ et la puissance du bruit $\boldsymbol{b}$. Plus celui-ci est faible, plus la situation est difficile. Cependant, les ordres de grandeur tolérables varient en fonction de l'application.

— Le contenu informatif des observations. Ce dernier facteur dépend du bruit mais également de la matrice H.

Dans la pratique, il s'avère difficile d'évaluer l'importance respective de ces trois facteurs. L'expérience joue dans ce domaine un grand rôle. La section suivante donne une quantification plus précise de ces différents facteurs et montre le rôle des paramètres de la loi *a priori* dans l'amélioration de la performance d'estimation.

III.5.3 Comparaison algébrique

Singularité de la matrice normale

Il est nécessaire de s'interroger en premier lieu sur l'existence d'une solution de l'équation III.21 en particulier dans le cas où la matrice A est singulière. Dans ce cas, le système d'équations défini par l'équation normale admet soit aucune soit une infinité de solutions. L'analyse de l'évolution des critères quadratiques en $\boldsymbol{p}$ qui ont conduit à l'obtention de l'équation normale montre que ces critères définissent soit un extremum unique soit une infinité d'extrema dans les cas dégénérés. Nous sommes donc assurés qu'il existe toujours au moins une solution de l'équation normale, mais il reste, dans le cas où cette solution n'est pas unique, à sélectionner une solution particulière de l'équation normale et des considérations physiques conduisent fréquemment à choisir celle dont la norme est la plus faible.

La matrice A étant symétrique réelle, son noyau et son image sont deux sous-espaces vectoriels complémentaires et orthogonaux de $\mathbb{R}^M$ (M est la dimension du vecteur des paramètres $\boldsymbol{p}$). Toute solution de l'équation normale peut donc être décomposée sous la forme d'une somme d'un vecteur $\boldsymbol{p}_{\mathrm{KerA}}$ appartenant au noyau de A et d'un vecteur $\boldsymbol{p}_{\mathrm{ImA}}$ appartenant à l'image de A. Le vecteur $\boldsymbol{p}_{\mathrm{ImA}}$ est donc l'estimée de norme minimale. D'un point de vue géométrique, la solution unique et de norme minimale lorsque A est singulière est donc la projection de $\widehat{\boldsymbol{p}}$ sur le sous-espace image de A. Ceci correspond à calculer $\widehat{\boldsymbol{p}}$ par

$$\widehat{\boldsymbol{p}} = \mathrm{A}^{\dagger}\,\mathrm{B}\,\boldsymbol{z}$$

où $\mathrm{A}^{\dagger}$ désigne la pseudo-inverse de A. Dans le cas qui nous intéresse, il existe une caractérisation simple de la pseudo-inverse de la matrice A, qui utilise la diagonalisation de cette matrice symétrique réelle :

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\,\mathrm{D}\,\mathrm{P}^{\mathrm{t}}$$

où les éléments de la diagonale de D sont $\{d_1, \ldots d_r, 0 \ldots, 0\}$, r désignant le rang de A. La pseudo-inverse est alors

$$\mathrm{A}^{\dagger} = \mathrm{P}\,\mathrm{D}^{\dagger}\,\mathrm{P}^{\mathrm{t}},$$

où les éléments de la diagonale de $\mathrm{D}^{\dagger}$ sont $\{1/d_1, \ldots 1/d_r, 0 \ldots, 0\}$.

Les propriétés générales de la pseudo-inverse sont :

— $\mathrm{A}\,\mathrm{A}^{\dagger}$ et $\mathrm{A}^{\dagger}\mathrm{A}$ sont symétriques,

— $\mathrm{A}\,\mathrm{A}^{\dagger}\,\mathrm{A} = \mathrm{A}$,

— $\mathrm{A}^{\dagger}\,\mathrm{A}\,\mathrm{A}^{\dagger} = \mathrm{A}^{\dagger}$.

Il existe différents algorithmes permettant de calculer la pseudo-inverse d'une matrice. Le lecteur intéressé est invité à se référer à [8].

D'un point de vue pratique, un choix judicieux de la matrice $\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}$ permet presque toujours d'éviter la singularité de la matrice normale lorsque l'on utilise l'estimateur bayésien. Le problème risque donc de se poser pour les estimateurs non bayésiens, en particulier lorsque la dimension du vecteur des paramètres est proche de celle des observations. Ce cas correspond à un cas défavorable pour estimer $\boldsymbol{p}$ à l'aide de ces estimateurs comme cela a été indiqué précédemment.

Majoration du risque quadratique moyen

On suppose ici que la matrice A est inversible et, afin de simplifier l'exposé des résultats, le bruit et (dans cadre bayésien) les paramètres sont supposés stationnaires. On peut ainsi normaliser leur matrice de covariance respective

$$\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}} = r_{\boldsymbol{B}}\,\bar{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{B}} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}} = r_{\boldsymbol{P}}\,\bar{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{P}}.$$

Les éléments diagonaux des matrices $\bar{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{B}}$ et $\bar{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{P}}$ sont égaux à l'unité et $r_{\boldsymbol{B}}$ et $r_{\boldsymbol{P}}$ désignent les puissances moyennes respectives du bruit et de $\boldsymbol{p}$.

On normalise également A en posant

$$\mathrm{A} = \frac{\bar{\mathrm{A}}}{r_{\boldsymbol{B}}}.$$

Sous ces hypothèses, $\bar{\mathrm{A}}$ et $\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}$ sont respectivement définies positives et semi-définies positives. Soient λ_i et μ_i les valeurs propres respectives de $\bar{\mathrm{A}}$ et $\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}$, on a

$$\forall i, \quad \lambda_i > 0,\ \mu_i \geqslant 0.$$

Le nombre de condition (noté NC par la suite) d'une matrice M réelle symétrique est défini comme le rapport entre la plus petite et la plus grande de ses valeurs propres non nulles, soit

$$\mathrm{NC}(\mathrm{M}) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}.$$

Les valeurs propres de A et de $\bar{\mathrm{A}}$ étant proportionnelles, on a $\mathrm{NC}(\mathrm{A}) = \mathrm{NC}(\bar{\mathrm{A}})$.

Pour juger de la qualité des estimateurs étudiés, on s'intéresse au risque quadratique moyen. Ce risque est égal à la trace de la matrice de covariance de l'estimateur, qui est dans tous les cas étudiés égale à l'inverse de la matrice normale. En fait, il est souhaitable ici d'introduire également un risque relatif :

$$\mathrm{EMQR}(\widehat{\boldsymbol{p}}) = \frac{r_{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{tr}\,(\bar{\mathrm{A}}^{-1})}{\|\boldsymbol{p}\|^2}. \tag{III.22}$$

Le rapport signal-à-bruit observé peut être défini comme le rapport de la puissance du signal non bruité $\mathrm{H}\,\boldsymbol{p}$ sur la puissance moyenne du bruit, soit

$$\mathrm{SNR} = \frac{\|\mathrm{H}\,\boldsymbol{p}\|^2}{N r_{\boldsymbol{B}}} \tag{III.23}$$

où N est la dimension de $\boldsymbol{z}$. La matrice $\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}$ étant semi-définie positive, il est possible d'encadrer $\|\mathrm{H}\boldsymbol{p}\|^2$ en décomposant sous la forme $\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}\boldsymbol{p}$ par

$$\mu_{\min}\,\|\boldsymbol{p}\|^2 \leqslant \|\mathrm{H}\,\boldsymbol{p}\|^2 \leqslant \mu_{\max}\,\|\boldsymbol{p}\|^2\,, \tag{III.24}$$

où $\mu_{\min}$ (resp. $\mu_{\max}$) désigne la plus petite (resp. plus grande) des valeurs propres de $\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}$. En prenant en compte les équations (III.22), (III.23) et (III.24) on obtient finalement

$$\frac{\mu_{\min}}{\mathrm{SNR}}\frac{\mathrm{tr}\,(\bar{\mathrm{A}}^{-1})}{N} \leqslant \mathrm{EMQR}(\widehat{\boldsymbol{p}}) \leqslant \frac{\mu_{\max}}{\mathrm{SNR}}\frac{\mathrm{tr}\,(\bar{\mathrm{A}}^{-1})}{N}.$$

Or

$$\mathrm{tr}\,(\bar{\mathrm{A}}^{-1}) = \sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_{\max}}\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_i}.$$

L'encadrement de l'erreur moyenne quadratique relative devient alors

$$\frac{\mu_{\min}}{\mathrm{SNR}}\frac{1}{N}\frac{1}{\lambda_{\max}}\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_i} \leqslant \mathrm{EMQR}(\widehat{\boldsymbol{p}}) \leqslant \frac{\mu_{\max}}{\mathrm{SNR}}\frac{1}{N}\frac{1}{\lambda_{\max}}\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_i}$$

et l'on obtient la majoration suivante :

$$\boxed{\mathrm{EMQR}(\widehat{\boldsymbol{p}}) \leqslant \frac{1}{\mathrm{SNR}}\frac{M}{N}\frac{\mu_{\max}}{\lambda_{\max}}\,\mathrm{NC(A)}}. \tag{III.25}$$

On retrouve ici les indications données sur le comportement des estimateurs dans les paragraphes précédents à savoir

— plus le rapport signal-à-bruit est élevé, meilleur est le résultat

— plus le nombre d'observations est grand par rapport au nombre de paramètres à estimer, plus les conditions sont favorables,

— un bon conditionnement de la matrice normale (NC(A) proche de 1) est favorable à l'obtention de bons résultats.

Conditionnement de la matrice normale

Nous allons à présent voir comment l'utilisation de l'estimateur bayésien peut modifier le conditionnement de la matrice normale. Dans le cas bayésien, la matrice $\bar{\mathrm{A}}$ est définie par

$$\bar{\mathrm{A}} = \mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\bar{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H} + \frac{r_{\boldsymbol{B}}}{r_{\boldsymbol{P}}}\,\bar{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{P}}^{-1}.$$

Le conditionnement de la matrice est intermédiaire entre celui de $\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\bar{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H}$ (correspondant au cas non bayésien) et celui de $\bar{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{P}}^{-1}$, et est fonction du rapport $r_{\boldsymbol{B}}/r_{\boldsymbol{P}}$. Soit ν_i et η_i les valeurs propres respectives de $\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\bar{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H}$ et de $\bar{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{P}}^{-1}$. Pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, on peut écrire

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{t}}\,\bar{\mathrm{A}}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\bar{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H}\,\boldsymbol{u} + \frac{r_{\boldsymbol{B}}}{r_{\boldsymbol{P}}}\,\boldsymbol{u}^{\mathrm{t}}\,\bar{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{P}}^{-1}\,\boldsymbol{u},$$

dont on déduit

$$\left(\nu_{\min} + \frac{r_{\boldsymbol{B}}}{r_{\boldsymbol{P}}}\,\eta_{\min}\right)\,\|\boldsymbol{u}\|^2 \leqslant \boldsymbol{u}^{\mathrm{t}}\,\bar{\mathrm{A}}\,\boldsymbol{u} \leqslant \left(\nu_{\max} + \frac{r_{\boldsymbol{B}}}{r_{\boldsymbol{P}}}\,\eta_{\max}\right)\,\|\boldsymbol{u}\|^2\,,$$

qui fournit un encadrement des valeurs propres de $\bar{\mathrm{A}}$ définie positive sous la forme

$$\nu_{\min} + \frac{r_{\boldsymbol{B}}}{r_{\boldsymbol{P}}}\,\eta_{\min} \leqslant \lambda_{\min} \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_{\max} \leqslant \nu_{\max} + \frac{r_{\boldsymbol{B}}}{r_{\boldsymbol{P}}}\,\eta_{\max}.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{NC(A)} \leqslant \frac{\nu_{\max} + \eta_{\max}\,r_{\boldsymbol{B}}/r_{\boldsymbol{P}}}{\nu_{\min} + \eta_{\min}\,r_{\boldsymbol{B}}/r_{\boldsymbol{P}}}}. \tag{III.26}$$

En faisant varier le rapport $r_{\boldsymbol{B}}/r_{\boldsymbol{P}}$ entre 0 et $+\infty$ il est possible de faire évoluer le nombre de condition de A entre celui de $\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H}$ et de $\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1}$. Dans le cas où $\mathrm{NC}(\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}}^{-1}\,\mathrm{H})$ est élevé et où un estimateur non bayésien ne pourra fournir que des résultats médiocres, le passage à l'estimateur bayésien ayant une matrice $\mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1}$ bien conditionnée permettra d'améliorer les résultats obtenus. En particulier en prenant une matrice identité et même avec une faible valeur de $r_{\boldsymbol{B}}/r_{\boldsymbol{P}}$, ce qui constitue un *a priori* très peu contraignant, il est possible d'obtenir une réduction significative de l'erreur moyenne quadratique relative. La sélection de la valeur de $r_{\boldsymbol{B}}/r_{\boldsymbol{P}}$ constitue par elle-même un problème d'estimation qui ne sera pas abordé ici. Dans la pratique, quelques essais permettent en général de définir un domaine adéquat de variation de $r_{\boldsymbol{B}}/r_{\boldsymbol{P}}$ pour lequel les résultats sont satisfaisants.

Annexe A Réduction du risque quadratique par introduction d'un biais

On considère toujours le modèle linéaire

$$\boldsymbol{z} = \mathrm{H}\,\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b},$$

et l'on suppose le bruit blanc centré ($\mathrm{E}(\boldsymbol{m_B}) = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{R}_{\boldsymbol{B}} = \sigma^2_{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{I}$). On étudie pour tout $\lambda \geqslant 0$ la classe d'estimateurs linéaires

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_\lambda = (\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H} + \lambda\,\mathrm{I})^{-1}\,\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{z}.$$

Il est clair que $\widehat{\boldsymbol{p}}_0$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance et que les $\widehat{\boldsymbol{p}}_\lambda$, $\lambda > 0$ sont des estimateurs bayésiens pour une matrice de covariance *a priori* $(\sigma^2_{\boldsymbol{B}}/\lambda)\,\mathrm{I}$.

Dans la suite, on note $\mathrm{A}_\lambda = \mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H} + \lambda\,\mathrm{I}$ la matrice normale pour différentes valeurs de λ. Le biais de ces estimateurs s'écrit

$$\boldsymbol{b}_\lambda(\boldsymbol{p}^*) = \mathrm{E}_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{P}}(\widehat{\boldsymbol{p}}_\lambda|\boldsymbol{p}^*) - \boldsymbol{p}^* = -\lambda\,\mathrm{A}^{-1}\,\boldsymbol{p}^*$$

et leur matrice de covariance

$$\boldsymbol{V}_\lambda(\boldsymbol{p}^*) = (\mathrm{A}^{-1} + \lambda\,\mathrm{A}^{-2})\,\sigma^2_{\boldsymbol{B}}.$$

Le risque quadratique $\rho(\lambda)$, défini en (I.12), est la trace de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation :

$$\mathrm{EQM}_\lambda = \lambda^2\mathrm{A}^{-1}\,\boldsymbol{p}^*(\boldsymbol{p}^*)^{\mathrm{t}}\,\mathrm{A}^{-1} + \boldsymbol{V}_\lambda(\boldsymbol{p}^*).$$

On utilise le développement limité en λ proche de 0 :

$$\mathrm{A}^{-n} = (\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H})^{-n} - n\lambda(\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H})^{-(n+1)} + O(\lambda^2)$$

pour obtenir, au premier ordre,

$$\mathrm{EQM}_\lambda = \sigma^2_{\boldsymbol{B}}\left((\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H})^{-1} - 2\lambda(\mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H})^{-2}\right) + O(\lambda^2).$$

Le signe du second terme montre que l'on peut trouver un $\widehat{\lambda} > 0$ tel que $\mathrm{EQM}_{\widehat{\lambda}} < \mathrm{EQM}_0$: comme nous l'avons déjà vu, l'inégalité correspond au fait que la matrice différence $\mathrm{EQM}_0 - \mathrm{EQM}_{\widehat{\lambda}}$ est définie non négative. Elle implique l'inégalité des traces :

$$\rho(\widehat{\lambda}) < \rho(0).$$

L'estimateur biaisé $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\widehat{\lambda}}$ est donc meilleur que l'estimateur non biaisé, au sens du risque quadratique moyen.

Chapitre IV

Algorithme de Levinson

IV.1 Introduction

Inversion d'une équation normale

Le chapitre précédent a montré que la résolution de différents problèmes d'estimation, dans le cas d'un modèle d'observation linéaire à bruit additif gaussien, aboutissait simplement au problème de l'inversion d'un système linéaire

$$\mathrm{A}\,\boldsymbol{p} = \boldsymbol{w}, \tag{IV.1}$$

dit *équation normale*. Le vecteur $\boldsymbol{w}$ est connu et de la même taille M que le vecteur cherché $\boldsymbol{p}$. La matrice *normale* A est carrée $M \times M$, définie non négative mais pas nécessairement inversible. Lorsqu'elle est inversible, un algorithme général d'inversion de système linéaire permet de calculer la solution unique $\boldsymbol{p}$ et coûte de l'ordre de $O(M^3)$ opérations arithmétiques. On peut procéder par exemple en utilisant une méthode de pivot de Gauss et en décomposant la matrice A sous forme LU pour un coût en $O(M^3)$. La résolution s'obtient alors pour un coût supplémentaire $O(M^2)$. Quant au calcul explicite de l'inverse de A, il s'obtient par les mêmes intermédiaires et coûte en supplément de l'ordre de $O(M^3)$ opérations [15].

Algorithme de Levinson et structure de Toeplitz

Il existe des alternatives moins coûteuses que l'inversion standard (mais moins générales) qui tirent parti de la structure particulière de la matrice normale. Le chapitre V établira une forme de résolution par récurrence sur le temps valable dans certains contextes.

L'algorithme de Levinson (1947) est une autre forme de résolution, encore moins coûteuse (mais moins générale), qui travaille par récurrence sur l'*ordre* (c'est-à-dire sur la dimension M du problème). Dans sa version « de base » , son utilisation est limitée au cas où la matrice normale est *définie positive* :

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^M, \quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{A}\,\boldsymbol{u} > 0$$

et possède la structure d'une *matrice de Toeplitz*, c'est-à-dire qu'elle est constante le long de chacune de ses diagonales :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{M-1} \\ \alpha_{-1} & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & & \alpha_1 \\ \alpha_{1-M} & \dots & \alpha_{-1} & \alpha_0 \end{bmatrix}. \tag{IV.2}$$

Lorsque A est une matrice de Toeplitz définie positive, l'algorithme de Levinson résoud directement le système linéaire (IV.1) en un nombre d'opérations ramené à $O(M^2)$ (§IV.3.1) et fournit sans opération supplémentaire l'inverse de la matrice A sous forme LDU (§IV.3.2).

