

# III. Déconvolution de signaux piqués

## INTRODUCTION

### ■ Problème : augmentation de la résolution

Échographie, contrôle non destructif, ...

défauts ponctuels,

frontières nettes



limitation expérimentale :

bande passante des instruments

**Impossibilité théorique ?**



Déconvolution impulsionnelle

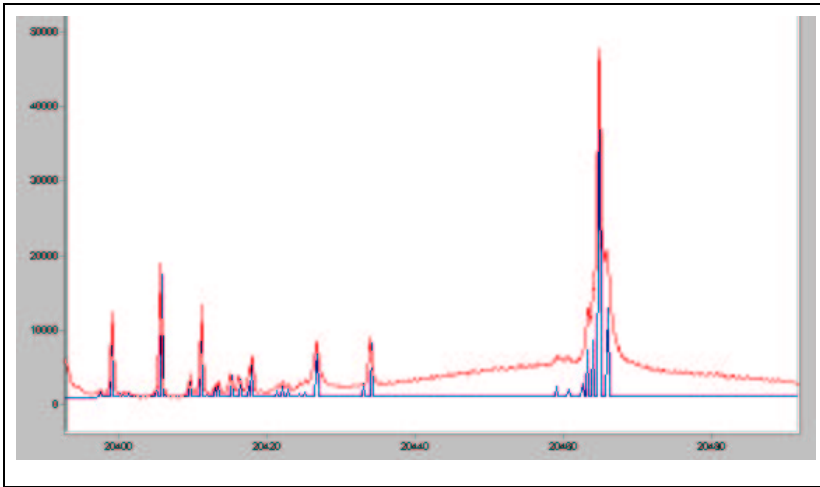
### ■ Modèle direct

mesures = « train » d'impulsions  $\star$  réponse instrumentale + bruit

## ■ Applications

- Spectrométrie

Exemple (<http://www.spectrumsquare.com>)



*Performance of RazorPick on a Raman spectrum (sulfur). The peak model was chosen to be a Lorentzian peak of the same width as the dominant peak in the spectrum. The height of each marker is proportional to the peak significance. The picker was set to pick by amplitude.*

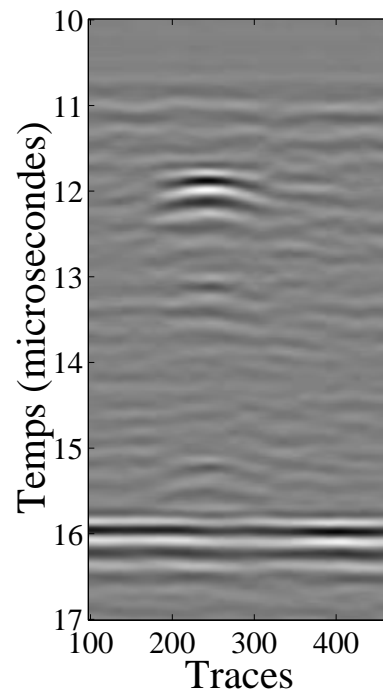
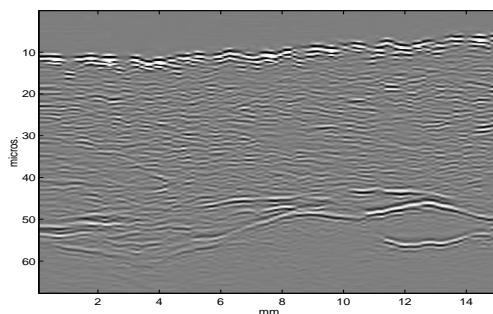
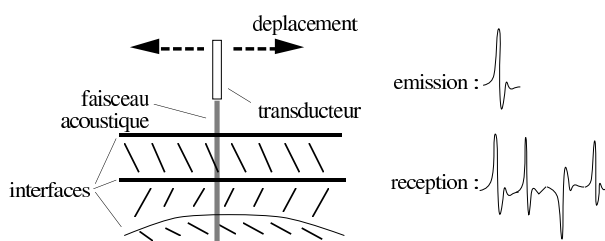
- Astronomie

Signaux recherchés : sources célestes (radio, IR ou visibles)

