

## V. Synthèse de Fourier, tomographie

### SYNTHÈSE DE FOURIER

#### ■ Définition

Soit  $x$  un signal continu sur un pavé  $\mathcal{S} = \prod_{k=1}^K [0, T_k] \subset \mathbb{R}^K$  et

$$\hat{x}(\boldsymbol{\nu}) = \int_{\mathcal{S}} x(\mathbf{s}) e^{-2i\pi \mathbf{s}^t \boldsymbol{\nu}} d\mathbf{s}$$

la transformée de Fourier de  $x$  à la fréquence  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^K$ .

La **synthèse de Fourier** est l'estimation de  $x$  à partir de l'observation partielle et bruitée de sa TF :

$$\hat{y}(\boldsymbol{\nu}) = \hat{x}(\boldsymbol{\nu}) + \hat{b}(\boldsymbol{\nu}), \quad \boldsymbol{\nu} \in \{\boldsymbol{\nu}_1, \dots, \boldsymbol{\nu}_M\}$$

(c'est un problème d'interpolation dans le domaine de Fourier)

### ■ Cas particulier : observation complète de la série de Fourier de $x$

$$\boldsymbol{\nu}_m = [m_1/T_1, \dots, m_K/T_K]^t, m_k \in \mathbb{Z} \iff \boldsymbol{\nu}_m \in \mathcal{G}$$

(les  $\mathring{x}(\boldsymbol{\nu}_m)$  sont proportionnels aux coeff. de Fourier de  $x$ )

- Observation complète (« remplissage » de  $\mathcal{G}$ ) :

Par  $\text{TF}^{-1}$ , « simple » débruitage dans le domaine spatial

$$y_{\mathbf{s}} = x_{\mathbf{s}} + b_{\mathbf{s}}, \quad \mathbf{s} \in \mathcal{S}$$

- Observation partielle : Si  $\{\boldsymbol{\nu}_1, \dots, \boldsymbol{\nu}_M\} \subset \mathcal{G}$ ,

$$\hat{x}_{\mathbf{s}}^{\text{IG}} = \left(\prod_k T_k\right)^{-1} \sum_{m=1}^M \mathring{y}(\boldsymbol{\nu}_m) e^{2i\pi \mathbf{s}^t \boldsymbol{\nu}_m}$$

$$\textcircled{1} \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{G}, \quad \hat{x}^{\text{IG}}(\boldsymbol{\nu}) = \mathring{y}(\boldsymbol{\nu}) \quad \text{si } \boldsymbol{\nu} \in \{\boldsymbol{\nu}_1, \dots, \boldsymbol{\nu}_M\}$$

$$= 0 \quad \text{sinon}$$

$$\textcircled{2} \quad \hat{x}^{\text{IG}} \text{ est de norme minimale (Parseval).}$$

### ■ Objet « discret » $\mathbf{x}$ sur $N = N_1 \times \dots \times N_K$

- L'observation complète des  $M = N$  coeffs de Fourier associés à

$$\boldsymbol{\nu}_m = [m_1/T_1, \dots, m_K/T_K]^t, m_k \in \{0, \dots, N_k\} \iff \boldsymbol{\nu}_m \in \mathcal{G}_{\mathbf{T}}$$

est équivalent par  $\text{TFD}^{-1}$  à un problème discret spatial  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{b}$ .

- Observation partielle

Si  $\{\boldsymbol{\nu}_1, \dots, \boldsymbol{\nu}_M\} \subset \mathcal{G}_{\mathbf{T}}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}^{\text{IG}}$  s'obtient en deux étapes :