Mentionnons la *persymétrie* des matrices de Toeplitz, c'est-à-dire la symétrie par rapport à la diagonale sud-ouest / nord-est. Cette propriété s'écrit

$$\mathrm{J}_M \, \mathrm{A}^{\mathrm{t}} \, \mathrm{J}_M = \mathrm{A}, \tag{IV.3}$$

où

$$\mathrm{J}_M \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \ddots & & \\ 1 & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{IV.4}$$

est la *matrice de retournement* de même taille $M \times M$ que A. Notons aussi que l'inverse d'une matrice persymétrique inversible est également persymétrique, car (IV.3) implique $\mathrm{J}_M \, \mathrm{A}^{-t} \, \mathrm{J}_M = \mathrm{A}^{-1}$. En revanche l'inverse d'une matrice de Toeplitz n'est pas en général de Toeplitz :

$$\text{A de Toeplitz} \implies \text{A persymétrique} \implies \mathrm{A}^{-1} \text{ persymétrique (si A inversible).}$$

La variante de l'algorithme de Levinson présentée dans ce cours est la plus simple et la plus utile : elle permet seulement l'inversion d'une matrice de Toeplitz symétrique. D'autres variantes plus compliquées traitent le cas de matrices de Toeplitz réelles définies positives non symétriques, ou encore définies positives complexes hermitiennes, ou même seulement *blocs-Toeplitz*, *proches de Toeplitz*, ...

Motivation

Les ouvrages de référence en calcul matriciel tels que [8] ou [15] limitent les généralités concernant l'algorithme de Levinson à la description matricielle qui vient d'en être faite ici. Mais dans le contexte du traitement du signal, pourquoi s'intéresser particulièrement à la résolution d'un système linéaire tel que (IV.2) dans le cas d'une matrice normale *de Toeplitz*, *réelle symétrique définie positive* ?

Le lien entre la structure de Toeplitz d'une matrice de covariance et la stationnarité d'un signal à l'ordre deux est un élément essentiel de la réponse. Considérons en effet un signal aléatoire $\{X_k\}$ stationnaire faible. Sa fonction d'autocorrélation ne dépend pas de l'instant et s'écrit

$$\mathrm{cov}(X_k, X_{k+n}) = r(n), \quad \forall k, n. \tag{IV.5}$$

Soit $\boldsymbol{X}_p(k) = [X_k, \ldots, X_{k-p-1}]^{\mathrm{t}}$ un vecteur aléatoire de taille quelconque p constitué d'échantillons consécutifs du signal. Il est évident que sa matrice de covariance centrée s'écrit

$$\mathrm{R}_{p-1} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \ldots & r(p-1) \\ r(1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & r(1) \\ r(p-1) & \ldots & r(1) & r(0) \end{bmatrix}. \tag{IV.6}$$

Cette matrice de taille $p \times p$ est une matrice de Toeplitz définie non négative.

Il en est de même pour la matrice $\widehat{\mathrm{R}}_{p-1}$ constituée de coefficients $\widehat{c}(n)$ de l'estimateur empirique biaisé de la fonction de corrélation vu au chapitre II (§II.2.2), quel que soit le fragment de trajectoire $\boldsymbol{X}_p(k, \omega) = \boldsymbol{x}$ ayant servi à la construction de $\widehat{\mathrm{R}}_{p-1}$.

D'autre part, le chapitre III a montré que certains estimateurs se calculent en inversant des matrice de covariance : c'est le cas de l'estimateur bayésien exprimé en forme covariance

(III.17). L'algorithme de Levinson peut alors être appliqué pour le calcul de l'estimateur, dans deux cadres différents :

♡ — lorsque les caractéristiques à l'ordre deux des signaux sont connues et stationnaires, car les matrices de covariance mentionnées sont alors de Toeplitz,

♠ — de la même façon, lorsque les caractéristiques à l'ordre deux des signaux sont estimées au préalable, sous hypothèse de stationnarité.

Si, en pratique, le cadre ♠ est le plus courant, nous avons choisi de présenter ici un problème relevant du cadre ♡ : la prédiction linéaire au sens de l'erreur moyenne quadratique minimale. Ce problème permet d'une part de présenter une interprétation importante de l'algorithme de Levinson, d'autre part d'éviter certaines complications associées au cadre plus réaliste de la prédiction linéaire aux moindres carrés.

IV.2 Prédiction linéaire dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

IV.2.1 Principe

Définition

Étant donné un signal aléatoire réel $\{X_k\}$ (supposé d'ordre deux), on entend par *prédiction linéaire à passé d'ordre p à l'instant k* la régression linéaire dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de la variable aléatoire X_k sur le sous-espace de Hilbert de dimension finie (au plus p) des combinaisons linéaires de $\boldsymbol{X}_p^{k-1} = [X_{k-1}, \ldots, X_{k-p}]^{\mathrm{t}}$. De la même façon, *la prédiction linéaire à passé infini* concerne la régression de la variable X_k sur l'ensemble de son passé linéaire $X_{k-1}, X_{k-2}, \ldots$ En pratique, l'appellation *prédiction linéaire* est utilisée aussi pour désigner la *prédiction affine*, pour laquelle la famille génératrice du sous-espace est augmentée de la variable aléatoire 1 (de moyenne 1 et de variance nulle).

Dans tous les cas, la variable prédite $\widehat{X}_p^k$ minimise un risque quadratique qui s'interprète comme le carré de la distance entre X_k et le sous-espace considéré. La variable aléatoire $\widehat{X}_p^k$ n'est autre que la projection orthogonale de X_k sur ce sous-espace (voir les chapitres IV et V de [14]).

Cas stationnaire à l'ordre deux

En travaillant à l'ordre p et à l'instant k, le problème est résolu par la détermination de $p+1$ coefficients déterministes dépendants en général de k, mais indépendants de k dans le cas stationnaire à l'ordre deux : une constante l_p et un *prédicteur* $\boldsymbol{a}_p = [a_1, \ldots, a_p]^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^p$ contenant les coefficients de la combinaison linéaire optimale :

$$\begin{aligned} \widehat{X}_p^k &= l_p + \sum_{i=1}^{p} a_i \, X_{k-i} \\ &= l_p + \boldsymbol{a}_p^{\mathrm{t}} \, \boldsymbol{X}_p^{k-1}. \end{aligned} \tag{IV.7}$$

Par identification, le résultat peut être simplement déduit de l'expression (II.26) concernant en général l'estimation linéaire au sens de l'erreur moyenne quadratique minimale d'un vecteur aléatoire $\boldsymbol{P}$ étant donné un vecteur d'observation $\boldsymbol{Z}$ et les caractéristiques à l'ordre deux de $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Z})$. Il prend la forme suivante dans le cas d'un signal stationnaire à l'ordre deux :

$$\widehat{X}_p^k = m + \sum_{i=1}^{p} a_i \, (X_{k-i} - m), \tag{IV.8}$$

avec

$$m = \mathrm{E}(X_k) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{a}_p = \mathrm{R}_{p-1}^{-1}\, \boldsymbol{r}_p, \tag{IV.9}$$

où la matrice de covariance R_{p-1} est la matrice de Toeplitz de taille $p \times p$ engendrée par les coefficients d'autocorrélation $r(0), \ldots, r(p-1)$ et définie en (IV.6). Le vecteur $\boldsymbol{r}_p$ contient également des coefficients d'autocorrélation :

$$\boldsymbol{r}_p \triangleq [r(1), \ldots, r(p)]^{\mathrm{t}}\,. \tag{IV.10}$$

IV.2.2 Équations normales de la prédiction

Première équation normale

L'expression (IV.9) n'est autre que la solution d'une équation normale

$$\boxed{\mathrm{R}_{p-1}\, \boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{r}_p} \tag{IV.11}$$

lorsque la matrice normale (de Toeplitz) R_{p-1} est inversible, ce que nous supposerons dans la suite. Le cas contraire survient lorsque les composantes de $\boldsymbol{X}_p^{k-1}$ forment une famille liée. Il existe alors une infinité de décompositions linéaires (IV.8) de la même projection $\widehat{X}_p^k$ et le système (IV.11) est redondant.

L'équation normale (IV.11) peut être obtenue beaucoup plus directement par une approche géométrique. Pour cela plaçons nous désormais dans le cas centré et considérons *l'innovation*, c'est-à-dire l'erreur de prédiction

$$\begin{aligned} E_p^k &\triangleq X_k - \widehat{X}_p^k \\ &= X_k - \boldsymbol{a}_p^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{X}_p^{k-1} - l_p. \end{aligned} \tag{IV.12}$$

— D'une part elle doit être orthogonale à 1, c'est-à-dire vérifier $\mathrm{E}(E_p^k) = 0$, ce qui implique $l_p = 0$. Pour un signal centré, la prédiction affine se confond avec la prédiction linéaire.

— D'autre part elle doit être orthogonale au sous-espace des combinaisons linéaires de $\boldsymbol{X}_p^{k-1} = [X_{k-1}, \ldots, X_{k-p}]^{\mathrm{t}}$, donc *de façon équivalente*, à chaque X_{k-n}, pour $n = 1, \ldots, p$, ce qui peut aussi s'écrire :

$$\mathrm{E}(E_p^k\, \boldsymbol{X}_p^{k-1}) = 0. \tag{IV.13}$$

Or

$$E_p^k = X_k - \boldsymbol{a}_p^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{X}_p^{k-1}, \tag{IV.14}$$

donc $\mathrm{E}((\boldsymbol{a}_p^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{X}_p^{k-1})\, \boldsymbol{X}_p^{k-1}) = \mathrm{E}(X_k\, \boldsymbol{X}_p^{k-1})$, ou encore $E(\boldsymbol{X}_p^{k-1}\, (\boldsymbol{X}_p^{k-1})^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{a}_p) = \mathrm{E}(X_k\, \boldsymbol{X}_p^{k-1})$, c'est-à-dire l'équation normale (IV.11).

Variance de l'innovation

La résolution de l'équation normale (IV.11) garantit que la variable aléatoire prédite $\widehat{X}_p^k = \boldsymbol{a}_p^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{X}_p^{k-1}$ est à la distance minimale de X_k parmi toutes les combinaisons linéaires de $\boldsymbol{X}_p^{k-1}$. Cette distance ε_p est la norme de l'innovation E_p^k :

$$\begin{aligned} \varepsilon_p^2 \triangleq \mathrm{E}\big((E_p^k)^2\big) = \mathrm{E}\big(E_p^k\, (X_k - \widehat{X}_p^k)\big) &= \mathrm{E}(E_p^k\, X_k) \quad \text{car } E_p^k \perp \widehat{X}_p^k, \\ &= \mathrm{E}\big((X_k - \boldsymbol{a}_p^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{X}_p^{k-1})\, X_k\big), \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\varepsilon_p^2 = r(0) - \boldsymbol{a}_p^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{r}_p.} \tag{IV.15}$$

Autre forme des équations normales

L'équation (IV.15) complète l'équation normale (IV.11). On peut maintenant associer ces deux équations sous la forme plus compacte

$$\left[\begin{array}{c|c} r(0) & \boldsymbol{r}_p^{\mathrm{t}} \\ \hline \boldsymbol{r}_p & \mathrm{R}_{p-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -\boldsymbol{a}_p \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \varepsilon_p^2 \\ \hline \boldsymbol{0} \end{array}\right]$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{R}_p\, \boldsymbol{b}_p = \varepsilon_p^2\, \boldsymbol{v}_{p+1},} \tag{IV.16}$$

avec les notations suivantes : $\boldsymbol{v}_p$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, et

$$\boldsymbol{b}_p = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -\boldsymbol{a}_p \end{array}\right]$$

est *l'innovateur*, au sens où (IV.14) s'écrit également

$$E_p^k = \boldsymbol{b}_p^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{X}_{p+1}^k. \tag{IV.17}$$

IV.2.3 Propriétés

Équivalence de représentation

Étant donnés les $p+1$ premiers coefficients de la fonction de corrélation $r(0), \ldots, r(p)$ d'un processus X centré stationnaire d'ordre deux, les coefficients du prédicteur $\boldsymbol{a}_p$ d'ordre p et la variance d'innovation associée ε_p^2 sont déterminés de façon unique (si la matrice de covariance R_p est inversible).

Réciproquement, le couple $(\varepsilon_p^2, \boldsymbol{a}_p)$ détermine de façon unique les $p+1$ coefficients $\boldsymbol{c}_p \triangleq [r(0), \ldots, r(p)]^{\mathrm{t}}$. On peut montrer cette propriété en constatant que (IV.16) s'écrit aussi

$$\mathrm{A}_p\, \boldsymbol{c}_p = \varepsilon_p^2\, \boldsymbol{v}_{p+1}, \tag{IV.18}$$

dans laquelle A_p est une matrice de taille $(p+1) \times (p+1)$ qui ne contient que des coefficients extraits de $\boldsymbol{a}_p$. (IV.18) est une équation normale « duale » de (IV.16) dont la solution s'écrit (en admettant l'inversibilité de A_p)

$$\boldsymbol{c}_p = \varepsilon_p^2\, \mathrm{A}_p^{-1}\, \boldsymbol{v}_{p-1},$$

ce qui permet de déduire $\boldsymbol{c}_p$ de $(\varepsilon_p^2, \boldsymbol{a}_p)$. Ces deux représentations sont donc équivalentes, ce qui renforce l'intérêt théorique de la prédiction.

Mentionnons pour finir que la matrice A_p possède une structure particulière qui n'est pas de Toeplitz, mais qui permet de résoudre (IV.18) à l'aide d'un algorithme dit *de Levinson descendant*, correspondant au renversement des équations de récurrence de l'algorithme de Levinson.

Prédiction directe et prédiction rétrograde

Le problème de la prédiction linéaire abordé ci-dessus est désigné plus précisément par *prédiction directe* dans la mesure où la valeur d'un échantillon du signal est prédite à l'aide de valeurs passées. Formellement, on peut aussi définir un problème de *prédiction rétrograde* qui consiste, à l'ordre p, à estimer X_{k-p} par combinaison linéaire des p valeurs futures $\boldsymbol{X}_p^k = [X_k, \ldots, X_{k-p+1}]^{\mathrm{t}}$. Suivant le même principe d'orthogonalité que (IV.13), il est facile de vérifier que le *prédicteur rétrograde* est $\mathrm{J}_p \boldsymbol{a}_p$, c'est-à-dire la version retournée du prédicteur direct $\boldsymbol{a}_p$, et que les variances d'erreur de prédiction directe et rétrograde sont égales. L'algorithme de Levinson repose sur

l'exploitation de cette propriété, ce qui apparaît clairement dans son interprétation géométrique (§IV.3.3).

Matriciellement, l'innovateur rétrograde $\mathrm{J}_{p+1}\,\boldsymbol{b}_p$ apparaît par simple retournement de (IV.16) grâce à la propriété de persymétrie de la matrice R_p :

$$\begin{aligned}\varepsilon_p^2\,\mathrm{J}_{p+1}\,\boldsymbol{v}_{p+1} &= \mathrm{J}_{p+1}\,\mathrm{R}_p\,\boldsymbol{b}_p\\ &= \mathrm{R}_p\,\mathrm{J}_{p+1}\,\boldsymbol{b}_p.\end{aligned}$$

Cette propriété de conservation du prédicteur par retournement résulte simplement de la symétrie de la fonction de corrélation d'un signal aléatoire d'ordre deux : alors que la loi temporelle d'un signal stationnaire fort ne se conserve pas en général par retournement du temps, cette propriété de conservation est satisfaite par la corrélation d'un signal stationnaire faible.

Prédiction à passé infini et décomposition de Wold

Par augmentation de l'ordre p du prédicteur, la limite de la suite des prédictions $\widehat{X}_p^k$ définit dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ la prédiction linéaire de X_k à passé infini, c'est-à-dire la régression du signal $\{X_k\}$ sur son passé linéaire. De façon unique, on obtient ainsi une décomposition de X_k centré sous la forme

$$X_k = \widehat{X}_k + E_k, \tag{IV.19}$$

avec $E_k \perp X_{k-n}$ pour tout $n>0$ et pour tout k, et tel que $\widehat{X}_k$ appartient au passé linéaire de X_k. De plus l'innovation $\{E_k\}$ à passé infini constitue un bruit blanc : $E_k = X_k - \widehat{X}_k$ est dans le passé linéaire de tout $X_{k+n}, n>0$, donc $E_{k-n} \perp E_k$ pour tout $n>0$.

Comme $\widehat{X}_k$ appartient au passé linéaire de X_k, on peut l'exprimer sous la forme (pas nécessairement unique, et p.p.) :

$$\widehat{X}_k = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\,X_{k-n}. \tag{IV.20}$$

La combinaison (IV.19)-(IV.20) semble définir sur $\mathbb{Z}$ une relation récurrente de filtrage causal entre $\{E_k\}$ et $\{X_k\}$. La réalité est plus compliquée car on ne possède aucune garantie ni d'existence d'un tel filtre, ni de stabilité. Peut-on générer un signal $\{X_k\}$ stationnaire dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ comme la sortie d'un filtre linéaire causal alimenté par son innovation à passé infini $\{E_k\}$? La réponse est négative en général, et le *théorème de décomposition de Wold* précise ce résultat (cf. [2] par exemple) :

— Le signal $\{X_k\}$ est dit *singulier* si l'innovation à passé infini $\{E_k\}$ est un signal identiquement nul p.p. (X_k est une combinaison linéaire déterministe de son passé, *e.g.,* la sinusoïde du §V.3.3 de [14]).

— Tout signal $\{X_k\}$ stationnaire non singulier dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ se décompose de façon unique sous la forme

$$X_k = V_k + \sum_{n=0}^{+\infty} d_n\,E_{k-n},$$

où $\{V_k\}$ est un signal singulier, où $\{E_k\}$ est un bruit blanc de variance non nulle (qu'on obtient de façon unique à partir de $\{X_k\}$ comme l'innovation à passé infini) et où $\{d_n\}$ est une suite de carré sommable qu'on obtient comme les coefficients de la projection dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ de X_k sur la famille orthonormée $E_k, E_{k-1}, \ldots$

Prédiction des AR stationnaires causaux

Un signal AR d'ordre p stationnaire à l'ordre deux est obtenu par filtrage linéaire stable d'un bruit $\{U_k\}$ blanc homogène à l'ordre deux suivant la relation (§VI.4.1 de [14]) :

$$X_k = \sum_{i=1}^{p} a_i \, X_{k-i} + U_k.$$

Si de plus le filtre générateur est causal, alors U_k est décorrélé de $X_{k-1}, X_{k-2}, \ldots$, donc orthogonal au passé linéaire de X_k. Par conséquent le prédicteur optimal d'un tel signal à l'ordre p est le vecteur générateur $\boldsymbol{a}_p = [a_1, \ldots, a_p]^{\mathrm{t}}$. Ce résultat est conforme aux équations de Yule-Walker (§VI.6.2 de la première partie). A tout ordre supérieur $n > p, \boldsymbol{a}_n = [a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0]^{\mathrm{t}}$.