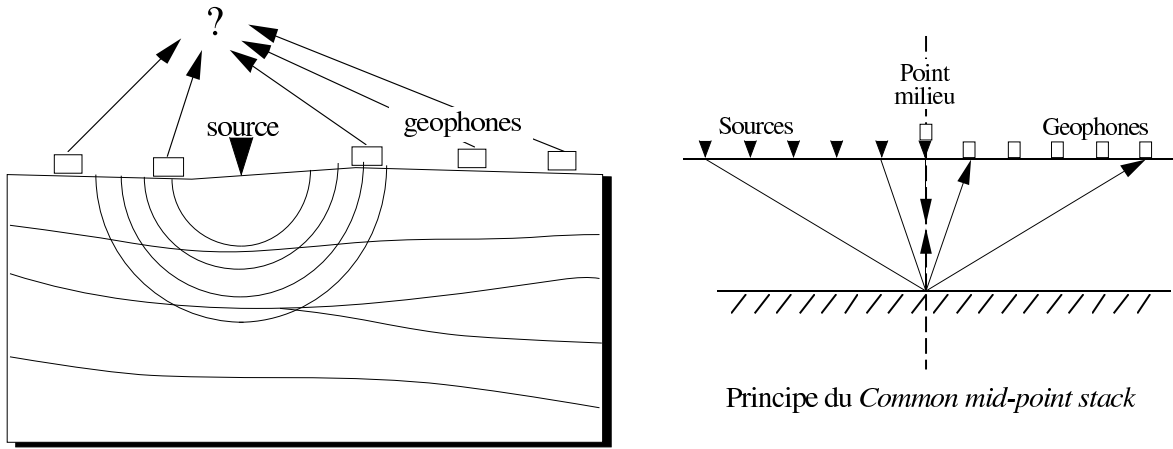
Filtre : instrument + atmosphère

Bruits : atmosphère, électronique, de photon

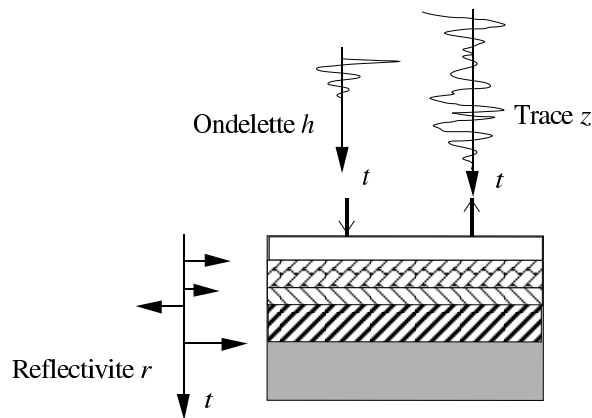
- Contrôle non-destructif et imagerie biomédicale par ultrasons