$$\textcircled{1} \quad 0\text{-bourrage sur } \mathcal{G}_{\mathbf{T}},$$

$$\textcircled{2} \quad \text{TFD}^{-1} \text{ du résultat.}$$

### ■ Aspects calculatoires

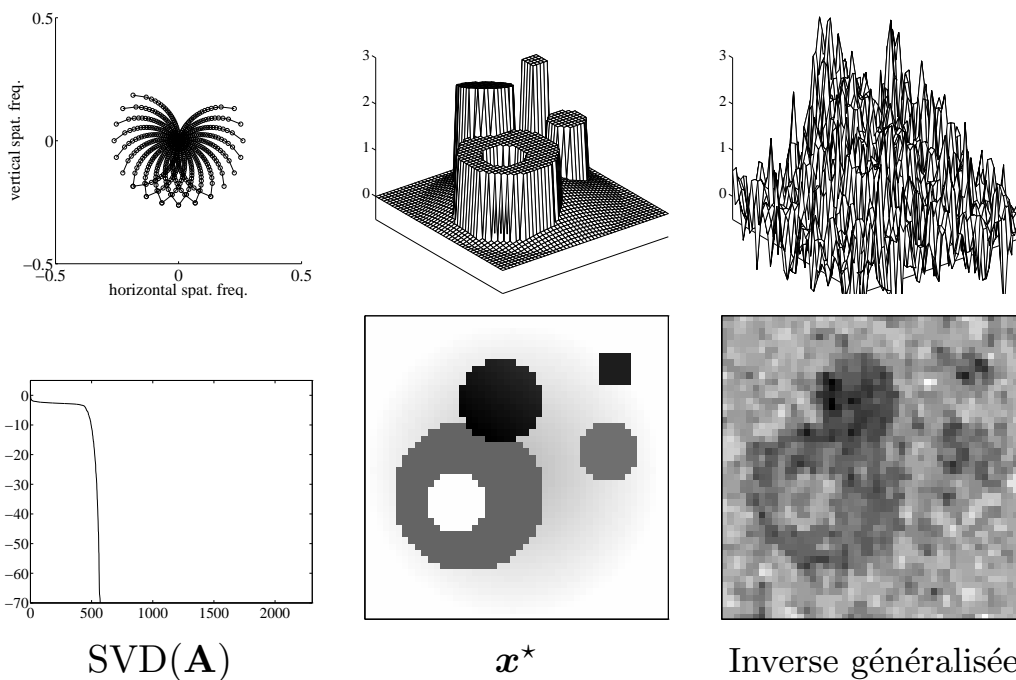
• En pratique,  $\{\nu_1, \dots, \nu_M\} \not\subset \mathcal{G}$ , mais on peut tolérer une erreur de *recalage* des observations sur  $\mathcal{G}$  par interpolation.

•  $\hat{\mathbf{x}}^{\text{IG}}$  est alors calculable par FFT.

•  $\|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2$  a pour gradient  $2\mathbf{H}^t(\mathbf{H}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{y}})$ , avec

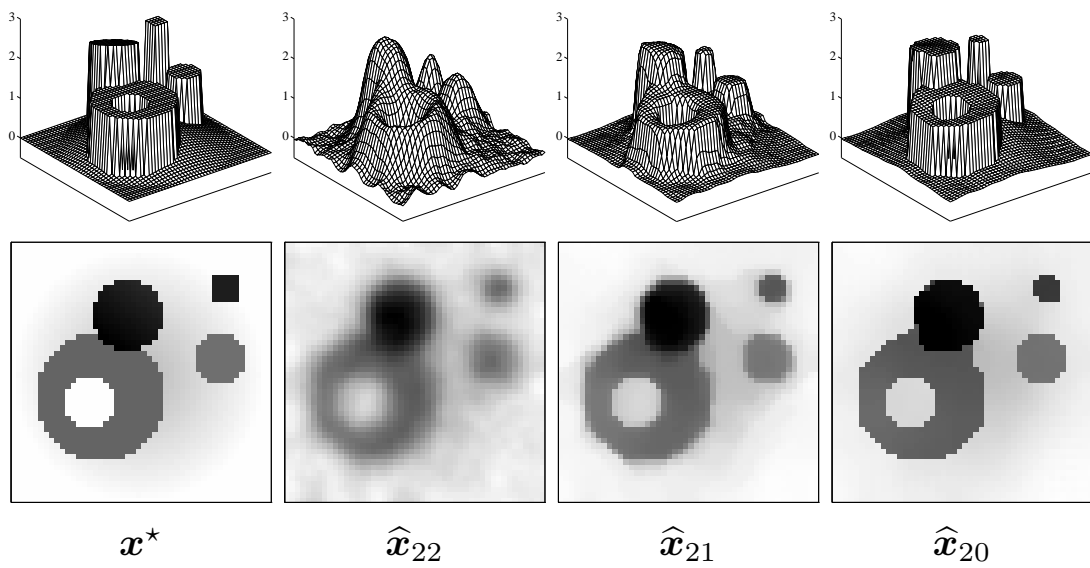
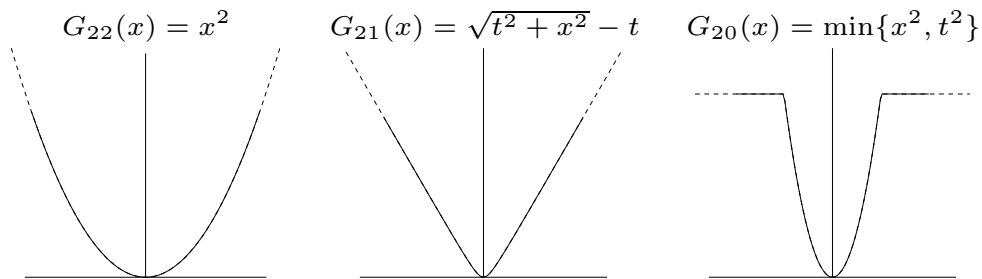
$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\leftrightarrow \text{TFD puis « extraction »} \\ \mathbf{H}^t &\leftrightarrow \text{0-bourrage puis TFD}^{-1} \end{aligned}$$