Intérêt pratique de la prédiction linéaire

Du point de vue des applications, l'utilité de la prédiction n'est pas évidente : pourquoi prédire les points d'un signal qu'on observera sans erreur à l'instant suivant ? En tant que tel, ce problème intervient pour des échelles de temps plutôt grandes (en démographie, en économie, en météorologie) ou pour des applications très « spécifiques » (spéculation financière, interception d'engins belliqueux).

En fait dans la plupart des applications, la prédiction ne constitue qu'une façon détournée de poser et de résoudre le vrai problème. C'est le cas de la *déconvolution prédictive* en géophysique ou en codage et en synthèse de la parole : les quantités d'intérêt ne sont pas les valeurs prédites mais les erreurs de prédiction d'une part, et les coefficients de prédiction d'autre part. En suivi de trajectoire, l'erreur de prédiction est également la quantité significative, car c'est en fonction de cette erreur que les paramètres du modèle de poursuite peuvent être corrigés. C'est le principe de la commande prédictive en automatique.

IV.3 Algorithme de Levinson

L'algorithme de Levinson permet d'inverser l'équation normale (IV.11) et de calculer la variance d'innovation (IV.15). Ce faisant, l'inverse de la matrice R_p est obtenue sous forme factorisée LDU comme un simple sous-produit de l'algorithme sans opération arithmétique supplémentaire.

Le principe repose sur une récurrence sur l'ordre p des équations normales. Interprété géométriquement au sens de la prédiction linéaire dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, il s'agit d'ajouter à la p-ième récurrence la variable aléatoire X_{k-p} à la famille génératrice $\{X_{k-1}, \ldots, X_{k-p-1}\}$ du sous-espace du passé sur lequel on projette X_k.

IV.3.1 Établissement des équations récurrentes

Récurrence sur l'ordre

L'établissement des équations est plus simple sur la forme (IV.16) équivalent au couple (IV.11)-(IV.15). Supposons résolu le problème à l'ordre $p-1$: on dispose d'un innovateur

$$\boldsymbol{b}_{p-1} = \left[\frac{1}{-\boldsymbol{a}_{p-1}}\right]$$

et d'une puissance d'innovation ε_{p-1}^2 tels que (IV.16) est satisfaite à l'ordre $p-1$:

$$\mathrm{R}_{p-1} \, \boldsymbol{b}_{p-1} = \varepsilon_{p-1}^2 \, \boldsymbol{v}_p. \tag{IV.21}$$

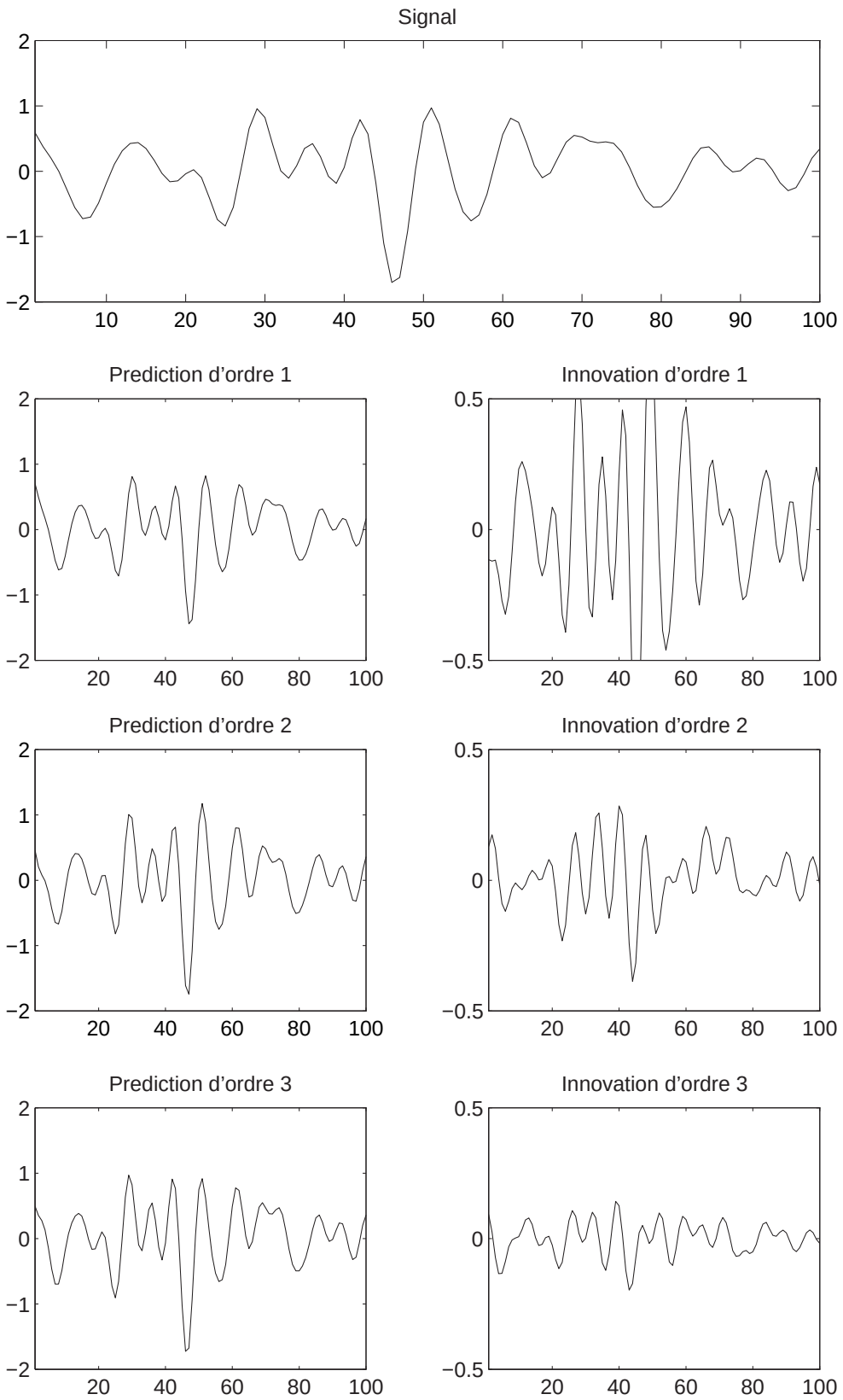

Fig. IV.1. *Prédiction linéaire et blanchiment. En haut, 100 échantillons d'un signal stationnaire X. En dessous en colonne de gauche, les signaux prédits, réalisations des $\widehat{X}_p$, pour des valeurs croissantes de l'ordre p*

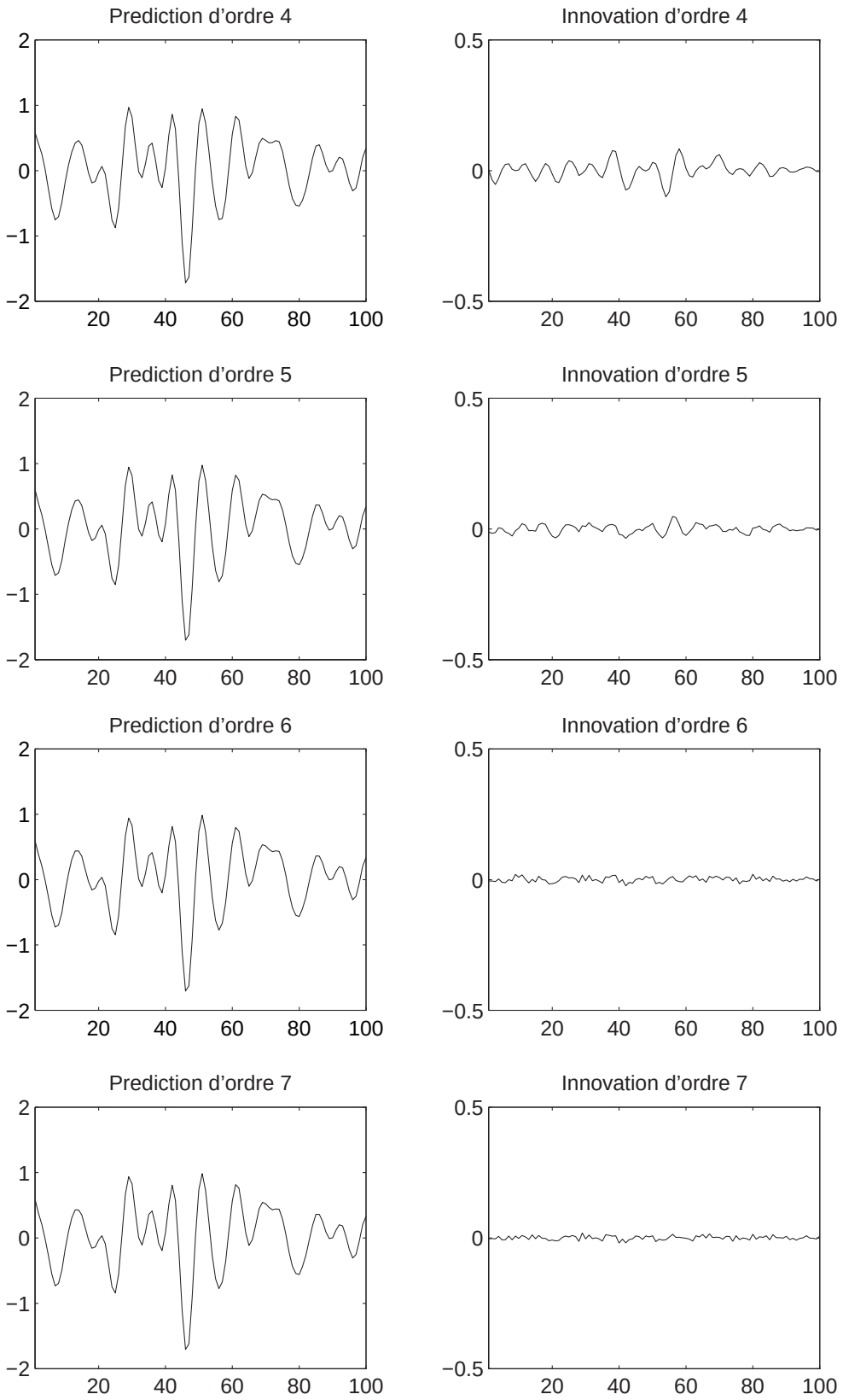

Fig. IV.2. *En colonne de droite, l'erreur de prédiction E_p (noter que l'échelle des ordonnées est différente pour les deux colonnes). Ces figures illustrent la diminution de la variance d'innovation ε_p^2 (c'est la puissance moyenne du signal E) en fonction de l'ordre p*

Quel est l'innovateur $\boldsymbol{b}_p$ d'ordre p ? En essayant de prendre comme innovateur $\boldsymbol{b}_p$ la valeur

$$\left[\frac{\boldsymbol{b}_{p-1}}{0}\right],$$

on obtient

$$\mathrm{R}_p \left[\frac{\boldsymbol{b}_{p-1}}{0}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{R}_{p-1} & \mathrm{J}_p \boldsymbol{r}_p \\ \hline \boldsymbol{r}_p^{\mathrm{t}} \mathrm{J}_p & r(0) \end{array}\right] \left[\frac{\boldsymbol{b}_{p-1}}{0}\right] = \left[\frac{\varepsilon_{p-1}^2 \boldsymbol{v}_p}{\gamma_p}\right], \tag{IV.22}$$

en posant

$$\gamma_p \triangleq \boldsymbol{r}_p^{\mathrm{t}} \, \mathrm{J}_p \, \boldsymbol{b}_{p-1}. \tag{IV.23}$$

On obtient aussi d'après (IV.3)

$$\mathrm{R}_p \left[\frac{0}{\mathrm{J}_p \boldsymbol{b}_{p-1}}\right] = \left[\frac{\gamma_p}{\varepsilon_{p-1}^2 \mathrm{J}_p \boldsymbol{v}_p}\right]. \tag{IV.24}$$

Recherchons à présent le vecteur $\boldsymbol{b}_p$ sous la forme

$$\boldsymbol{b}_p = \left[\frac{\boldsymbol{b}_{p-1}}{0}\right] - k_p \left[\frac{0}{\mathrm{J}_p \boldsymbol{b}_{p-1}}\right].$$

Par vérification directe, l'équation normale (IV.16) est vérifiée par $(\boldsymbol{b}_p, \varepsilon_p^2)$ aux conditions suivantes :

$$\varepsilon_p^2 = \varepsilon_{p-1}^2 - k_p \, \gamma_p,$$
$$0 = \gamma_p - k_p \, \varepsilon_{p-1}^2.$$

On obtient ainsi les équations de Levinson valables à partir de $p = 1$:

$$\gamma_p = \boldsymbol{r}_p^{\mathrm{t}} \, \mathrm{J}_p \, \boldsymbol{b}_{p-1}, \tag{IV.25}$$
$$k_p = \gamma_p / \varepsilon_{p-1}^2, \tag{IV.26}$$
$$\varepsilon_p^2 = \varepsilon_{p-1}^2 (1 - k_p^2), \tag{IV.27}$$
$$\boldsymbol{b}_p = \left[\frac{\boldsymbol{b}_{p-1}}{0}\right] - k_p \left[\frac{0}{\mathrm{J}_p \boldsymbol{b}_{p-1}}\right], \tag{IV.28}$$

avec

$$\boldsymbol{r}_p \triangleq \begin{bmatrix} r(1) \\ \vdots \\ r(p) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b}_p = \left[\frac{1}{-\boldsymbol{a}_p}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_p(1) \\ \vdots \\ -a_p(p) \end{bmatrix}.$$

Initialisation

L'algorithme s'initialise naturellement à l'ordre $p = 0$. Dans cette situation, le prédicteur n'a aucun coefficient, c'est-à-dire $\boldsymbol{b}_0 = [1]$ et $\widehat{X}_0^k = 0$ (pour un signal centré). On a donc $E_0^k = X_k$ et $\varepsilon_0^2 = r(0)$, d'où l'initialisation

$$\boxed{\begin{array}{c} \varepsilon_0^2 = r(0), \\ \boldsymbol{b}_0 = [1]. \end{array}}$$

Coût algorithmique

Le passage de l'ordre $p-1$ à l'ordre p nécessite les opérations élémentaires suivantes :

	(IV.25)	(IV.26)	(IV.27)	(IV.28)
multiplications	$p-1$		2	$p-1$
additions	p		1	$p-1$
divisions		1		

c'est-à-dire de l'ordre de p opérations arithmétiques, ce qui confirme le coût annoncé en introduction : $O(M^2)$ pour effectuer M itérations.

Coefficients de réflexion

On voit d'après (IV.27) que la suite $\{\varepsilon_p^2\}$ des variances d'innovation est décroissante, ce qui est cohérent avec l'interprétation géométrique en terme de prédiction linéaire : chaque récurrence correspond à une augmentation de la dimension du sous-espace de Hilbert sur lequel on projette. Ce résultat est illustré par la diminution de l'énergie du signal d'innovation dans les figures IV.1 et IV.2.

On déduit aussi de (IV.27) une condition nécessaire de fonctionnement correct de l'algorithme, portant sur les coefficients k_p successifs, appelés *coefficients de réflexion* :

$$|k_p| \leqslant 1. \tag{IV.29}$$

A l'ordre p, la variance d'innovation prend la forme

$$\varepsilon_p^2 = r(0) \prod_{i=1}^{p} (1 - k_i^2). \tag{IV.30}$$

IV.3.2 Inversion d'une matrice de Toeplitz

Forme LDU de l'inverse

Une propriété intéressante de l'algorithme de Levinson est qu'il permet de déterminer la matrice inverse de R_p sous une forme explicite LDU.

Pour $n = 0, \ldots, p$, soit $\tilde{\boldsymbol{b}}_n$ le vecteur de dimension constante $p+1$ formé à partir de $\boldsymbol{b}_n$, précédé de $p-n$ valeurs nulles :

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_n \triangleq \left[\frac{0}{\boldsymbol{b}_n}\right]. \tag{IV.31}$$

Alors en utilisant (IV.16), on montre

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_k^{\mathrm{t}} \, \mathrm{R}_p \, \tilde{\boldsymbol{b}}_n = \delta_{k-n} \, \varepsilon_n^2 \tag{IV.32}$$

pour tout k, n entre 0 et p (δ_n est le signal de Kronecker). En introduisant la matrice carrée triangulaire inférieure

$$\mathrm{L}_p \triangleq \left[\, \tilde{\boldsymbol{b}}_p | \ldots | \tilde{\boldsymbol{b}}_0 \,\right]$$

et la matrice diagonale

$$\mathrm{D}_p \triangleq \mathrm{diag}(\varepsilon_p^2, \ldots, \varepsilon_0^2),$$

s'écrit matriciellement

$$\mathrm{L}_p^{\mathrm{t}} \, \mathrm{R}_p \, \mathrm{L}_p = \mathrm{D}_p. \tag{IV.33}$$

La matrice L_p ne comporte que des 1 sur sa diagonale, donc elle est inversible. Si les variances d'innovation sont non nulles, D_p et R_p sont également inversibles et (IV.33) fournit

$$\mathrm{D}_p^{-1} = \mathrm{L}_p^{-1}\,\mathrm{R}_p^{-1}\,\mathrm{L}_p^{-t},$$

ou encore

$$\mathrm{R}_p^{-1} = \mathrm{L}_p\,\mathrm{D}_p^{-1}\,\mathrm{L}_p^{\mathrm{t}},$$

qui n'est autre qu'une décomposition LDU de la matrice R_p^{-1} :

$$\mathrm{R}_p^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_p(1) & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_p(p) & \dots & -a_1(1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_p^{-2} & & & \\ & \varepsilon_{p-1}^{-2} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \varepsilon_1^{-2} \\ & & & & \varepsilon_0^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a_p(1) & \dots & -a_p(p) \\ 0 & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & -a_1(1) \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{IV.34}$$

Déterminant et inversibilité

Notons aussi que le déterminant de R_p s'écrit

$$\det(\mathrm{R}_p) = \prod_{i=1}^{p} \varepsilon_i^2. \tag{IV.35}$$

On peut en déduire qu'une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de la matrice R_p s'écrit

$$\varepsilon_i^2 > 0, \quad i = 0, \dots, p \tag{IV.36}$$

ou encore

$$|k_i| < 1, \quad i = 0, \dots, p. \tag{IV.37}$$

Mais contrairement à ce que pourrait laisser paraître l'expression (IV.35), les $\{\varepsilon_i^2\}$ ne sont pas les valeurs propres de la matrice R_p.