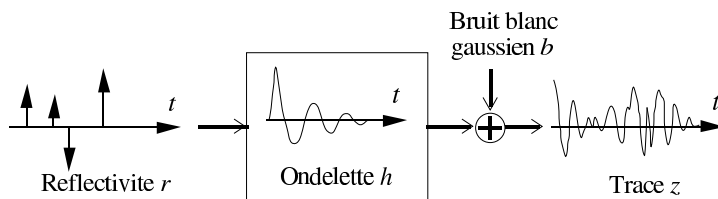
● Sismique-réflexion en géophysique



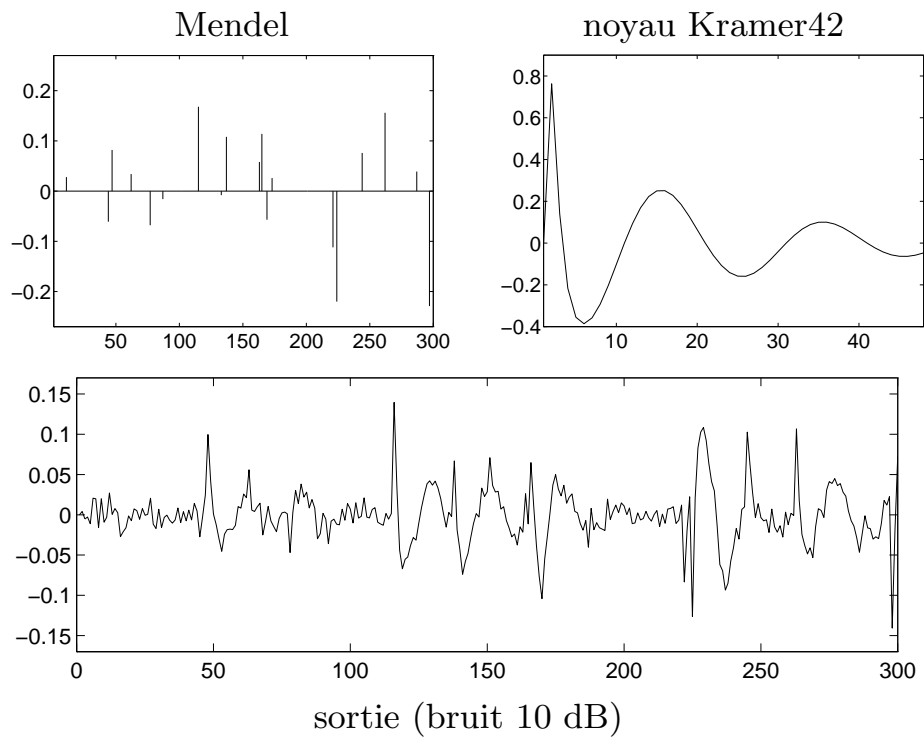
■ Adoption d'un modèle de dégradation 1D linéaire homogène