### ■ Exemple (tomographie de diffraction)

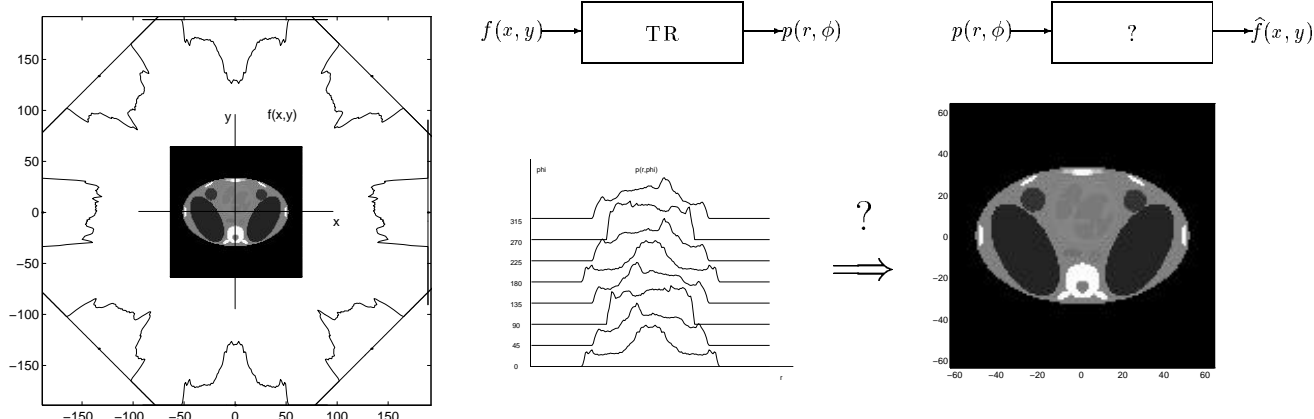


■ Solutions régularisées

$$x \geq 0, \quad F(x) = \beta \|\dot{y} - Hx\|^2 + \sum_{\{r,s\}, \|r-s\|=1} G(x_r - x_s)$$

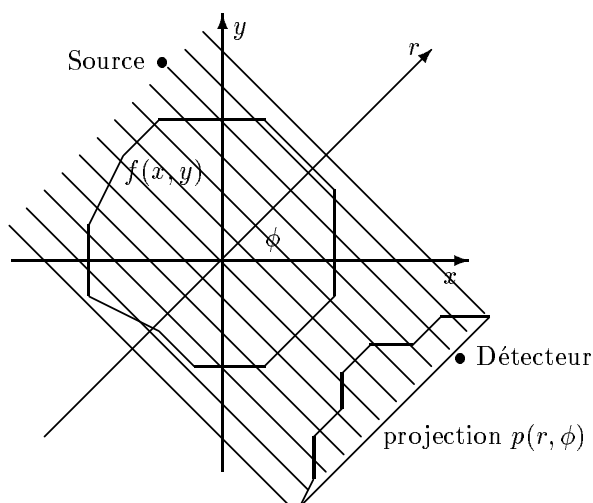


RECONSTRUCTION 2D À PARTIR DE PROJECTIONS



■ Applications :

**Tomographie à rayons X en imagerie médicale** [KAK et SLANEY 1987], gammagraphie en CND, tomographie acoustique à temps de vol, ...