Pour terminer, mentionnons que le caractère défini positif d'une matrice de Toeplitz n'est pas nécessaire au fonctionnement correct de l'algorithme de Levinson, qui permet d'inverser toute matrice de Toeplitz inversible. Les quantités ε_i^2 deviennent alors des réels non nuls (pas forcément positifs). Mais cette situation est rare en traitement de signal car une matrice qui n'est pas définie non négative n'est pas une matrice de covariance.

IV.3.3 Interprétation géométrique

Au §IV.3.1, nous avons établi la récurrence de l'algorithme de Levinson par manipulation algébrique, sans référence explicite à son interprétation géométrique dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Cette présentation a l'avantage de la compacité et de la minimalité structurelle, mais il n'est pas inutile de la compléter par son équivalent géométrique, dont la principale qualité est de rendre plus naturelles les étapes de l'algorithme et de donner une interprétation à des variables qui ne sont pour l'instant que des intermédiaires de calcul dans la récurrence.

Comme au §IV.3.1, supposons résolu le problème à l'ordre $p-1$: on dispose du régresseur $\boldsymbol{a}_{p-1}$ tel que la prédiction à un instant quelconque k s'écrive $\widehat{X}_{p-1}^k = \boldsymbol{a}_{p-1}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{X}_{p-1}^{k-1}$, et que $E_{p-1}^k = X_k - \widehat{X}_{p-1}^k = \boldsymbol{b}_{p-1}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{X}_p^k$ soit orthogonal à J_{p-1}^{k-1}, sous-espace engendré par $\boldsymbol{X}_{p-1}^{k-1}$. On dispose également de la variance d'innovation associée ε_{p-1}^2.

La prédiction $\widehat{X}_p^k$ à l'ordre p est obtenue par projection de X_k sur J_p^{k-1}, sous-espace engendré par $\boldsymbol{X}_p^{k-1} = \left[(\boldsymbol{X}_{p-1}^{k-1})^{\mathrm{t}} | X_{k-p}\right]^{\mathrm{t}}$. Si la variable X_{k-p} était orthogonale aux variables $X_{k-n} (n < p)$

qui composent $\boldsymbol{X}_{p-1}^{k-1}, \widehat{X}_p^k$ serait simplement la somme des projections de X_k sur J_{p-1}^{k-1} (c'est-à-dire $\widehat{X}_{p-1}^k$) et sur la direction de X_{k-p}. Mais le raisonnement qu'on ne peut pas tenir sur X_{k-p} est valable pour B_{p-1}^{k-p}, orthogonal à J_{p-1}^{k-1} dans J_p^{k-1} :

$$\widehat{X}_p^k = \widehat{X}_{p-1}^k + \frac{\langle X_k, B_{p-1}^{k-p}\rangle}{\langle B_{p-1}^{k-p}, B_{p-1}^{k-p}\rangle}\, B_{p-1}^{k-p}. \tag{IV.38}$$

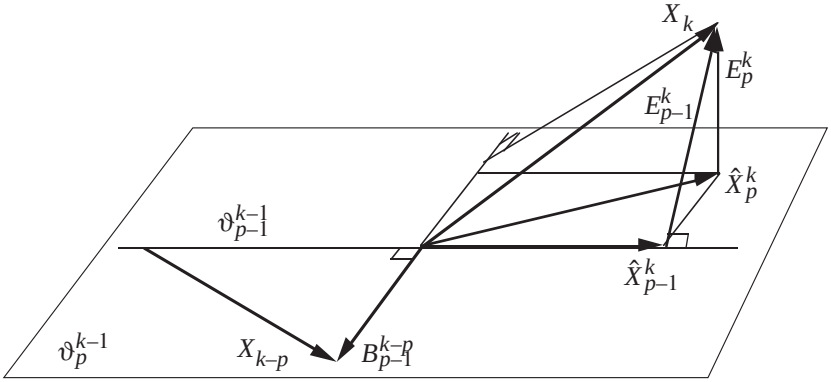

Fig. IV.3. *Interprétation géométrique*

En principe, on obtient facilement la variable B_{p-1}^{k-p} comme l'innovation associée à la projection de X_{k-p} sur J_{p-1}^{k-1}. Il s'agit exactement de calculer l'*innovation rétrograde* engendrée par la prédiction linéaire d'ordre $p-1$ de X_{k-p} par $X_{k-1}, \ldots, X_{k-p-1}$. Au titre des propriétés de la prédiction linéaire (§IV.2.3), nous avons remarqué que prédicteur et innovateur rétrogrades étaient simplement les versions retournées du prédicteur et de l'innovateur directs. Par conséquent

$$B_{p-1}^{k-p} = \boldsymbol{b}_{p-1}^{\mathrm{t}}\, \mathrm{J}_p\, \boldsymbol{X}_p^{k-1} = [X_{k-p}, \ldots, X_{k-1}]\; \boldsymbol{b}_{p-1}, \tag{IV.39}$$

$$\langle B_{p-1}^{k-p}, B_{p-1}^{k-p}\rangle = \varepsilon_{p-1}^2, \tag{IV.40}$$

et

$$\langle X_k, B_{p-1}^{k-p}\rangle = [r(p), \ldots, r(1)]\; \boldsymbol{b}_{p-1} = \boldsymbol{r}_p^{\mathrm{t}}\, \mathrm{J}_p\, \boldsymbol{b}_{p-1} \tag{IV.41}$$

qui se trouve coïncider avec la quantité γ_p définie par (IV.23) : γ_p est donc la corrélation entre la variable X_k à prédire et l'erreur rétrograde B_{p-1}^{k-p}. Or $X_k = E_{p-1}^k + \widehat{X}_{p-1}^k$ et $B_{p-1}^{k-p} \perp \widehat{X}_{p-1}^k$, donc γ_p est aussi la corrélation des innovations directes (pour prédire X_k) et rétrogrades (pour prédire X_{k-p}), au même ordre $p-1$:

$$\gamma_p = \mathrm{E}(B_{p-1}^{k-p}\, E_{p-1}^k) \tag{IV.42}$$

L'équation de récurrence (IV.38) s'écrit finalement

$$\widehat{X}_p^k = \widehat{X}_{p-1}^k + k_p\, B_{p-1}^{k-p}, \tag{IV.43}$$

dans laquelle la quantité k_p définie par (IV.26) s'interprète comme un coefficient de corrélation normalisé :

$$k_p = \frac{\langle B_{p-1}^{k-p}, E_{p-1}^k\rangle}{\|B_{p-1}^{k-p}\|\, \|E_{p-1}^k\|}. \tag{IV.44}$$

En retranchant (IV.38) à X_k, on trouve une récurrence équivalente sur les innovations :

$$E_p^k = E_{p-1}^k - k_p\, B_{p-1}^{k-p}, \tag{IV.45}$$

soit

$$[X_k, \ldots, X_{k-p}]\ \boldsymbol{b}_p = [X_k, \ldots, X_{k-p+1}]\ \boldsymbol{b}_{p-1} - k_p\ [X_{k-1}, \ldots, X_{k-p}]\ \mathrm{J}_p\, \boldsymbol{b}_{p-1},$$

d'où la récurrence (IV.28) entre les innovateurs $\boldsymbol{b}_{p-1}$ et $\boldsymbol{b}_p$. Il reste à remettre à jour la variance de l'innovation :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_p^2 = \mathrm{E}\big((E_p^k)^2\big) &= \mathrm{E}\big((E_{p-1}^k - k_p\, B_{p-1}^{k-p})^2\big) \\
&= \mathrm{E}\big((E_{p-1}^k)^2\big) + k_p^2\, \mathrm{E}\big((B_{p-1}^{k-p})^2\big) - 2k_p\, \mathrm{E}(E_{p-1}^k B_{p-1}^{k-p}) \\
&= \varepsilon_{p-1}^2 + k_p^2\, \varepsilon_{p-1}^2 - 2k_p^2\, \varepsilon_{p-1}^2,
\end{aligned}$$

d'où la récurrence (IV.27).

Chapitre V

Algorithmes des moindres carrés récursifs et adaptatifs

V.1 Introduction

Dans le domaine du traitement de signal, le volume de données est en général important. Ceci rend le calcul des solutions des équations normales des estimateurs malaisé en raison du problème de stockage et éventuellement de la taille des matrices à inverser. D'autre part, les signaux dépendent fréquemment du temps. Il est intéressant de pouvoir intégrer cette dépendance par rapport au temps dans le processus d'estimation de façon à définir des procédures fonctionnant en temps réel ou capables d'effectuer le traitement des données en ligne. De ce point de vue, les algorithmes permettant le calcul récurrent d'un estimateur méritent une attention particulière. De plus, nous verrons dans la suite de ce chapitre que la forme récursive peut se transformer facilement pour permettre l'estimation de paramètres évoluant lentement au cours du temps.

V.2 Moindres carrés récursifs

On dispose d'un ensemble de données $\{z_1, \ldots, z_k, \ldots\}$ correspondant au modèle linéaire suivant :

$$z_k = \boldsymbol{h}_k^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{p} + b_k \tag{V.1}$$

où $\boldsymbol{p}$ est le vecteur des paramètres inconnus de dimension $M, \boldsymbol{h}_k$ est un vecteur de régression supposé connu à l'instant k et $\{b_k\}$ est un bruit gaussien centré. A l'instant N, on peut obtenir un estimateur du vecteur $\boldsymbol{p}$ en étudiant le problème global constitué de l'ensemble des équations d'observation (V.1) pour $k = 1$ à N, qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\boldsymbol{z}_N = \mathrm{H}_N\, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}_N \tag{V.2}$$

où $\boldsymbol{z}_N = [z_1, \ldots, z_N]^{\mathrm{t}}$ est le vecteur des observations de dimension N et $\mathrm{H}_N = [\boldsymbol{h}_1 | \ldots | \boldsymbol{h}_N]^{\mathrm{t}}$ une matrice $N \times M$. On veut réaliser l'estimation du vecteur paramètre au sens du critère des moindres carrés pondérés (voir II.2.3) :

$$J(\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{z}_N - \mathrm{H}_N\, \boldsymbol{p})^{\mathrm{t}}\, \mathrm{Q}_N\, (\boldsymbol{z}_N - \mathrm{H}_N\, \boldsymbol{p}). \tag{V.3}$$

où Q_N est une matrice de pondération diagonale : $(\mathrm{Q}_N)_{kl} = q_k \delta(k - l)$.

Le vecteur des paramètres estimés $\widehat{\boldsymbol{p}}_N$ au sens de ce critère doit satisfaire l'équation normale :

$$(\mathrm{H}_N^{\mathrm{t}}\, \mathrm{Q}_N\, \mathrm{H}_N)\, \widehat{\boldsymbol{p}}_N = \mathrm{H}_N^{\mathrm{t}}\, \mathrm{Q}_N\, \boldsymbol{z}. \tag{V.4}$$

L'indice N indique que l'estimateur prend en compte les observations $\{z_1, \ldots, z_N\}$. La solution $\widehat{\boldsymbol{p}}_N$ s'obtient donc en inversant la matrice $\mathrm{H}_N^{\mathrm{t}}\,\mathrm{Q}\,\mathrm{H}_N$, ce qui nécessite de l'ordre de M^3 opérations[1].

A l'instant $N+1$, on effectue une nouvelle observation. Pour obtenir le nouvel estimateur $\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1}$ il faut à nouveau résoudre l'équation normale formée du système (V.2) et de la nouvelle équation d'observation

$$z_{N+1} = \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{p} + b_{N+1}. \tag{V.5}$$

Ce calcul nécessite l'inversion de la matrice normale à l'instant $N+1$: $\mathrm{H}_{N+1}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{Q}_{N+1}\,\mathrm{H}_{N+1}$. On va montrer qu'il est possible d'éviter cette nouvelle inversion et d'exploiter le résultat obtenu pour les N observations précédentes pour déduire au moindre coût le nouvel estimateur.

V.2.1 Algorithme des moindres carrés récursifs

La définition des équations de l'algorithme des moindres carrés récursifs repose dès lors essentiellement sur des manipulations d'algèbre matricielle et en particulier sur l'utilisation du lemme d'inversion matricielle (III.19).

A l'instant N, notons $\mathrm{P}_N = (\mathrm{H}_N^{\mathrm{t}}\,\mathrm{Q}_N\,\mathrm{H}_N)^{-1}$ la matrice inverse de la matrice normale. A l'issue du calcul de l'instant N, on suppose cette matrice connue, ainsi que l'estimateur

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_N = \mathrm{P}_N\,\mathrm{H}_N^{\mathrm{t}}\,\mathrm{Q}_N\,\boldsymbol{z}_N. \tag{V.6}$$

L'estimateur à l'instant $N+1$ vérifie quant à lui :

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1} = \mathrm{P}_{N+1}\,\mathrm{H}_{N+1}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{Q}_{N+1}\,\boldsymbol{z}_{N+1}. \tag{V.7}$$

On applique un découpage par blocs aux trois derniers termes :

$$\mathrm{H}_{N+1}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{Q}_{N+1}\,\boldsymbol{z}_{N+1} = \left[\mathrm{H}_N^{\mathrm{t}} \,|\, \boldsymbol{h}_{N+1}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{Q}_N & 0 \\ \hline 0 & q_{N+1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{z}_N \\ \hline z_{N+1} \end{array}\right] = \mathrm{H}_N^{\mathrm{t}}\,\mathrm{Q}_N\,\boldsymbol{z}_N + q_{N+1}\,\boldsymbol{h}_{N+1}\,z_{N+1}. \tag{V.8}$$

Le même découpage nous donne :

$$\mathrm{H}_{N+1}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{Q}_{N+1}\,\mathrm{H}_{N+1} = \left[\mathrm{H}_N^{\mathrm{t}} \,|\, \boldsymbol{h}_{N+1}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{Q}_N & 0 \\ \hline 0 & q_{N+1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathrm{H}_N \\ \hline \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}} \end{array}\right] = \mathrm{H}_N^{\mathrm{t}}\,\mathrm{Q}_N\,\mathrm{H}_N + q_{N+1}\,\boldsymbol{h}_{N+1}\,\boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}},$$

donc :

$$\mathrm{P}_{N+1} = (\mathrm{H}_N^{\mathrm{t}}\,\mathrm{Q}_N\,\mathrm{H}_N + q_{N+1}\,\boldsymbol{h}_{N+1}\,\boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}})^{-1}.$$

En appliquant le lemme d'inversion de matrice (III.19) à cette expression, on obtient

$$\mathrm{P}_{N+1} = \mathrm{P}_N - \frac{1}{r_{N+1}}\,(\mathrm{P}_N\,\boldsymbol{h}_{N+1}\,\boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{P}_N), \tag{V.9}$$

en notant :

$$r_{N+1} = \frac{1}{q_{N+1}} + \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{P}_N\,\boldsymbol{h}_{N+1}. \tag{V.10}$$

Il suffit maintenant de faire le produit terme à terme des expressions (V.8) et (V.9) et d'utiliser (V.6) pour réécrire (V.7) sous la forme :

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1} = \\ \widehat{\boldsymbol{p}}_N + \mathrm{P}_N\,q_{N+1}\,\boldsymbol{h}_{N+1}\,z_{N+1} - \frac{1}{r_{N+1}}\,(\mathrm{P}_N\,\boldsymbol{h}_{N+1}\,\boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}}\,\widehat{\boldsymbol{p}}_N + \mathrm{P}_N\,\boldsymbol{h}_{N+1}\,\boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{P}_N\,q_{N+1}\,\boldsymbol{h}_{N+1}\,z_{N+1}).$$

[1]Noter que la constitution de cette matrice ($M^2 \times N$ opérations) est souvent beaucoup plus chère que son inversion, car $N \gg M$

En utilisant (V.10), on obtient finalement :

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1} = \widehat{\boldsymbol{p}}_N + \frac{1}{r_{N+1}} \mathrm{P}_N \, \boldsymbol{h}_{N+1} \, (z_{N+1} - \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}} \, \widehat{\boldsymbol{p}}_N) \tag{V.11}$$

Cette équation définit donc une récurrence sur le calcul de l'estimateur des moindres carrés. La table suivante résume l'algorithme des moindres carrés récursifs :

$$r_{N+1} = \frac{1}{q_{N+1}} + \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}} \, \mathrm{P}_N \, \boldsymbol{h}_{N+1} \tag{V.12}$$

$$\boldsymbol{k}_{N+1} = \frac{1}{r_{N+1}} \mathrm{P}_N \, \boldsymbol{h}_{N+1} \tag{V.13}$$

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1} = \widehat{\boldsymbol{p}}_N + \boldsymbol{k}_{N+1} \, (z_{N+1} - \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}} \, \widehat{\boldsymbol{p}}_N). \tag{V.14}$$

$$\mathrm{P}_{N+1} = \mathrm{P}_N - \frac{1}{r_{N+1}} \mathrm{P}_N \, \boldsymbol{h}_{N+1} \, \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}} \, \mathrm{P}_N \tag{V.15}$$

Remarques

L'équation de remise à jour (V.14) définit le nouvel estimateur par une modification du précédent proportionnelle à l'erreur

$$z_{N+1} - \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}} \, \widehat{\boldsymbol{p}}_N$$

qui traduit le fait que le paramètre estimé à l'instant N ne permet pas de prédire parfaitement la donnée z_{N+1}. Cette erreur est répartie sur les composantes de l'estimateur par l'application du vecteur $\boldsymbol{k}_{N+1}$, appelé « vecteur gain ». Cette structure de prédiction-correction est caractéristique des algorithmes récursifs d'estimation au second ordre.

Il est facile de constater que la matrice P_N est définie positive par définition et que, de même, le scalaire r_N est positif (car les pondérations sont positives). Ces propriétés sont utilisées pour surveiller le bon déroulement de l'algorithme et pour contrôler l'importance des erreurs numériques (erreurs d'arrondi ...) au cours des récurrences.

Notons aussi que les équations de remise à jour du gain $\boldsymbol{k}_N$ sont découplées des observations z_N et de la remise à jour de l'estimateur lui-même. Il est donc possible d'effectuer le calcul préalable de l'ensemble des valeurs de ces gains et de les utiliser pour le calcul rapide de l'estimateur à l'arrivée des données.

L'algorithme MCR nécessite de l'ordre de $4M + 2M^2$ multiplications par récursion. L'initialisation de cet algorithme est présentée en section V.2.3 ci-dessous.

V.2.2 Formules de récursion pour d'autres estimateurs

Estimateur du maximum de vraisemblance

L'algorithme (V.12-V.15) peut être également utilisé pour déterminer un estimateur au sens du maximum de vraisemblance du vecteur des paramètres, sous hypothèse de blancheur du bruit d'observation. En effet, l'équation normale dans ce cas s'écrit (voir chapitre III, équation (III.4))

$$(\mathrm{H}_N^{\mathrm{t}} \, \mathrm{R}_N^{-1} \, \mathrm{H}_N) \, \widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{MV},N} = \mathrm{H}^{\mathrm{t}} \, \mathrm{R}_N^{-1} \, (\boldsymbol{z}_N - \mathrm{E}(\boldsymbol{B}_N)). \tag{V.16}$$

Cette équation correspond à (V.4) en remplaçant la matrice de pondération Q_N par la matrice de covariance du bruit R_N^{-1} et en tenant compte, le cas échéant, de la moyenne du bruit. L'algorithme n'est applicable que lorsque le bruit est blanc au second ordre, c'est-à-dire R_N diagonale[2].

[2]En fait, il est possible d'utiliser un algorithme récursif MCR pour un bruit corrélé, en utilisant un formalisme plus proche du filtrage de Kalman. Le filtrage de Kalman fait l'objet du chapitre VI de ce cours.

Dans ce cadre statistique, il est intéressant de rappeler que la matrice P_N est la matrice de covariance de l'estimateur $\widehat{\boldsymbol{p}}_N$ (voir chapitre III, équation (III.9)) et que sa trace est le risque quadratique moyen :

$$\rho_N = \mathrm{E}\big(\|\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{MV},N} - \boldsymbol{p}\|^2\big) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{P}_N)$$

qui permet de juger de la qualité de l'estimation. L'équation (V.15) indique que le risque moyen décroît de façon monotone avec N, ce qui traduit l'amélioration de la précision de l'estimation lorsque le nombre de données croît.

Estimateur bayésien

Rappelons que l'équation normale de l'estimateur bayésien dans le cadre du théorème de Gauss-Markov est (voir équation (III.20))

$$(\mathrm{H}_N^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_N^{-1}\,\mathrm{H}_N + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1})\,(\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM},N} - \mathrm{E}(\boldsymbol{P})) = \mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_N^{-1}\,(\boldsymbol{z}_N - \mathrm{E}(\boldsymbol{B}_N)). \tag{V.17}$$

On vérifie qu'en posant

$$\mathrm{P}_N = (\mathrm{H}_N^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_N^{-1}\,\mathrm{H}_N + \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}^{-1})^{-1}, \tag{V.18}$$

dans les étapes du calcul de la section (V.2.1), on obtient les mêmes formules de récurrence.

V.2.3 Initialisation du MCR

Nous avons vu que l'algorithme MCR peut être indifféremment appliqué à un estimateur non bayésien du type maximum de vraisemblance ou à un estimateur bayésien du type maximum *a posteriori*, pour des modèles linéaires sous hypothèse gaussienne. C'est l'étape d'initialisation qui distingue les deux utilisations de cet algorithme.

Cas bayésien

Dans ce cas, l'initialisation de la procédure est immédiate. A l'instant $k = 0$, c'est-à-dire à l'instant précédent la première observation, l'estimée des paramètres est l'espérance *a priori* de $\boldsymbol{p}$ et la matrice de covariance de cet estimateur est la matrice de covariance *a priori* :

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GM},0} = \mathrm{E}(\boldsymbol{P}), \quad \mathrm{P}_0 = \mathrm{R}_{\boldsymbol{P}}.$$

Cas non bayésien

Dans ce cadre, l'initialisation du MCR doit s'effectuer en calculant le premier estimateur lorsque le nombre d'observations disponibles permet de résoudre l'équation normale. On attend donc le premier instant k pour lequel $\mathrm{H}_k^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_k^{-1}\,\mathrm{H}_k$ est inversible. Une telle initialisation présente deux inconvénients majeurs. D'une part, elle scinde le traitement en deux phases. D'autre part, elle requiert l'inversion d'une matrice d'ordre M, opération éventuellement coûteuse lorsque le nombre de paramètres à estimer est grand.

Pour ces raisons, la pratique usuelle consiste à choisir $k = 0$ comme instant initial et à estimer le paramètre par l'équation (V.17) avec

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{0}, \quad \mathrm{P}_0 = \lambda\,\mathrm{I}.$$

où λ est un facteur numérique que l'on choisit grand. On remarque que la limite de cet estimateur pour $\lambda \to \infty$ n'est autre que l'estimateur à maximum de vraisemblance. Pour λ fini, il s'agit estimateur du maximum *a posteriori* avec une matrice de covariance *a priori* très grande donc correspondant à une information *a priori* très imprécise. Au fur et à mesure que les observations sont utilisées, les valeurs du paramètre estimé par cette méthode et de sa covariance se rapprochent de celles de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

V.2.4 Exemple

On considère ici un exemple de prédiction linéaire identique à celui présenté au chapitre IV. On cherche donc à déterminer les paramètres permettant de représenter un signal aléatoire X_k sous forme d'une combinaison linéaire de ses échantillons antérieurs :

$$\widehat{X}_k = \sum_{n=1}^{M} a_n \, X_{k-n}$$

On suppose qu'on dispose de l'extrait $\{x_k, 1 \leqslant k \leqslant N\}$ d'une trajectoire de $\{X_k\}$ et que $x_k = 0, k < 1$. Le critère des moindres carrés s'écrit

$$J_N(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{t}} \, \boldsymbol{a})^2$$

où $\boldsymbol{x}_k = [x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_{k-M}]^{\mathrm{t}}$. On constitue donc à chaque instant N le vecteur des observations $[x_1, \ldots, x_N]^{\mathrm{t}}$ et la matrice $\mathrm{X}_N = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N]^{\mathrm{t}}$ et l'on applique l'algorithme MCR pour obtenir l'estimateur à maximum de vraisemblance $\widehat{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{MV},N}$ — NB : on utilise l'initialisation approchée de la section V.2.3. La figure V.1 présente l'innovation (ou erreur de prédiction), définie par :

$$x_k - \widehat{x}_k = x_k - \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{t}} \, \widehat{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{MV},N}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N$$

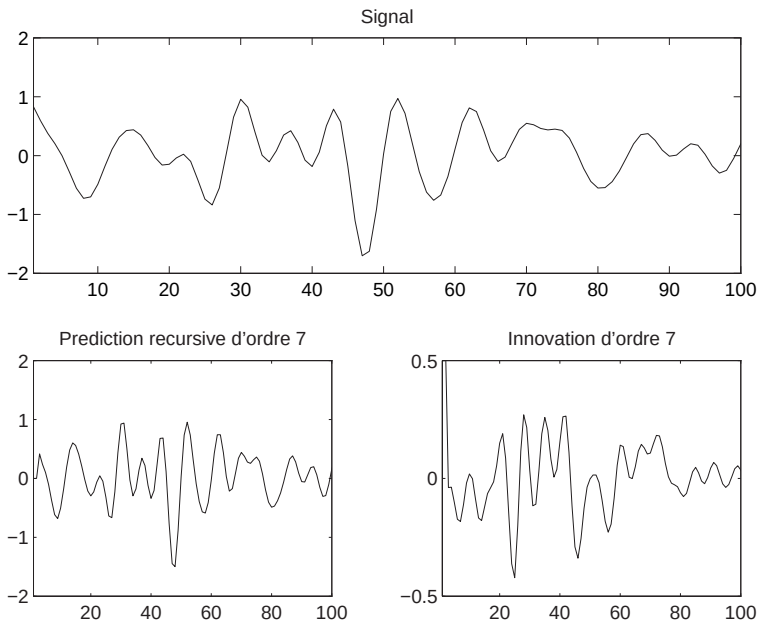

Fig. V.1. *Prédiction linéaire (dimension du prédicteur : $M = 7$). En haut 100 échantillons d'une trajectoire d'un signal stationnaire $\{X_k\}$. En dessous, le signal prédit et l'erreur de prédiction associée. Ce résultat est à comparer à celui obtenu pour le même signal en connaissant ses caractéristiques à l'ordre deux (chapitre IV).*

V.3 Algorithmes adaptatifs

Jusqu'à présent, nous avons considéré que le vecteur des paramètres à estimer était constant dans le temps. Cette hypothèse s'avère très restrictive dans la pratique car elle suppose que les

phénomènes observés sont stationnaires et bien décrits par un modèle linéaire.

Deux approches seront présentées dans ce cours pour estimer au sens des moindres carrés des paramètres évoluant avec le temps. Lorsque les variations sont inconnues mais lentes par rapport aux variations des observations, nous allons montrer qu'il est possible d'étendre l'algorithme des MCR pour s'adapter à l'évolution temporelle des paramètres.

Dans un cadre plus général (évolution même rapide des paramètres) mais si l'on dispose d'un modèle des variations des paramètres, nous verrons au chapitre VI que le filtrage de Kalman permet de réaliser une estimation au sens de l'ELMQ.

V.3.1 Position du problème

Le modèle considéré est de la forme

$$z_k = \boldsymbol{h}_k^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{p}_k + b_k \tag{V.19}$$

où $\boldsymbol{p}_k$ est le vecteur des paramètres inconnus à l'instant k de dimension M, $\boldsymbol{h}_k^{\mathrm{t}}$ est un vecteur de régression supposé connu et $\{b_k\}$ est un bruit stationnaire du second ordre centré de variance σ_k^2 (l'extension à des modèles de bruit plus généraux ne pose pas de difficultés). Le vecteur des paramètres n'est plus constant et évolue lentement au cours du temps. Pour suivre ces variations, on cherche à utiliser des algorithmes de type moindres carrés récursifs. L'expression générale de la remise à jour du paramètre estimé dans ces algorithmes récursifs est

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1} = \widehat{\boldsymbol{p}}_N + \boldsymbol{k}_{N+1}(z_{N+1} - \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}}\, \widehat{\boldsymbol{p}}_N) \tag{V.20}$$

où $\boldsymbol{k}_{N+1}$ est le gain à l'instant $N+1$. Cette équation réalise un compromis entre l'estimateur à l'instant précédent et l'information apportée par la nouvelle observation, réglé par le gain $\boldsymbol{k}_{N+1} = \mathrm{P}_N\, \boldsymbol{h}_{N+1}/r_{N+1}$. La décroissance (en termes de trace) de la matrice P_N, que nous avons remarquée en section V.2.2, implique que ce compromis est de moins en moins en faveur des nouvelles données. Ce comportement était satisfaisant pour l'estimation d'un paramètre fixe. En effet, au bout d'un moment, le paramètre étant bien estimé, les données ne peuvent plus améliorer la précision mais au contraire, à cause d'une réalisation de bruit défavorable, peuvent dégrader ponctuellement

Dans le cas où les paramètres varient, on désire au contraire que les nouvelles données modifient en permanence la valeur estimée, donc que le gain ne décroisse pas au cours du temps.

Il est intéressant d'étudier ce que cela signifie en termes de critère : Prenons le cas de l'estimation au maximum de vraisemblance pour un bruit gaussien stationnaire. L'algorithme des MCR minimise donc le critère

$$J_N(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{N} (z_k - \boldsymbol{h}_k^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{p})^2. \tag{V.21}$$

Ce critère tient compte de toutes les données avec le même poids, et, en quelque sorte, sa « mémoire » grandit avec le temps. Or les données anciennes ne correspondent pas à la valeur du paramètre actuel. Il est donc nécessaire de limiter la mémoire du critère afin de pouvoir estimer les valeurs des paramètres *localement en temps*.

V.3.2 Moindres carrés adaptatifs à oubli exponentiel

Dans cette approche, on introduit une pondération permettant de limiter l'influence des observations passées dans l'estimation du vecteur des paramètres à l'instant N. Le critère associé est défini par

$$J_N(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{N} \lambda^{N-k}\, (z_k - \boldsymbol{h}_k^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{p})^2 \tag{V.22}$$

où $0 < \lambda \leqslant 1$ est appelé *facteur d'oubli*. L'équation normale associée à ce problème s'écrit sous la forme

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda^{N-k} \, (\boldsymbol{h}_k \, \boldsymbol{h}_k^{\mathrm{t}}) \, \widehat{\boldsymbol{p}}_N = \sum_{k=1}^{N} \lambda^{N-k} \, \boldsymbol{h}_k \, z_k.$$

En notant $\mathrm{M}_N = \sum_{k=1}^{N} \lambda^{N-k} \, (\boldsymbol{h}_k \, \boldsymbol{h}_k^{\mathrm{t}})$ la matrice normale de ce problème, et $\boldsymbol{v}_N$, le second membre de l'équation précédente, on obtient facilement les récurrences suivantes :

$$\mathrm{M}_{N+1} = \lambda \, \mathrm{M}_N + \boldsymbol{h}_{N+1} \, \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}}$$

$$\boldsymbol{v}_{N+1} = \lambda \, \boldsymbol{v}_N + \boldsymbol{h}_{N+1} \, z_{N+1}.$$

On définit ensuite l'inverse de la matrice normale inverse $\mathrm{P}_N = \mathrm{M}_N^{-1}$ et l'obtention des équations de récurrence est identique à celle des équations du MCR. L'algorithme des moindres carrés adaptatifs à oubli exponentiel est donc résumé dans la table suivante :

$$r_{N+1} = \lambda + \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}} \, \mathrm{P}_N \, \boldsymbol{h}_{N+1} \tag{V.23}$$

$$\boldsymbol{k}_{N+1} = \frac{1}{r_{N+1}} \, \mathrm{P}_N \, \boldsymbol{h}_{N+1} \tag{V.24}$$

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1} = \widehat{\boldsymbol{p}}_N + \boldsymbol{k}_{N+1} \, (z_{N+1} - \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}} \, \widehat{\boldsymbol{p}}_N). \tag{V.25}$$

$$\mathrm{P}_{N+1} = \frac{1}{\lambda} \Big(\mathrm{P}_N - \frac{1}{r_{N+1}} \mathrm{P}_N \, \boldsymbol{h}_{N+1} \, \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}} \, \mathrm{P}_N \Big). \tag{V.26}$$

Le paramètre λ règle le compromis entre l'adaptativité de l'algorithme et sa stabilité vis-à-vis du bruit. Dans la pratique, il n'est pas possible de le prendre trop faible (par rapport à 1) sous peine d'instabilité grave de l'algorithme.

V.3.3 Fenêtre glissante

Cette approche consiste à ne considérer qu'un échantillon de taille fixée *a priori* d'observations passées. A l'instant N, pour une fenêtre de taille L, l'estimateur $\widehat{\boldsymbol{p}}_N^L$ est le minimum du critère

$$J_N^L(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=N-L+1}^{N} (z_k - \boldsymbol{h}_k^{\mathrm{t}} \, \boldsymbol{p})^2. \tag{V.27}$$

Pour simplifier les notations, on s'est placé dans le cas non pondéré (bruit centré stationnaire du second ordre et d'écart-type 1). Cette modification du critère conduit à une modification de l'algorithme MCR : à partir de l'instant $L+1$, il faut non seulement inclure l'information apportée par la nouvelle observation z_N, mais également supprimer l'influence de l'observation z_{N-L}. Notons $\widehat{\boldsymbol{p}}_N^L$ l'estimateur à l'instant N calculé sur une fenêtre de taille L et P_N^L sa matrice de covariance. A l'arrivée de z_{N+1}, la remise à jour par les équations du MCR (V.12–V.15) donne l'estimateur $\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1}^{L+1}$ et la matrice de covariance P_{N+1}^{L+1}.

Le calcul de P_{N+1}^L à partir de P_{N+1}^{L+1} suit à peu près les étapes vues en section V.2.1. L'estimateur cherché P_{N+1}^L satisfait l'équation normale suivante :

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1}^L = \mathrm{P}_{N+1}^L \, (\mathrm{H}_{N+1}^L)^{\mathrm{t}} \, \boldsymbol{z}_{N+1}^L, \quad \text{avec } \mathrm{P}_{N+1}^L = \big((\mathrm{H}_{N+1}^L)^{\mathrm{t}} \, \mathrm{H}_{N+1}^L\big)^{-1} \tag{V.28}$$

où $\mathrm{H}_{N+1}^L = [\boldsymbol{h}_{N-L+2}, \ldots, \boldsymbol{h}_N, \boldsymbol{h}_{N+1}]^{\mathrm{t}}$.

Un découpage en blocs en partant de l'équation normale vérifiée par $\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1}^{L+1}$ permet d'obtenir les identités suivantes :

$$(\mathrm{H}_{N+1}^{L+1})^{\mathrm{t}} \, \boldsymbol{z}_{N+1}^{L+1} = (\mathrm{H}_{N+1}^L)^{\mathrm{t}} \, \boldsymbol{z}_{N+1}^L + \boldsymbol{h}_{N-L+1} \, z_{N-L+1} \tag{V.29}$$

$$(\mathrm{P}_{N+1}^{L})^{-1} = (\mathrm{P}_{N+1}^{L+1})^{-1} - \boldsymbol{h}_{N-L+1}\,\boldsymbol{h}_{N-L+1}^{\mathrm{t}} \tag{V.30}$$

On applique le lemme d'inversion de matrice à (V.30) pour obtenir

$$P_{N+1}^{L} = P_{N+1}^{L+1} - \frac{1}{s_{N+1}}\,\mathrm{P}_{N+1}^{L+1}\,\boldsymbol{h}_{N-L+1}\,\boldsymbol{h}_{N-L+1}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{P}_{N+1}^{L+1} \tag{V.31}$$

avec

$$s_{N+1} = -1 + \boldsymbol{h}_{N-L+1}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{P}_{N+1}^{L+1}\,\boldsymbol{h}_{N-L+1}. \tag{V.32}$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation normale on obtient une équation de remise à jour classique :

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1}^{L+1} = \widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1}^{L} + \boldsymbol{g}_{N+1}(z_{N-L+1} - \boldsymbol{h}_{N-L+1}^{\mathrm{t}}\,\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1}^{L}) \tag{V.33}$$

avec le gain $\boldsymbol{g}_{N+1} = \mathrm{P}_{N+1}^{L+1}\,\boldsymbol{h}_{N-L+1}/s_{N+1}$.