$$p(r, \phi) = \iint_D \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy$$

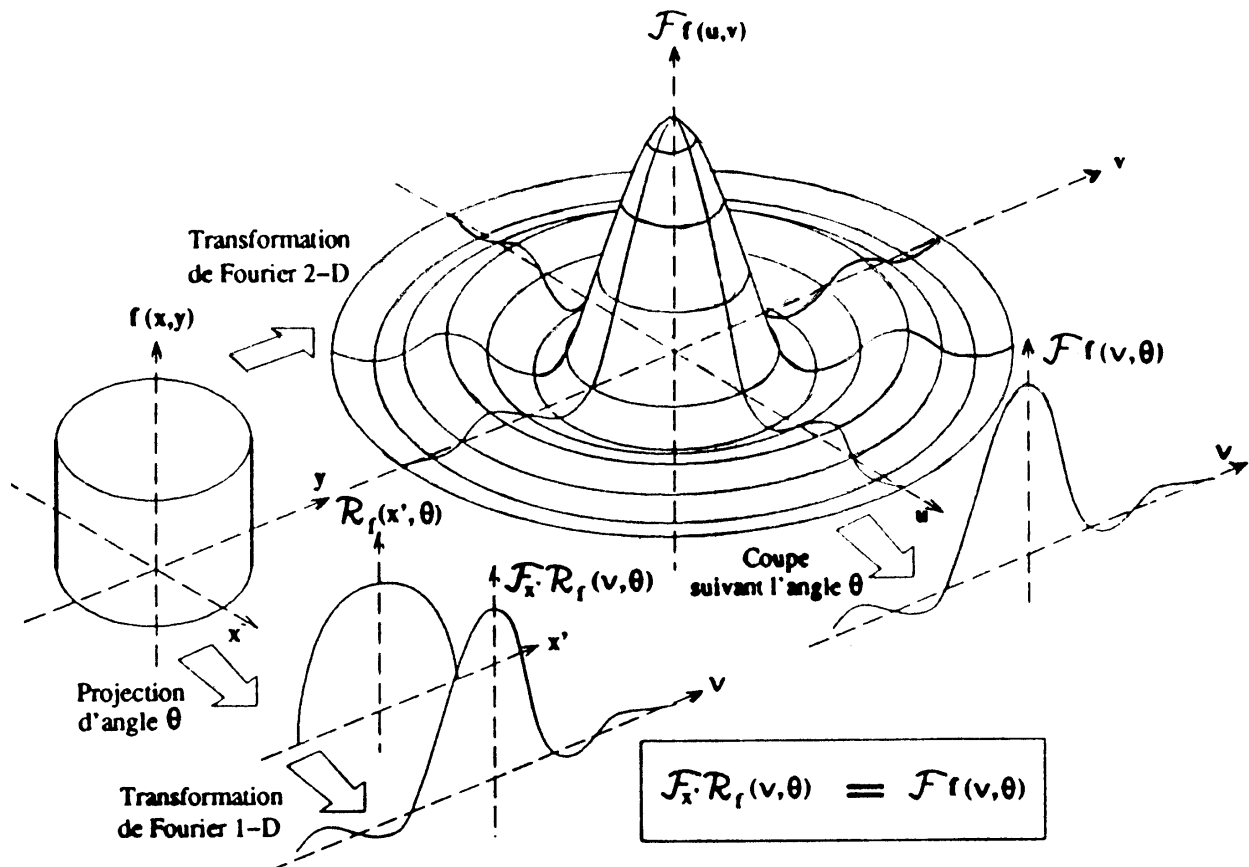
### ■ Théorème de projection

Soit  $p(r, \phi) = \iint f(x, y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy$  la transformée de Radon de la fonction continue à support borné  $f(x, y)$ .

$$\forall \phi, \quad \hat{p}(\nu, \phi) = \hat{f}(\nu \cos \phi, \nu \sin \phi)$$

- Démonstration : immédiate en utilisant

$$p(r, \phi) = \int f(r \cos \phi - u \sin \phi, r \sin \phi + u \cos \phi) du$$

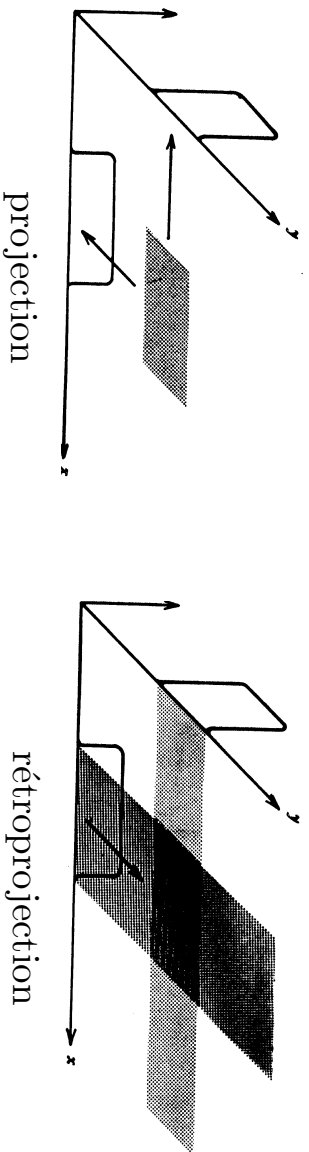


## MÉTHODES DE RECONSTRUCTION

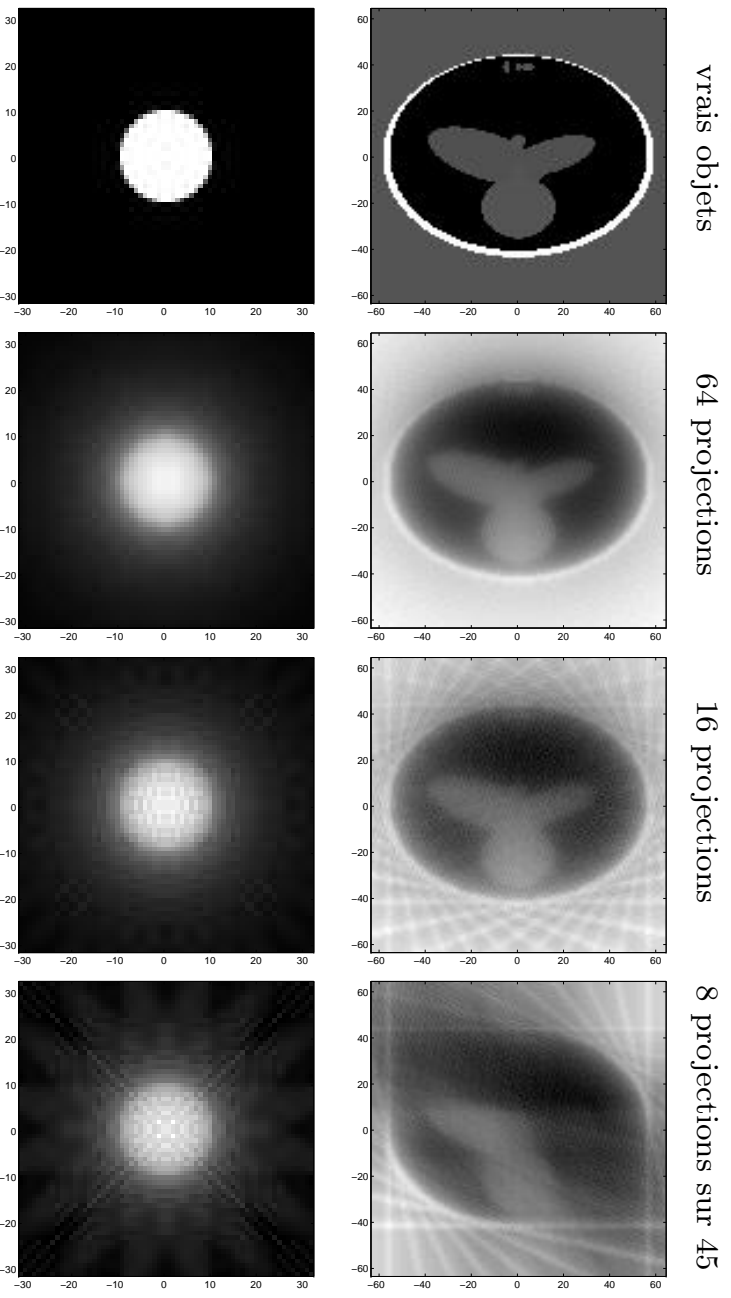
## ■ Méthodes « analytiques »

Inversion *analytique* de la transformée de Radon

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{1}{r - x \cos \phi - y \sin \phi} \frac{\partial p(r, \phi)}{\partial r} dr d\phi$$

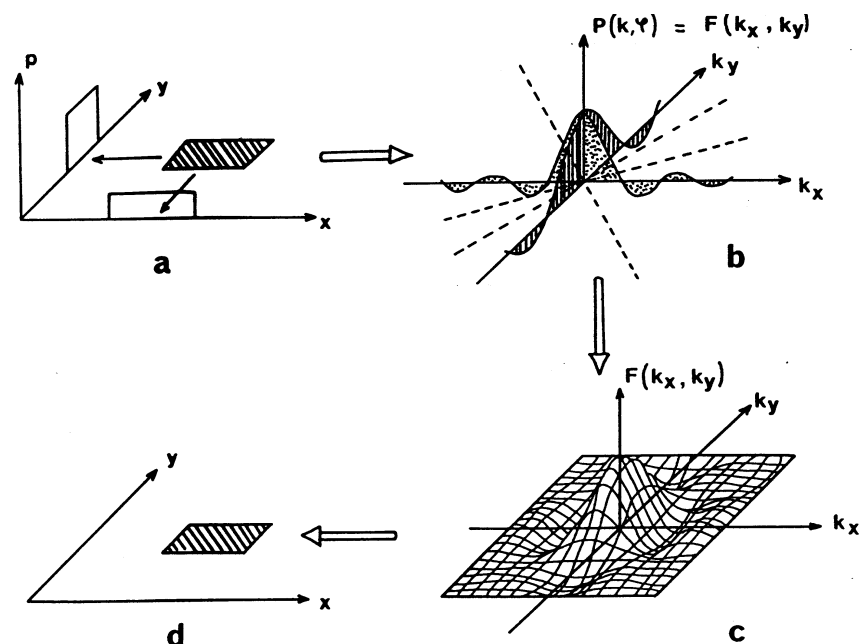
→ Méthodes de type *retroprojections filtrées* (solutions non régularisées)