Finalement l'algorithme des moindres carrés avec fenêtre glissante s'écrit :

$$r_{N+1} = 1 + \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{P}_{N}^{L}\,\boldsymbol{h}_{N+1} \tag{V.34}$$

$$\boldsymbol{k}_{N+1} = \frac{1}{r_{N+1}}\,\mathrm{P}_{N}^{L}\,\boldsymbol{h}_{N+1} \tag{V.35}$$

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1}^{L+1} = \widehat{\boldsymbol{p}}_{N}^{L} + \boldsymbol{k}_{N+1}\,(z_{N+1} - \boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}}\,\widehat{\boldsymbol{p}}_{N}^{L}). \tag{V.36}$$

$$\mathrm{P}_{N+1}^{L+1} = \mathrm{P}_{N}^{L} - \frac{1}{r_{N+1}}\,\mathrm{P}_{N}^{L}\,\boldsymbol{h}_{N+1}\,\boldsymbol{h}_{N+1}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{P}_{N}^{L} \tag{V.37}$$

$$s_{N+1} = -1 + \boldsymbol{h}_{N-L+1}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{P}_{N+1}^{L+1}\,\boldsymbol{h}_{N-L+1} \tag{V.38}$$

$$\boldsymbol{g}_{N+1} = \frac{1}{s_{N+1}}\,\mathrm{P}_{N+1}^{L+1}\,\boldsymbol{h}_{N-L+1} \tag{V.39}$$

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1}^{L} = \widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1}^{L+1} + \boldsymbol{g}_{N+1}\,(z_{N-L+1} - \boldsymbol{h}_{N-L+1}^{\mathrm{t}}\,\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1}^{L+1}) \tag{V.40}$$

$$\mathrm{P}_{N+1}^{L} = \mathrm{P}_{N+1}^{L+1} - \frac{1}{s_{N+1}}\,\mathrm{P}_{N+1}^{L+1}\,\boldsymbol{h}_{N-L+1}\,\boldsymbol{h}_{N-L+1}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{P}_{N+1}^{L+1}. \tag{V.41}$$

De manière surprenante, les deux jeux d'équations de remise à jour de l'estimateur (ajout de z_{N+1} et suppression de z_{N-L+1}) sont quasiment identiques : la seule différence réside dans les coefficients r_{N+1} et s_{N+1}. Ceci est dû à notre définition du coefficient s_{N+1}, qui vérifie $s_{N+1} < 0$, puisque, par (V.30)

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{P}_{N+1}^{L})^{-1} &= \det\big((\mathrm{P}_{N+1}^{L+1})^{-1} - \boldsymbol{h}_{N-L+1}\,\boldsymbol{h}_{N-L+1}^{\mathrm{t}}\big)\\
&= \det\big((\mathrm{P}_{N+1}^{L+1})^{-1}(\mathrm{I} - \mathrm{P}_{N+1}^{L+1}\,\boldsymbol{h}_{N-L+1}\,\boldsymbol{h}_{N-L+1}^{\mathrm{t}})\big)\\
&= \det(\mathrm{P}_{N+1}^{L})^{-1}(1 - \boldsymbol{h}_{N-L+1}\,\mathrm{P}_{N+1}^{L}\boldsymbol{h}_{N-L+1}^{\mathrm{t}})\\
&= \det(\mathrm{P}_{N+1}^{L})^{-1}(-s_{N+1})
\end{aligned}$$

et l'on conclut par la positivité des déterminants. Ce signe ne doit pas surprendre, eu égard à l'équation (V.41), qui indique qu'au passage de $\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1}^{L+1}$ à $\widehat{\boldsymbol{p}}_{N+1}^{L}$ la covariance augmente car le nombre de données utilisées diminue. Ces différences de signes entraînent une plus grande instabilité de l'algorithme aux erreurs numériques, comparé au MCR et au MCR à oubli exponentiel. Comme, par ailleurs, l'algorithme (V.34)-(V.41) nécessite deux fois plus d'opérations par récursion que le MCR à oubli exponentiel, c'est ce dernier qui est le plus utilisé dans la pratique.

V.4 Algorithme du gradient stochastique

V.4.1 Introduction

Les développements qui vont suivre concernant l'algorithme du gradient stochastique vont être limités à une application plus précise que celle étudiée jusqu'ici. Il s'agit d'un problème d'identification (voir le chapitre III), qui consiste à estimer les coefficients d'un filtre RIF connaissant l'entrée et une version bruitée de la sortie. Les équations d'observation s'écrivent

$$z_k = \boldsymbol{h}^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{x}_k + b_k, \quad 0 \leqslant k \leqslant N, \tag{V.42}$$

où les sorties z_k et les vecteurs d'entrées $\boldsymbol{x}_k = [x_{k-M+1}, \ldots, x_k]$ sont connus, et l'on cherche à estimer la réponse impulsionnelle du filtre $\boldsymbol{h} = [h_0, \ldots, h_{M-1}]$. Le bruit est supposé centré stationnaire du second ordre de variance σ^2.

Il est facile d'appliquer le MCR à ce problème. A chaque étape, il faut calculer le gain

$$\boldsymbol{k}_{N+1} = \frac{\mathrm{P}_N\, \boldsymbol{x}_{N+1}}{q_{N+1}^{-1} + \boldsymbol{x}_{N+1}^{\mathrm{t}}\, \mathrm{P}_N\, \boldsymbol{x}_{N+1}}. \tag{V.43}$$

pour un coût de calcul de l'ordre de M^2 opérations. Deux approximations de ce calcul ont été proposées :

$$\tilde{\boldsymbol{k}}_{N+1} = \lambda\, \boldsymbol{x}_{N+1} \tag{V.44}$$

et

$$\tilde{\boldsymbol{k}}_{N+1} = \frac{\mu}{\boldsymbol{x}_{N+1}^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{x}_{N+1}}\, \boldsymbol{x}_{N+1}. \tag{V.45}$$

Si le gain est calculé par (V.45) , on voit que l'algorithme obtenu est très simple, puisqu'il consiste en l'unique équation de remise à jour suivante :

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{h}}_{N+1} = \widehat{\boldsymbol{h}}_N + \frac{\mu}{\boldsymbol{x}_{N+1}^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{x}_{N+1}}\, \boldsymbol{x}_{N+1}\, (z_{N+1} - \boldsymbol{x}_{N+1}^{\mathrm{t}}\, \widehat{\boldsymbol{h}}_N),} \tag{V.46}$$

Cet algorithme est appelé algorithme du gradient stochastique (version normalisée)[3]. Il ne nécessite que $5M$ multiplications par récursion (à comparer aux $\mathrm{O}(M^2)$ multiplications par récursion des MCR).

Le terme *gradient* provient du fait que la correction

$$\boldsymbol{x}_{N+1}\, (z_{N+1} - \boldsymbol{x}_{N+1}^{\mathrm{t}}\, \widehat{\boldsymbol{h}}_N)$$

est proportionnelle au gradient d'un critère de moindres carrés. Elle peut également être interprétée comme une approximation du gradient du critère d'erreur quadratique moyenne

$$J_{\mathrm{EQM}}(h) = \mathrm{E}\big((Z_k - h * X_k)^2\big),$$

approximation obtenue en remplaçant l'espérance par une réalisation, d'où l'expression *gradient stochastique*. En fait, le principe de l'algorithme est d'assurer en même temps, par l'équation de récurrence, le moyennage temporel qui permet d'approcher le gradient de l'EQM et la minimisation du critère.

[3]On parle aussi de filtrage adaptatif et dans la littérature anglo-saxone d'algorithme LMS pour *least mean square*

V.4.2 Convergence et adaptativité

Dans ce problème d'identification, la solution de référence est la solution ELMQ, notée $\widehat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{ELMQ}}$ qui minimise le critère J_{EQM} précédent.

L'estimateur des moindres carrés $\boldsymbol{h}_{\mathrm{MV},N}$ obtenu par le MCR, converge vers $\boldsymbol{h}_{\mathrm{ELMQ}}$ pour $N \to \infty$, ce qui se traduit par la décroissance au cours du temps du vecteur gain (V.43). En revanche, le vecteur gain $\tilde{\boldsymbol{k}}_k$ du gradient stochastique n'a pas de raisons de décroître avec le temps (si le coefficient μ est fixe). L'étude de la convergence dans le cas stationnaire (signaux stationnaires, filtre invariant, coefficient μ fixe) est intéressante pour définir le domaine de variation du paramètre μ. Cette étude est très complexe et sort du cadre de ce cours : le lecteur intéressé est invité à consulter la référence [13], d'où il ressort que dans sa version normalisée (V.46), l'algorithme converge pour

$$0 < \mu < 2.$$

Si le gradient stochastique n'a pas les propriétés de convergence du MCR il est, en revanche, adaptatif : le gain ne tendant pas vers 0, les nouvelles données sont toujours prises en compte, ce qui permet l'estimation de filtres variables dans le temps. Dans la pratique, le réglage entre adaptativité et convergence est assuré par le choix du coefficient μ, qui est souvent variable dans le temps.

Ces propriétés (faible coût de calcul et adaptativité) font le succès de cet algorithme, très utilisé en pratique.

Chapitre VI

Filtrage de Kalman

VI.1 Introduction

VI.1.1 Modèle d'état

Soit un signal aléatoire vectoriel du second ordre $\{\boldsymbol{Z}_k\}$ décrit à partir de l'instant 0 par le modèle causal suivant, dit *modèle d'état* :

– équation d'observation :	$\boldsymbol{Z}_k = \mathrm{H}_k\,\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{B}_k,$	(VI.1)
– équation d'état :	$\boldsymbol{X}_{k+1} = \mathrm{F}_k\,\boldsymbol{X}_k + \mathrm{G}_k\,\boldsymbol{U}_k,$	(VI.2)

dans lequel $\{\boldsymbol{X}_k\}$ est un signal aléatoire vectoriel du second ordre appelé *état* du système ayant généré $\{\boldsymbol{Z}_k\}$ à partir du bruit blanc d'état $\{\boldsymbol{U}_k\}$ et du bruit blanc d'observation $\{\boldsymbol{B}_k\}$. Les dimensions des quantités déterministes (les matrices $\mathrm{H}_k, \mathrm{F}_k$ et G_k) et des quantités aléatoires (les vecteurs $\boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{B}_k, \boldsymbol{Z}_k$ et $\boldsymbol{U}_k$) sont constantes au cours du temps :

$$\begin{gathered}\dim \boldsymbol{X}_k = M, \quad \dim \mathrm{H}_k = N \times M, \quad \dim \boldsymbol{Z}_k = \dim \boldsymbol{B}_k = N, \\ \dim \mathrm{F}_k = M \times M, \quad \dim \boldsymbol{U}_k = P, \quad \dim \mathrm{G}_k = M \times P. \end{gathered} \tag{VI.3}$$

VI.1.2 Cadre général du filtrage de Kalman

Objectif et hypothèses

L'objectif du filtrage de Kalman est d'estimer sous une forme linéaire récurrente sur le temps (donc éventuellement adaptée à un traitement *en ligne*) le vecteur d'état $\boldsymbol{X}_k$ à l'aide de l'ensemble des observations connues jusqu'à l'instant k et des caractéristiques à l'ordre deux des signaux.

Les hypothèses qui sont faites sur les caractéristiques à l'ordre deux des signaux aléatoires en présence sont les suivantes :

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}_0) = \bar{\boldsymbol{x}}_0, \quad \mathrm{E}(\boldsymbol{B}_k) = \boldsymbol{0}, \quad \mathrm{E}(\boldsymbol{U}_k) = \boldsymbol{0}, \tag{VI.4}$$

$$\mathrm{E}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_k \\ \hline \boldsymbol{X}_0 \\ \hline \boldsymbol{U}_k \end{bmatrix} \left[\, \boldsymbol{B}_l^{\mathrm{t}} \mid \boldsymbol{X}_0^{\mathrm{t}} \mid \boldsymbol{U}_l^{\mathrm{t}} \,\right]\right) = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathrm{R}_k\delta_{kl} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \mathrm{P}_0 & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \mathrm{Q}_k\delta_{kl} \end{array}\right]. \tag{VI.5}$$

A partir de ces hypothèses, l'équation d'état (VI.2) permet de définir récursivement sur $\mathbb{N}$ la suite des vecteurs aléatoires $\{\boldsymbol{X}_k\}$, puis de déduire de l'équation d'observation (VI.1) la suite

$\{\boldsymbol{Z}_k\}$. En particulier, moyenne et covariance de $\{\boldsymbol{X}_k\}$ et de $\{\boldsymbol{Z}_k\}$ (respectivement $\bar{\boldsymbol{x}}_k, \mathrm{P}_k$ et $\bar{\boldsymbol{z}}_k, \Gamma_k$) se calculent à chaque instant sous la forme récursive

$$\bar{\boldsymbol{z}}_k = \mathrm{H}_k \bar{\boldsymbol{x}}_k, \qquad \Gamma_k = \mathrm{H}_k \, \mathrm{P}_k \mathrm{H}_k^{\mathrm{t}} + \mathrm{R}_k, \tag{VI.6}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \mathrm{F}_k \bar{\boldsymbol{x}}_k, \quad \mathrm{P}_{k+1} = \mathrm{F}_k \, \mathrm{P}_k \mathrm{F}_k^{\mathrm{t}} + \mathrm{G}_k \, \mathrm{Q}_k \, \mathrm{G}_k^{\mathrm{t}}. \tag{VI.7}$$

Dans le cas général, les signaux $\{\boldsymbol{X}_k\}$ et $\{\boldsymbol{Z}_k\}$ sont non stationnaires sur $\mathbb{N}$. Pour qu'ils soient stationnaires à l'ordre deux, la conjonction des conditions suivantes est suffisante :

1. les matrices $\mathrm{F}_k, \mathrm{G}_k, \mathrm{H}_k, \mathrm{Q}_k, \mathrm{R}_k$ sont invariantes (on les note alors respectivement $\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}, \mathrm{Q}$ et R) ;
2. F réalise un filtrage causal stable, *i.e.,* toutes ses valeurs propres sont dans le cercle unité ;
3. $\bar{\boldsymbol{x}}_0 = \mathbf{0}$ et la matrice de covariance initiale P_0 est solution de l'équation de Lyapunov

$$\mathrm{P} = \mathrm{F} \, \mathrm{P} \, \mathrm{F}^{\mathrm{t}} + \mathrm{G} \, \mathrm{Q} \, \mathrm{G}^{\mathrm{t}}. \tag{VI.8}$$

La troisième condition concerne la stationnarité de $\{\boldsymbol{X}_k\}$ à l'ordre deux. Lorsque seules les deux premières conditions sont remplies, le système est seulement invariant et les signaux $\{\boldsymbol{X}_k\}$ et $\{\boldsymbol{Z}_k\}$ se comportent asymptotiquement comme des signaux stationnaires. La covariance asymptotique P_∞ de $\{\boldsymbol{X}_k\}$ est alors solution de l'équation de Lyapunov (VI.8).

Déconvolution en ligne à l'ordre deux

La situation présentée ci-dessus correspond au cadre général rendant applicable le formalisme du filtrage de Kalman. Mais dans de nombreux cas en traitement du signal, sa mise en œuvre s'opère dans un cadre plus restreint et plus intuitif, que l'on peut décrire de la façon suivante :

— le signal observé est scalaire : $\boldsymbol{Z}_k = Z_k, N = 1$;

— le modèle est invariant : les conditions (1) et (2) sont vérifiées ;

— l'état $\boldsymbol{X}_k$ est extrait d'un signal aléatoire scalaire $\{X_k\}$, $\boldsymbol{X}_k = [X_k, \ldots, X_{k-M+1}]^{\mathrm{t}}$.

Dans ces conditions, l'état $\boldsymbol{X}_k$ est un signal autorégressif causal et le signal observé $\{Z_k\}$ est la sortie bruitée d'un filtre de réponse impulsionnelle finie $\mathrm{H}_k = \mathrm{H} = \boldsymbol{h}^{\mathrm{t}}$ de longueur M attaqué par $\boldsymbol{X}_k$. Le filtrage de Kalman résoud alors *à l'ordre deux* un problème de *déconvolution en ligne.*

L'équation d'état (VI.2) prend alors la forme particulière suivante, dans laquelle la structure de la matrice F est dite *compagne* :

$$\begin{bmatrix} X_{k+1} \\ \\ \vdots \\ \\ X_{k-M+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & & \cdots & & a_M \\ 1 & & & & 0 \\ & 1 & \mathbf{0} & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{0} & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ \\ \vdots \\ \\ X_{k-M+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} U_k. \tag{VI.9}$$

VI.1.3 Principe d'estimation

Filiation avec l'algorithme des moindres carrés récursifs (MCR)

Sous sa forme initiale (celle de Gauss et de Legendre au début du XIXe siècle), nous avons vu au chapitre II qu'un estimateur des moindres carrés $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{MC}}(\boldsymbol{z})$ minimise dans l'espace $\mathbb{R}^N$ du vecteur des observations $\boldsymbol{z}$ la distance euclidienne usuelle $\|\boldsymbol{z} - \varphi(\boldsymbol{p})\|$. Lorsque le problème est linéaire (c'est-à-dire que φ est une fonction linéaire de $\boldsymbol{p}$), le chapitre V a montré que $\widehat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{MC}}(\boldsymbol{z})$ est calculable par un algorithme des moindres carrés récursifs.

Le filtrage de Kalman (filtre de Kalman) est un algorithme de type MCR au sens où

— les problèmes abordables par filtre de Kalman (dans sa version de base) sont des problèmes linéaires et l'estimation réalisée par filtre de Kalman est également linéaire ;

— le principe de la récurrence sur le temps est conservée : les algorithmes de filtrage de Kalman sont utilisables en ligne ;

— à chaque instant, la remise à jour de l'estimateur par filtre de Kalman correspond à la minimisation d'un nouveau critère de moindres carrés (régularisé).

Par rapport au formalisme des MCR simples, le filtre de Kalman a pourtant marqué une évolution décisive en 1960 en apportant un cadre mathématique qui permet de formuler et de résoudre un nombre beaucoup plus grand de problèmes d'estimation, en particulier ceux posés par les systèmes dynamiques. Au début des années 60, le filtre de Kalman rencontra des applications immédiates dans la conception et l'aboutissement des premières missions spatiales Apollo et dans le pilotage du sous-marin Polaris sous les glaces du pôle sud. L'extension offerte par le filtre de Kalman est la suivante : les équations de remise à jour du filtrage de Kalman permettent de prendre en compte non seulement l'arrivée d'une nouvelle observation à chaque instant, mais aussi une évolution non déterministe de la quantité à estimer. Comme nous le verrons, cette double évolution s'effectue par entrelacement

— d'équations habituelles de MCR pour prendre en compte l'arrivée d'une nouvelle observation ;

— d'équations de *prédiction* pour tenir compte de la dynamique du paramètre.