## ● Exemples



## ■ Méthodes « fréquentielles »

Problème de *synthèse de Fourier* après TF des projections  
(en pratique, approximations par discrétisation/interpolation)



## ■ Méthodes « algébriques » (ART, ...) [EGGERMONT et HERMAN 1981]

- Principe : trouver  $\mathbf{x}$  tel que  $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{y}$  par projections successives :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda^{(k)} \frac{y_n - \mathbf{h}_n^t \mathbf{x}^{(k)}}{\|\mathbf{h}_n\|^2} \mathbf{h}_n,$$

avec  $\mathbf{h}_n^t$  :  $n$  - ième ligne de  $\mathbf{H}$ ,  $n = k$  modulo  $N$  et  $\lambda^{(k)} \rightarrow 1$

- Solutions non régularisées

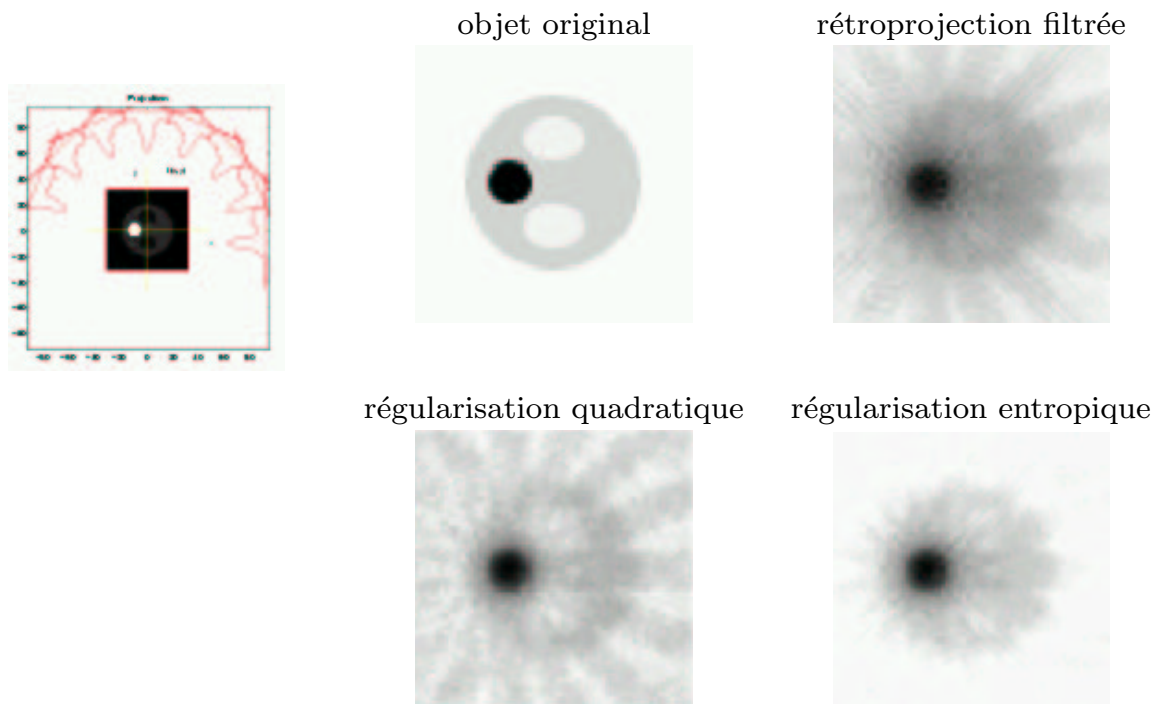
(mais certaines extensions pénalisées sont possibles [HERMAN et LENT 1976])