Minimisation récurrente d'un risque quadratique

Le cadre naturel d'interprétation du filtrage de Kalman n'est pas celui des moindres carrés usuels, mais celui de l'estimation linéaire bayésienne au sens de l'espérance quadratique moyenne minimale : le vecteur d'état n'est pas considéré comme un simple paramètre déterministe mais comme un signal aléatoire vectoriel constitué de variables de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Si le filtrage de Kalman reste dans la famille des algorithmes MCR, c'est donc en tant qu'algorithme de MCR régularisé. Pour être plus précis, on peut montrer que le cas particulier d'un filtre de Kalman dont la dynamique est inexistante (c'est-à-dire lorsque l'équation d'état (VI.2) s'écrit $\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{X}_k$) s'identifie exactement avec le MCR bayésien du chapitre V. C'est l'apparition de la dynamique linéaire du vecteur d'état et sa prise en compte dans le formalisme de l'ELMQ qui justifie l'intérêt méthodologique et le succès pratique du filtrage de Kalman. Pour plus de détails, [18] est un bon article de synthèse qui explicite les liens entre MCR, ELMQ et filtrage de Kalman.

VI.2 Équations du filtre de Kalman

VI.2.1 Estimation linéaire dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Principe

Dans la suite, on note $\mathrm{EL}(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{Y})$ la projection composante à composante d'un vecteur $\boldsymbol{X}$ sur le sous-espace engendré par les combinaisons affines des composantes du vecteur $\boldsymbol{Y}$.

Étant donné les vecteurs successifs $\boldsymbol{z}_0, \ldots, \boldsymbol{z}_k$, le filtre de Kalman calcule le meilleur estimateur linéaire au sens de l'ELMQ, c'est-à-dire pour $\boldsymbol{Z}_0 = \boldsymbol{z}_0, \ldots, \boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{z}_k$ la projection orthogonale

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k} = \mathrm{EL}(\boldsymbol{X}_k \mid \boldsymbol{Z}_0, \ldots, \boldsymbol{Z}_k)$$

de $\boldsymbol{X}_k$ sur le sous-espace engendré linéairement par les $(k+1) \times N$ variables de $\boldsymbol{Z}_0, \ldots, \boldsymbol{Z}_k$.

Sous forme compacte, cette projection s'écrit sous la forme (II.26), mais cette écriture est malcommode car elle fait intervenir la covariance de l'ensemble des observations et la matrice d'intercorrélation entre ces observations et le vecteur d'état $\boldsymbol{X}_k$. Ces deux matrices sont difficiles à exprimer explicitement, car ce sont des caractéristiques d'ordre deux qui se déduisent indirectement des équations d'état. Dans ce formalisme, il est en fait beaucoup plus naturel de raisonner pas à pas pour établir les équations du filtrage de Kalman.

Interprétation géométrique pas à pas

— Principe de l'étape de *remise à jour* : on cherche à projeter un vecteur $\boldsymbol{X}_k$ d'éléments de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur le sous-espace linéaire ϑ_k engendré par la famille finie des variables contenues dans $\boldsymbol{Z}_0, \ldots, \boldsymbol{Z}_{k-1}, \boldsymbol{Z}_k$.

Supposons connus les éléments de la projection de $\boldsymbol{X}_k$ sur le sous-espace ϑ_{k-1} formé avant l'arrivée du vecteur $\boldsymbol{Z}_k$, et en particulier la projection

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} = \mathrm{EL}(\boldsymbol{X}_k \mid \boldsymbol{Z}_0, \ldots, \boldsymbol{Z}_{k-1})$$

elle-même. Alors on obtient $\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k}$ en ajoutant à $\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}$ la projection de $\boldsymbol{X}_k$ sur le sous-espace orthogonal à ϑ_{k-1} dans ϑ_k. Ce sous-espace est engendré par le vecteur d'innovation $\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{Z}_k - \widehat{\boldsymbol{Z}}_{k|k-1}$, où $\widehat{\boldsymbol{Z}}_{k|k-1}$ est la projection de $\boldsymbol{Z}_k$ sur ϑ_{k-1}, comme illustré par la figure VI.11.

Définissons les matrices $\mathrm{P}_{k|k-1}$ et $\mathrm{P}_{k|k}$ de covariance d'erreur d'estimation avant et après remise à jour :

$$\mathrm{P}_{k|k-1} \triangleq \mathrm{E}\big((\boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1})\,(\boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1})^{\mathrm{t}}\big), \tag{VI.10}$$

$$\mathrm{P}_{k|k} \triangleq \mathrm{E}\big((\boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k})\,(\boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k})^{\mathrm{t}}\big). \tag{VI.11}$$

La diagonale de ces matrices est formée par le carré des distances des composantes de $\boldsymbol{X}_k$ à ϑ_{k-1} et à ϑ_k dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

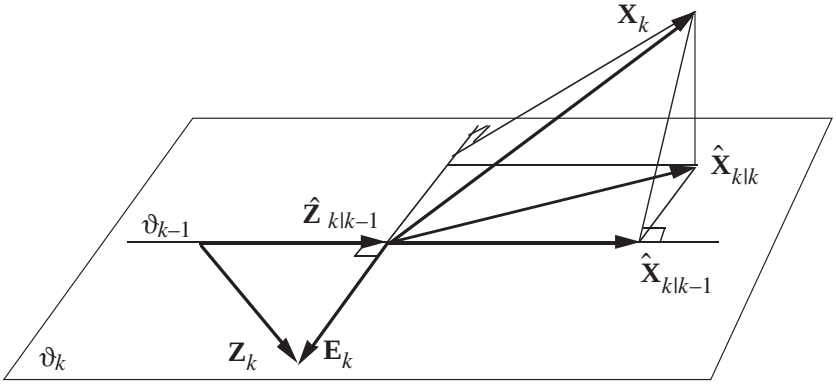

Fig. VI.1. *Principe de l'étape de remise à jour. Ici les dimensions vectorielles ont été arbitrairement réduites pour la clarté du schéma ; en général on a (au plus)* $\dim\vartheta_k = (k+1) \times N$ *;* $\boldsymbol{X}_k$ *est un vecteur de* M *variables qui doit être projeté composante par composante ; de même* $\boldsymbol{Z}_k$ *possède* N *composantes, donc* $\boldsymbol{E}_k$ *engendre un sous-espace de dimension* N *au plus.*

Dans un algorithme de MCR régularisé (voir chapitre V), on procéderait simplement par remises à jour successives de l'estimation au fur et à mesure de la prise en compte des observations. En filtrage de Kalman, il faut aussi tenir compte de l'évolution du vecteur d'état donnée par l'équation (VI.2), d'où l'étape de prédiction suivante.

— Principe de l'étape de *prédiction* : on suppose connus les éléments de la projection de $\boldsymbol{X}_k$ sur le sous-espace ϑ_k, en particulier la projection $\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k}$ elle-même. Le problème est maintenant d'en déduire $\widehat{\boldsymbol{X}}_{k+1|k}$, projection sur ϑ_k du vecteur $\boldsymbol{X}_{k+1}$ lié à $\boldsymbol{X}_k$ par l'équation d'état (VI.2). On pourra ensuite passer à l'étape de remise à jour lors de l'arrivée du vecteur $\boldsymbol{Z}_{k+1}$.

Compte tenu de l'orthogonalité de $\boldsymbol{U}_k$ avec toutes les autres variables intervenant dans le problème jusqu'à l'instant k, l'expression de $\widehat{\boldsymbol{X}}_{k+1|k}$ est très simple :

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{k+1|k} = \mathrm{F}_k\, \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k}. \tag{VI.12}$$

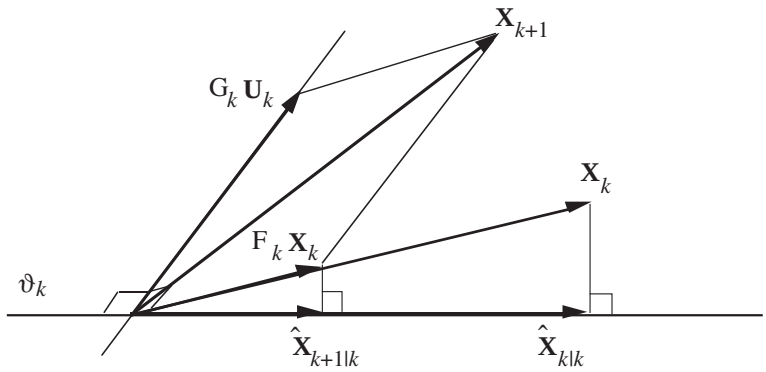

Fig. VI.2. *Principe de l'étape de prédiction. Même remarque que précédemment concernant les dimensions vectorielles*

Prédiction linéaire de $\{\boldsymbol{Z}_k\}$

Remarquons que le filtre de Kalman résoud aussi un problème annexe de prédiction linéaire du signal aléatoire $\{\boldsymbol{Z}_k\}$ lui-même. En effet, il suffit de remarquer que $\boldsymbol{B}_k$ est orthogonal à ϑ_{k-1} pour déduire de (VI.1) que la projection $\widehat{\boldsymbol{Z}}_{k|k-1}$ de $\boldsymbol{Z}_k$ sur ϑ_{k-1} s'écrit

$$\widehat{\boldsymbol{Z}}_{k|k-1} = \mathrm{H}_k\, \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}. \tag{VI.13}$$

VI.2.2 Détermination des équations

Étape de remise à jour

D'après l'interprétation géométrique effectuée ci-dessus, la remise à jour s'écrit

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k} = \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} + \mathrm{EL}(\boldsymbol{X}_k \,|\, \boldsymbol{E}_k), \tag{VI.14}$$

avec

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_k &\triangleq \boldsymbol{Z}_k - \widehat{\boldsymbol{Z}}_{k|k-1} \\ &= \boldsymbol{Z}_k - H_k\, \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}. \end{aligned} \tag{VI.15}$$

Il faut maintenant déterminer l'expression de $\mathrm{EL}(\boldsymbol{X}_k \,|\, \boldsymbol{E}_k)$. Pour cela on peut utiliser l'expression générale (II.26), qui donne

$$\mathrm{EL}(\boldsymbol{X}_k \,|\, \boldsymbol{E}_k) = \mathrm{Cov}\,(\boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{E}_k)\, \mathrm{Cov}\,(\boldsymbol{E}_k)^{-1}\, \boldsymbol{E}_k.$$

D'après (VI.15) et (VI.1), on a

$$\boldsymbol{E}_k = \mathrm{H}_k\,(\boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}) + \boldsymbol{B}_k, \tag{VI.16}$$

donc

$$\mathrm{Cov}\,(\boldsymbol{E}_k) = \mathrm{H}_k\,\mathrm{P}_{k|k-1}\,\mathrm{H}_k^{\mathrm{t}} + \mathrm{R}_k$$

et

$$\mathrm{Cov}\,(\boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{E}_k) = \mathrm{P}_{k|k-1}\,\mathrm{H}_k^{\mathrm{t}}.$$

L'étape de remise à jour de l'estimée s'écrit finalement

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k} = \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} + \mathrm{P}_{k|k-1}\,\mathrm{H}_k^{\mathrm{t}}(\mathrm{H}_k\,\mathrm{P}_{k|k-1}\mathrm{H}_k^{\mathrm{t}} + \mathrm{R}_k)^{-1}\,(\boldsymbol{Z}_k - \mathrm{H}_k\,\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}). \tag{VI.17}$$

Après remise à jour, la matrice de covariance d'erreur d'estimation devient $\mathrm{P}_{k|k}$ qui s'exprime à l'aide de (VI.17) et de (VI.16) sous la forme

$$\mathrm{P}_{k|k} = \mathrm{P}_{k|k-1} - \mathrm{P}_{k|k-1}\,\mathrm{H}_k^{\mathrm{t}}(\mathrm{H}_k\,\mathrm{P}_{k|k-1}\,\mathrm{H}_k^{\mathrm{t}} + \mathrm{R}_k)^{-1}\mathrm{H}_k\,\mathrm{P}_{k|k-1.} \tag{VI.18}$$

Étape de prédiction

L'équation (VI.12) permet de déduire $\widehat{\boldsymbol{X}}_{k+1|k}$ de $\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k}$:

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{k+1|k} = \mathrm{F}_k\,\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k.} \tag{VI.19}$$

La récurrence complète nécessite aussi d'exprimer $\mathrm{P}_{k+1|k}$ à partir de $\mathrm{P}_{k|k}$. De (VI.2) et (VI.19), on tire facilement la récurrence

$$\mathrm{P}_{k+1|k} = \mathrm{F}_k\,\mathrm{P}_{k|k}\,\mathrm{F}_k^{\mathrm{t}} + \mathrm{G}_k\,\mathrm{Q}_k\,\mathrm{G}_k^{\mathrm{t}}. \tag{VI.20}$$

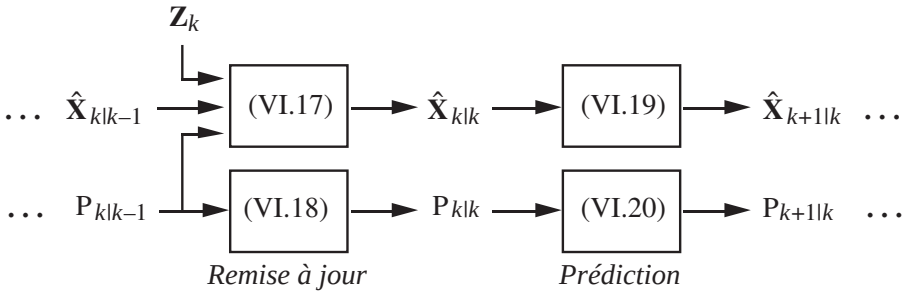

Fig. VI.3. *Illustration des étapes de récurrence*

Initialisation

Les équations du filtre de Kalman doivent être initialisées par $\widehat{\boldsymbol{X}}_{0|-1}$ et $\mathrm{P}_{0|-1}$, quantités évaluées avant l'arrivée de la première observation $\boldsymbol{Z}_0$. Par conséquent $\widehat{\boldsymbol{X}}_{0|-1}$ est simplement l'espérance non conditionnée de $\boldsymbol{X}_0$, c'est-à-dire $\bar{\boldsymbol{x}}_0$, et $\mathrm{P}_{0|-1}$ est la covariance de $\boldsymbol{X}_0$:

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{X}}_{0|-1} = \bar{\boldsymbol{x}}_0, \quad \mathrm{P}_{0|-1} = \mathrm{P}_0.} \tag{VI.21}$$

Comportement asymptotique

Dans le cas d'un système invariant, nous avons déjà mentionné le comportement asymptotique stationnaire à l'ordre deux de $\{\boldsymbol{X}_k\}$ et de $\{\boldsymbol{Z}_k\}$. De la même façon, $\{\widehat{\boldsymbol{X}}_k\}$ et $\{\widehat{\boldsymbol{Z}}_k\}$ se comportent asymptotiquement comme des signaux stationnaires. Il est important de remarquer que les équations de remise à jour de la covariance d'erreur (VI.18) et (VI.20) ne comportent pas de données dans le cas invariant : la covariance $\mathrm{P}_{k|k}$ évolue de façon déterministe vers la covariance $\mathrm{P}_{\infty|\infty}$ d'une erreur stationnaire qui vérifie

$$\mathrm{P}_{\infty|\infty}^{-1} = \mathrm{H}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}^{-1}\,\mathrm{H} + (\mathrm{F}\,\mathrm{P}_{\infty|\infty}\,\mathrm{F}^{\mathrm{t}} + \mathrm{G}\,\mathrm{Q}\,\mathrm{G}^{\mathrm{t}})^{-1}. \tag{VI.22}$$

VI.2.3 Utilisation réelle du filtrage de Kalman

Pour reprendre la distinction faite entre les situations ♡ et les situations ♠ au sujet de l'algorithme de Levinson au chapitre IV, disons que le filtre de Kalman présenté pour l'instant dans le cadre de l'ELMQ se trouve dans une situation sympathique de type ♡ : avant même d'observer la première donnée $\boldsymbol{Z}_0$, les caractéristiques statistiques à l'ordre deux $\bar{\boldsymbol{x}}_0$ et P_0 sont déjà connues ! Heureusement, le filtre de Kalman n'est pas limité à ce cadre formel.

Équations d'état

Dans la plupart des applications réelles, la situation se présente de la façon suivante : on possède des propriétés structurelles pour la suite des vecteurs d'état à estimer, sous une forme souvent qualitative ($\{\boldsymbol{X}_k\}$ est un signal plutôt « doux » ou au contraire à variations brutales, plutôt stationnaire ou plutôt à énergie finie...) et parfois quantitative (lorsque l'évolution du vecteur d'état est contrainte par des équations physiques). L'équation d'état est un modèle parfois approximatif, choisi pour traduire ces propriétés ; le bruit d'état $\{\boldsymbol{U}_k\}$ manifeste l'incertitude de ce choix et ne contient aucune signification ontologique concernant la véritable trajectoire de l'état.

De la même façon, le bruit d'observation $\{\boldsymbol{B}\}$ traduit autant le manque de confiance accordée au modèle (par exemple si l'équation d'observation (VI.1) résulte d'une linéarisation) que les erreurs de mesure.

Initialisation

Dans ces conditions, peu de choses sont connues *a priori* pour initialiser le filtrage. Il est donc naturel de traduire cet état d'ignorance par une covariance P_0 de diagonale arbitrairement grande (et $\bar{\boldsymbol{x}}_0$ quelconque). Si le comportement de l'état est supposé stationnaire, choisir $\bar{\boldsymbol{x}}_0 = \mathbf{0}$ et P_0 comme la solution de l'équation de Lyapunov (VI.8) est également justifié. Mais de toutes façons les premières estimées seront peu fiables car elles exploitent un petit nombre de données (d'où l'intérêt du lissage de Kalman évoqué au §VI.2.4).

Filtrage de Kalman asymptotique

Dans le cas d'un système invariant, le comportement asymptotique du filtre de Kalman suggère une forme économique mais approximative du filtrage, dite forme *asymptotique* : la covariance $\mathrm{P}_{\infty|\infty}$ est calculée à l'avance et substituée aux matrices $\mathrm{P}_{k|k}$ dans le filtre de Kalman standard. On construit ainsi une récurrence moins coûteuse sur les équations (VI.16) et (VI.18) seulement, sous-optimale au début du traitement, qui correspond à l'approximation d'un filtre de Kalman dynamique par le filtre à coefficients fixes vers lequel il tend.

Filtrage de Kalman étendu

En trajectographie, les observations sont rarement linéaires en fonction de l'état du mobile. Deux solutions classiques peuvent alors être retenues pour généraliser l'emploi du filtre de Kalman :

— si le mobile doit être asservi à suivre une trajectoire *nominale*, on peut linéariser l'écart entre sa trajectoire réelle et la trajectoire de référence ; c'est une situation favorable, dans laquelle on se ramène finalement à l'utilisation d'un filtre de Kalman standard.