## ■ Approches pénalisées

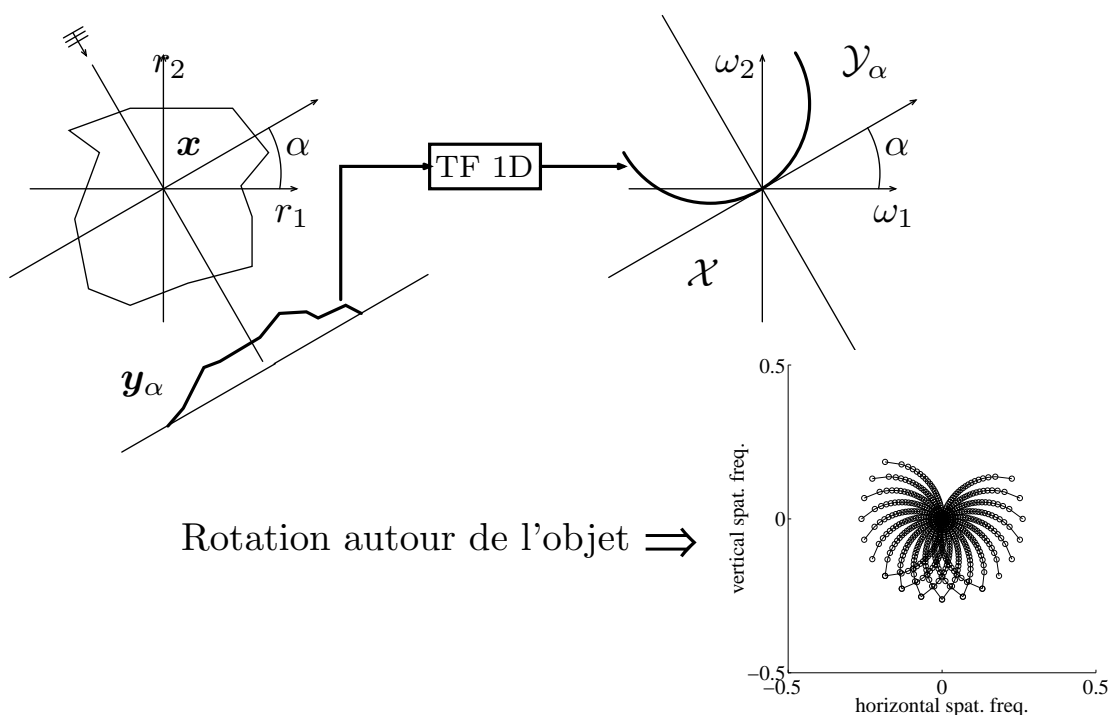
- Approche « spatiale » : minimiser  $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \alpha\Omega(\mathbf{x})$
- Approche « fréquentielle » : minimiser  $\|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{x}\|^2 + \alpha\Omega(\mathbf{x})$