— Faute de référence, on continue à appliquer les équations du filtre de Kalman standard en utilisant à chaque instant un développement limité au premier ordre de l'équation non linéaire autour de l'estimée courante. Ce filtre de Kalman *étendu* ne correspond plus à une méthode de projections successives ; il n'admet pas d'autre justification que son efficacité pratique entre les mains d'un utilisateur chevronné.

Problèmes de décrochage

Le filtre de Kalman permet également d'autres variantes utiles qui échappent au principe de projection linéaire. Par exemple, il est fréquent d'inclure dans les équations du filtre de Kalman un test à seuil qui compare la puissance instantanée de l'erreur de prédiction $\boldsymbol{E}_k$ avec la covariance de $\boldsymbol{B}_k$. Si l'écart est jugé anormal, on peut prévoir une commutation automatique, brutale ou progressive, vers des équations d'état mieux adaptées.

VI.2.4 Considérations économiques et extensions

Coût algorithmique

Les équations (VI.17) et (VI.18) nécessitent au minimum une fois chacun des produits matriciels suivants :

$$\begin{gathered}(N \times M) \times (M \times 1),\\ (N \times M) \times (M \times N),\\ (M \times N) \times (N \times M),\\ (N \times M) \times (M \times 1),\\ (M \times M) \times (M \times N),\end{gathered}$$

auxquels il faut ajouter l'inversion de la matrice $\mathrm{H}_k \, \mathrm{P}_{k|k-1} \mathrm{H}_k^{\mathrm{t}} + \mathrm{R}_k$ de taille $N \times N$. Quant aux équations (VI.19) et (VI.20), elles nécessitent les produits matriciels suivants :

$$\begin{gathered}(M \times M) \times (M \times 1),\\ 2 \times (M \times M) \times (M \times M),\\ (P \times P) \times (P \times M),\\ 2 \times (M \times P) \times (P \times M).\end{gathered}$$

Au total, une récurrence du filtrage de Kalman coûte de l'ordre de $N^3 + N^2M + NM^2 + M^3 + M^3 + M^2P + MP^2$ multiplications scalaires. Ce total peut sembler volumineux. En fait le coût réel de mise en œuvre reste souvent tout à fait acceptable ; d'une part parce que les observations forment la plupart du temps un signal scalaire ($N = 1$) ; d'autre part, le vecteur d'état est souvent de dimension réduite (M faible) ; enfin la structure des matrices H_k, F_k, G_k et Q_k permet fréquemment d'éviter de nombreux produits matriciels (voir l'exemple de la déconvolution d'un bruit blanc §VI.3.3).

Au total, le filtrage de Kalman standard coûte le plus souvent de l'ordre de $N^3+N^2M+NM^2$ multiplications scalaires par récurrence (M est la taille du vecteur d'état, N la taille du vecteur d'observation). Très souvent $N = 1$, auquel cas le coût est $O(M^2)$.

Forme covariance

Dans les traitements « multicanaux », la taille N du vecteur d'observation est égale au nombre de canaux à traiter. Lorsque ce nombre est important, le coût du filtre de Kalman standard devient prohibitif. Il existe une variante qui consiste à remplacer la forme « covariance » des estimateurs ELMQ par la forme « information », mathématiquement équivalente (voir le chapitre II). Selon cette modification, l'étape de prédiction n'est pas modifiée, tandis que l'étape de remise à jour devient (sous condition de régularité des matrices à inverser) :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{k|k} &= (\mathrm{P}_{k|k-1}^{-1} + \mathrm{H}_k^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_k^{-1}\,\mathrm{H}_k)^{-1},\\ \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k} &= \mathrm{P}_{k|k}^{-1}\,(\mathrm{H}_k^{\mathrm{t}}\,\mathrm{R}_k^{-1}\,\boldsymbol{Z}_k + \mathrm{P}_{k|k-1}^{-1}\,\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}).\end{aligned}$$

Cette stratégie est beaucoup moins connue et pratiquée que la forme précédente, car elle est vraiment rentable seulement si $N \gg M$. En effet, en supposant que R_k est d'inverse connue, le coût arithmétique devient alors de l'ordre de l'inversion des matrices de taille $M \times M$ telles que $\mathrm{P}_{k|k}$, soit $O(M^3)$ au lieu de $O(N^3)$.

Formes rapides

Dans le cas d'un système invariant (conditions 1. et 2. du §VI.1.2 satisfaites), il est possible de gagner environ un ordre de grandeur dans le calcul des estimées (forme covariance ou forme information) en remplaçant la remise à jour de la covariance de l'estimateur par celle de son incrément factorisé. C'est le principe de la factorisation de Chandrasekhar, clé de voûte des *algorithmes de Kalman rapides*. De multiples variantes de ces formes rapides ont été publiées depuis quinze ans, établissant divers compromis entre coût algorithmique et stabilité numérique [6].

Lissage de Kalman

Le principe du filtrage de Kalman est de calculer séquentiellement une suite d'estimées linéaires causales

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k} = \mathrm{EL}(\boldsymbol{X}_k \mid \boldsymbol{Z}_0, \ldots, \boldsymbol{Z}_k)$$

dans le cadre des équations d'état (VI.1)-(VI.2) et des hypothèses d'ordre deux présentées au §VI.1.2. Lorsqu'un calcul en ligne n'est pas nécessaire, des estimateurs *à retard fixe*

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k+L} = \mathrm{EL}(\boldsymbol{X}_k \mid \boldsymbol{Z}_0, \ldots, \boldsymbol{Z}_k, \ldots, \boldsymbol{Z}_{k+L}),$$

ou *à intervalle fixe*

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|K} = \mathrm{EL}(\boldsymbol{X}_k \mid \boldsymbol{Z}_0, \ldots, \boldsymbol{Z}_k, \ldots, \boldsymbol{Z}_K),$$

sont calculables dans le même cadre d'hypothèses et suivant le même principe de projection dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Le passage à de tels estimateurs ne peut que réduire le risque quadratique (puisque la taille du sous-espace supportant la projection augmente), au prix d'un coût de calcul accru et de la perte du caractère séquentiel. Là encore, de multiples variantes établissent des compromis entre récursivité, coût algorithmique et stabilité numérique [1].

VI.3 Utilisation en déconvolution

VI.3.1 Exemple d'application au contrôle non destructif

En contrôle industriel non destructif ainsi qu'en imagerie médicale et en prospection pétrolière, les techniques échographiques sont très utilisées parce qu'elles sont économiques et non

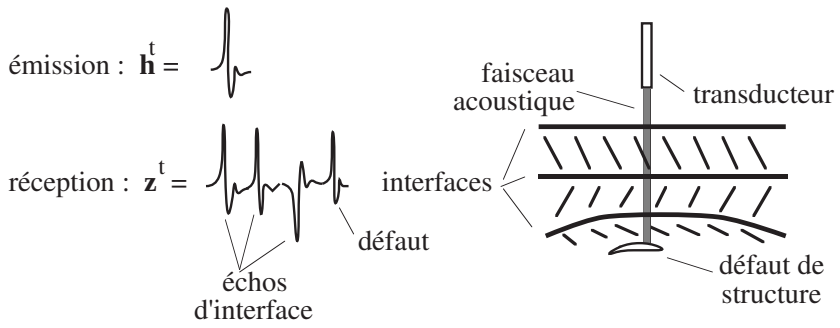

Fig. VI.4. *Échographie ultrasonore pour le contrôle non destructif*

invasives. Ces techniques consistent à émettre une onde sonore ou ultra-sonore dans le milieu étudié, et à traiter les échos reçus en surface pour en extraire des informations structurelles. Lorsque ce milieu est stratifié en couches homogènes, les seules réflexions se produisent aux interfaces entre couches.

Dans les applications mentionnées, le positionnement des interfaces et le coefficient de réflexion associé sont des paramètres cruciaux lors de l'interprétation. Or les contraintes expérimentales ne permettent pas d'émettre une onde suffisamment proche d'une impulsion pour que les échos reçus soient directement interprétables. D'où un problème de déconvolution qui correspond formellement à l'inversion d'un filtre dont la réponse impulsionnelle est la forme de l'onde incidente :

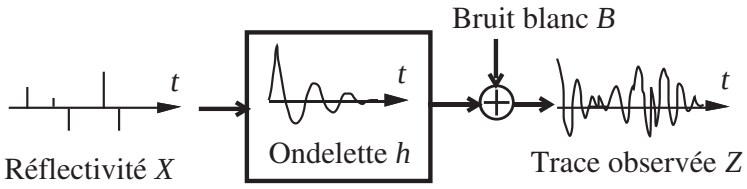

Fig. VI.5. *Schéma de principe*

VI.3.2 Équations d'état

D'une part, l'équation d'observation associée au modèle convolutif ci-dessus s'écrit

$$Z_k = \boldsymbol{h}^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{X}_k + B_k, \tag{VI.23}$$

avec $\boldsymbol{h}$ le signal de durée finie M émis par le transducteur, $\boldsymbol{X}_k = [X_k, \ldots, X_{k-M+1}]^{\mathrm{t}}$ et $\{B_k\}$ le bruit de mesure supposé blanc, centré et stationnaire faible de variance σ_B^2.

D'autre part, l'équation d'état permet de modéliser la corrélation statistique entre les impulsions. Une étude statistique menée en géophysique a montré qu'il existait une structure de corrélation passant par des valeurs négatives pour des impulsions proches [19]. On peut interpréter ce résultat en remarquant que la traversée d'une couche mince dans un matériau homogène se manifeste par la succession de deux échos d'amplitude voisine mais de signe oppposé. En résolvant l'équation normale de la prédiction pour ce modèle de corrélation (voir le chapitre IV), il serait parfaitement possible d'exprimer cette information sous la forme d'une équation d'état.

Ici nous adopterons un modèle plus simple et plus intuitif : celui d'une suite d'impulsions formant un bruit blanc centré stationnaire de variance σ^2. Ce choix conduit à la forme suivante de l'équation d'état (VI.9) :

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \mathrm{F}\,\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{g}\,U_k \tag{VI.24}$$

avec

$$\mathrm{F} = \begin{bmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ 1 & & & & 0 \\ & 1 & \mathbf{0} & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{0} & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

VI.3.3 Déconvolution par filtrage de Kalman

— Remise à jour :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k} &= \mathrm{P}_{k|k-1}\,\boldsymbol{h}, \\ r &= \boldsymbol{h}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{k} + \sigma_B^2, \\ \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k} &= \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} + \boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{Z}_k - \boldsymbol{h}^{\mathrm{t}}\,\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1})/r, \\ \mathrm{P}_{k|k} &= \mathrm{P}_{k|k-1} - \boldsymbol{k}\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{t}}/r. \end{aligned}$$

— Prédiction :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{X}}_{k+1|k} &= \mathrm{F}_k\,\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k}, \\ \mathrm{P}_{k+1|k} &= \mathrm{F}_k\,\mathrm{P}_{k|k}\,\mathrm{F}_k^{\mathrm{t}} + \sigma^2\,\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{g}^{\mathrm{t}}. \end{aligned}$$

On peut effectuer l'initialisation à l'instant $k = 0$ par $\widehat{\boldsymbol{X}}_{0|-1} = \mathbf{0}$ et $\mathrm{P}_{0|-1} \gg \mathrm{I}_M$, ou bien par $\mathrm{P}_{0|-1} = \sigma^2\,\mathrm{I}_M$ pour respecter l'hypothèse de stationnarité.

VI.3.4 Exemple

Les figures suivantes illustrent la déconvolution d'un bruit blanc par filtrage de Kalman sur un problème simulé sur 300 points.

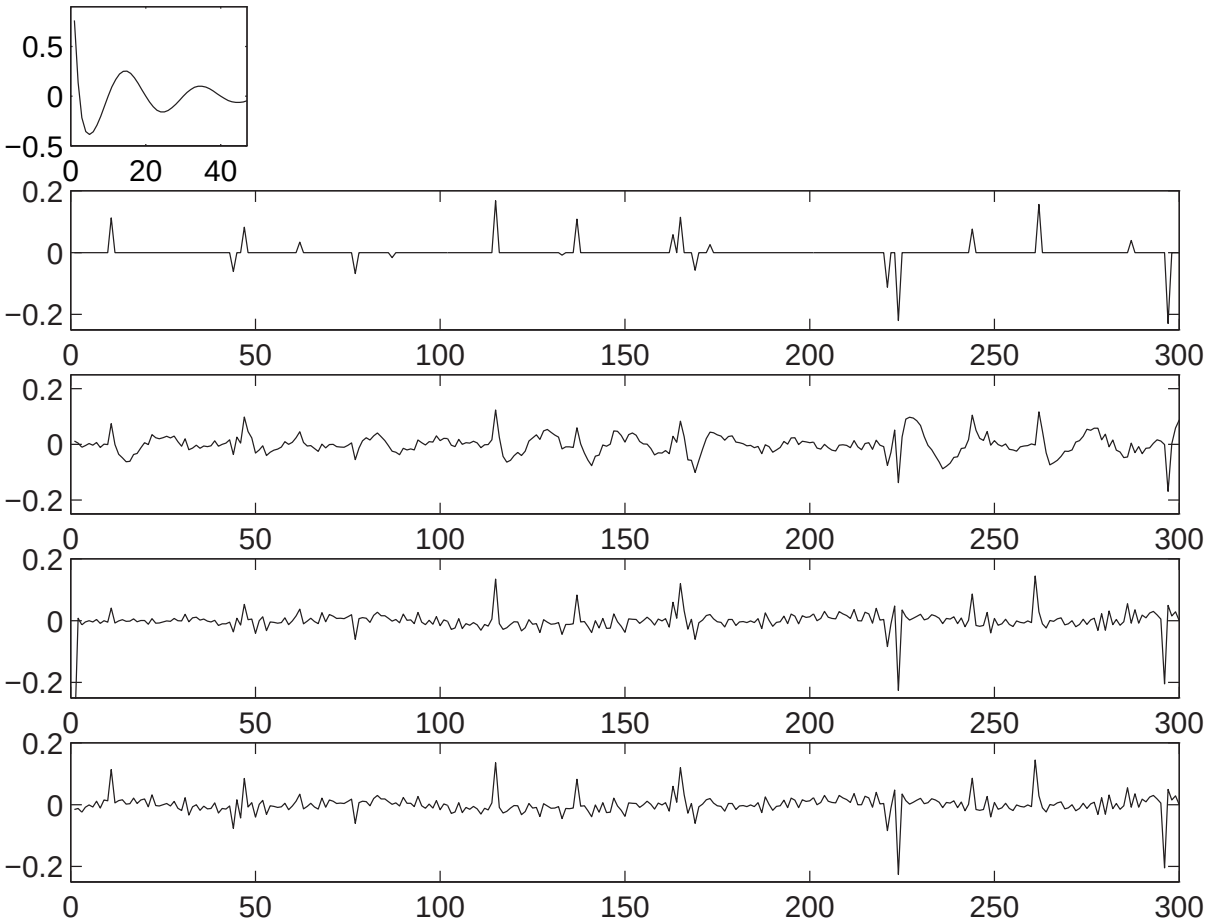

Fig. VI.6. *Les trois premières figures correspondent respectivement à l'ondelette ($M = 48$), au « vrai » signal de réflectivité et à la trace « observée », respectant le modèle de convolution (VI.23). Le rapport signal à bruit entre $\{Z_k\}$ et $\{B_k\}$ est égal à 10 dB. La figure 4 représente la suite des estimées $\widehat{X}_{k|k+M} = \mathrm{EL}(Z_0, \ldots, Z_{k+M})$ calculée par filtrage de Kalman initialisé par $\widehat{\boldsymbol{X}}_{0|-1} = \mathbf{0}$ et $\mathrm{P}_{0|-1} \gg \mathrm{I}_M$. Entre la figure 4 et la figure 5, seule la covariance initiale est modifiée : $\mathrm{P}_{0|-1} = \sigma^2 \mathrm{I}_M$ (solution de l'équation de Lyapunov). Cette modification améliore le résultat dans la phase transitoire au début du traitement.*

Bibliographie

[1] B. D. O. Anderson et J. B. Moore, 1979, *Optimal filtering,* Prentice Hall.

[2] A. Blanc-Lapierre et B. Picinbono, 1981, *Fonctions Aléatoires*, Masson, Paris.

[3] P. Brémaud, 1993, *Signaux aléatoires pour le traitement du signal et les communications*, Ellipses, Paris.

[4] P. Brémaud, 1996, *Théorie de l'estimation ponctuelle*, Notes de cours, ENSTA.

[5] D. Dacunha-Castelle et M. Duflo, 1982, *Probabilités et statistiques, 1. Problèmes à temps fixe,* Masson, Paris.

[6] G. Demoment, 1989, *Équations de Chandrasekhar et algorithmes rapides pour le traitement du signal et des images*, Traitement du Signal, **6**, 103-115.

[7] C. Fourgeaud et A. Fuchs, 1967, *Statistique*, Dunod, Paris.

[8] G.H. Golub et C. F. Van loan, 1989, *Matrix computations*, John Hopkins University Press, Baltimore.

[9] E. Jury, 1964, *Theory and application of the z transform method*, John Wiley, New York.

[10] M. Labarrère, J.-P. Krief et B. Gimonet, 1993, *Le filtrage et ses applications*, Cepadues Edition.

[11] M. J. Lighthill, 1959, *An introduction to Fourier analysis and generalized functions,* Cambridge University Press.

[12] M. Loève, 1977, *Probability theory I,* Springer Verlag, New York.

[13] O. Macchi, M. Bellanger, 1988, *Le filtrage adaptatif transverse*, Traitement du Signal, **5**, 3, p. 115–132.

[14] J. Idier, H. Piet-Lahanier, G. Le Besnerais et F. Champagnat, 1993, révisé en 2004, *Traitement numérique du signal. Première partie : Bases mathématiques*, cours, ONERA, Paris.

[15] H.W. Press, B. P. Flannery, S.A. Teukolsky et W.T. Vetterling, 1986, *Numerical recipes,* Cambridge University Press, Cambridge.

[16] L. Schwartz, 1965, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques,* Hermann, Paris.

[17] C. Soize, 1993, *Eléments mathématiques de la théorie déterministe et aléatoire du signal*, cours de l'ENSTA, Masson, Paris.

[18] H.W. Sorenson, 1970, *Least-square estimation : from Gauss to Kalman*, IEEE Spectrum, p. 63-68.

[19] A.T. Walden et J.W.J. Hosken, 1985, *An investigation of the spectral properties of primary reflection coefficients*, Geophysical Prospecting, **33**, 400-435.