## ■ Comparaisons de méthodes

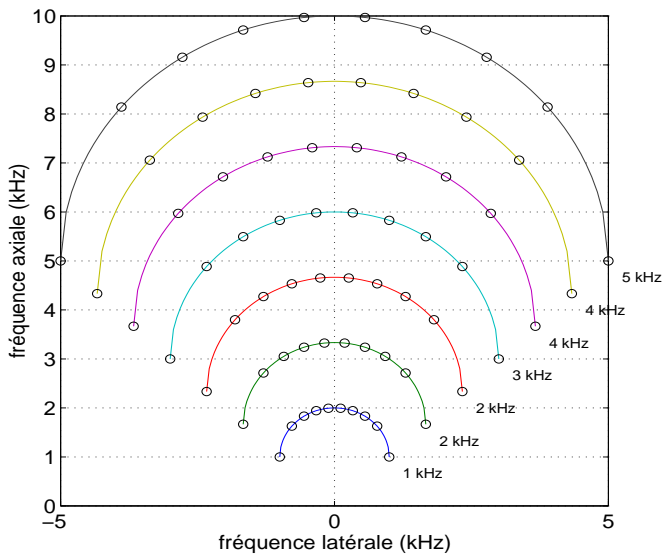


## TOMOGRAPHIE DE DIFFRACTION (ultrasons, courants de Foucault, micro-ondes)

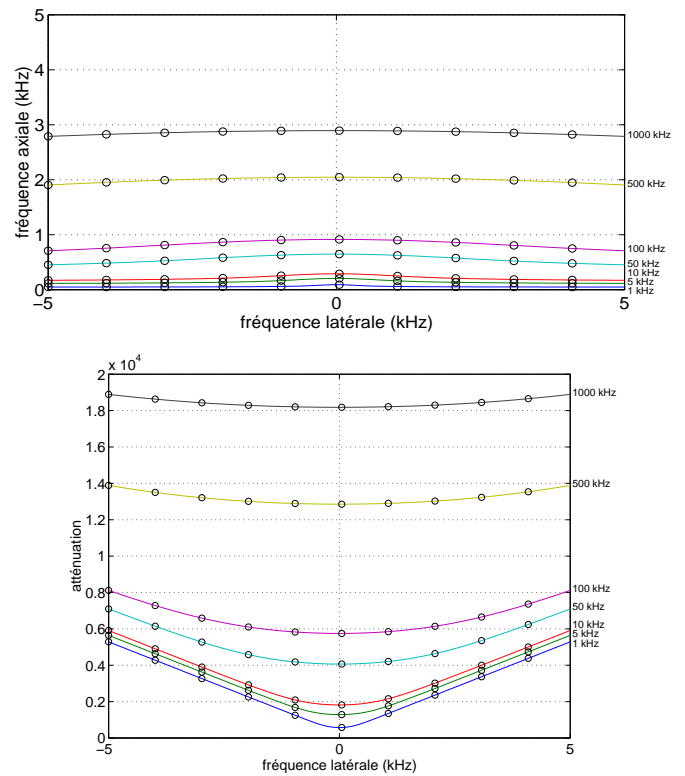


■ Angle fixe, fréquence variable

- Sans atténuation



- Avec atténuation



INTERFÉROMÉTRIE

■ Formation de voie (radioastronomie, traitement d'antenne sonar)

$$V(\mathbf{r}_{mn}) = \int B(\mathbf{s}) e^{2i\pi \mathbf{s}^t \mathbf{r}_{mn} / \lambda_0} G_m(\mathbf{s}) G_n(\mathbf{s}) d\mathbf{s}$$

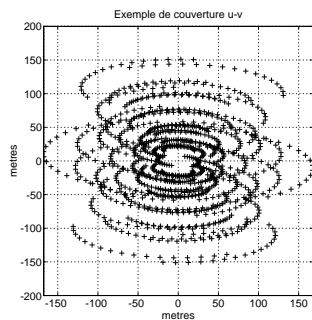
■ Aberrations de phase (radioastronomie, astronomie optique)

$$y(\mathbf{r}_{mn}) = V(\mathbf{r}_{mn}) e^{i(\theta_m - \theta_n)} + b(\mathbf{r}_{mn})$$

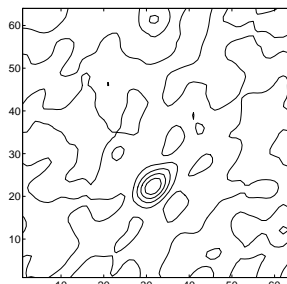
$e^{i\theta_n}$  : gain inconnu de l'antenne  $\textcircled{n}$  à l'instant de la mesure

(turbulences atmosphériques)

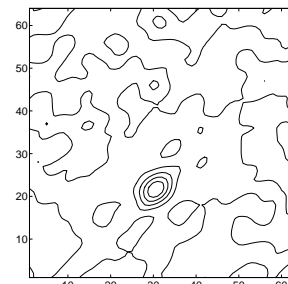
## ■ Exemple



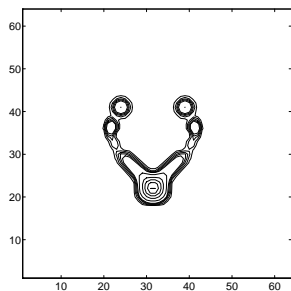
Couverture fréq. (lat. 20°)



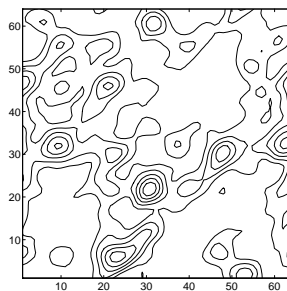
Dirty Map sans aberration



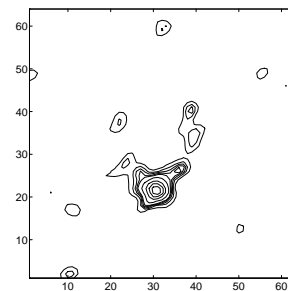
Dirty Map après correction



Carte originale



Dirty Map avec aberration

 $\hat{x}^{\text{MAP}}$  après correction

## Bibliographie

- [EGGERMONT et HERMAN 1981] P. EGGERMONT et G. HERMAN (1981), « Iterative algorithms for large partitioned linear systems, with applications to image reconstruction », *Linear Algebra and Its Applications*, **40**, 37-67.
- [HERMAN et LENT 1976] G. T. HERMAN et A. LENT (1976), « A Computer Implementation of a Bayesian Analysis of Image Reconstruction », *Information and Control*, **31**, 364-384.
- [KAK et SLANEY 1987] A. C. KAK et M. SLANEY (1987), *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE Press, New York, NY, USA.