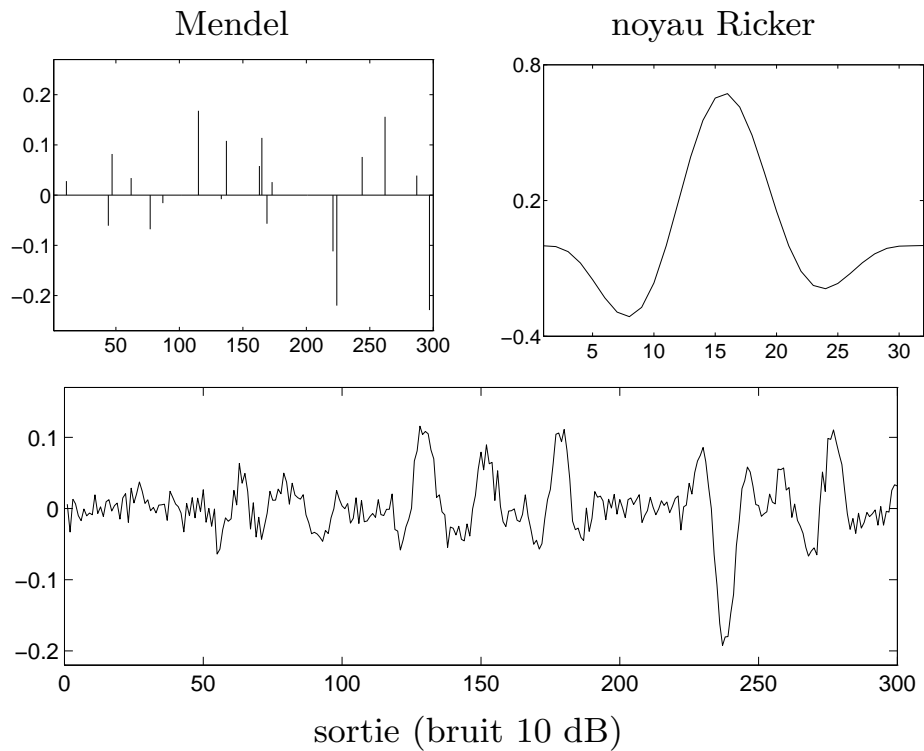
$$y = h \star r + b$$



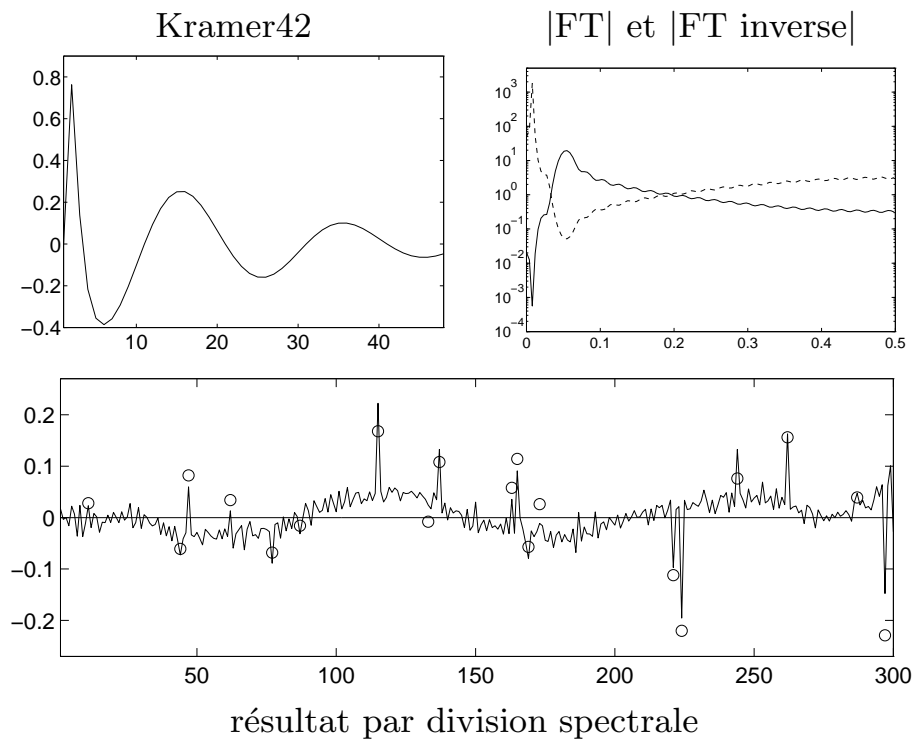
## ■ Exemple 1



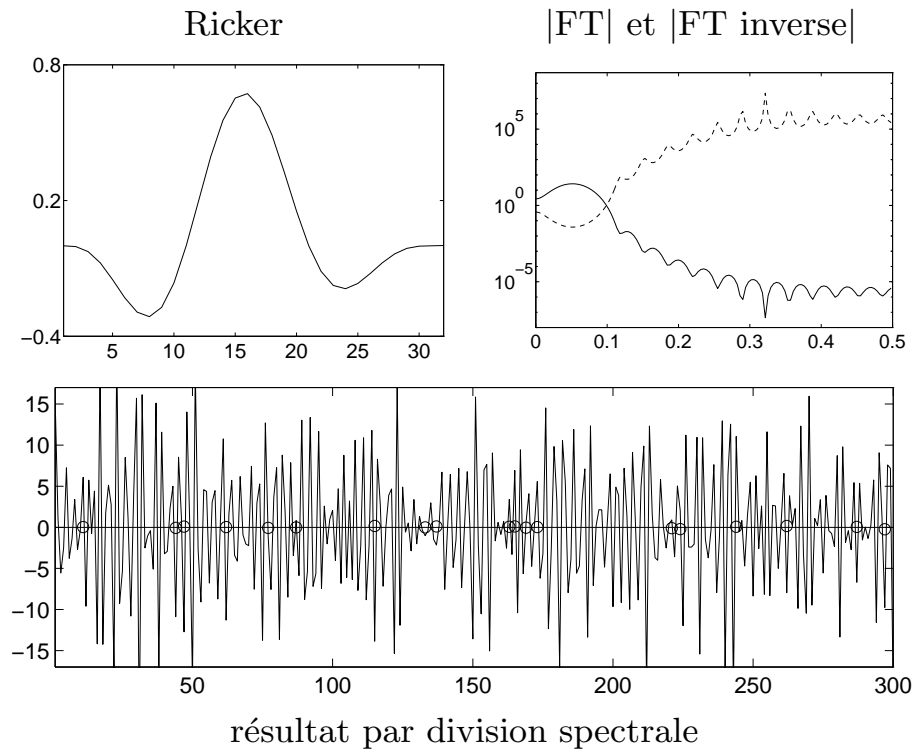
## ■ Exemple 2



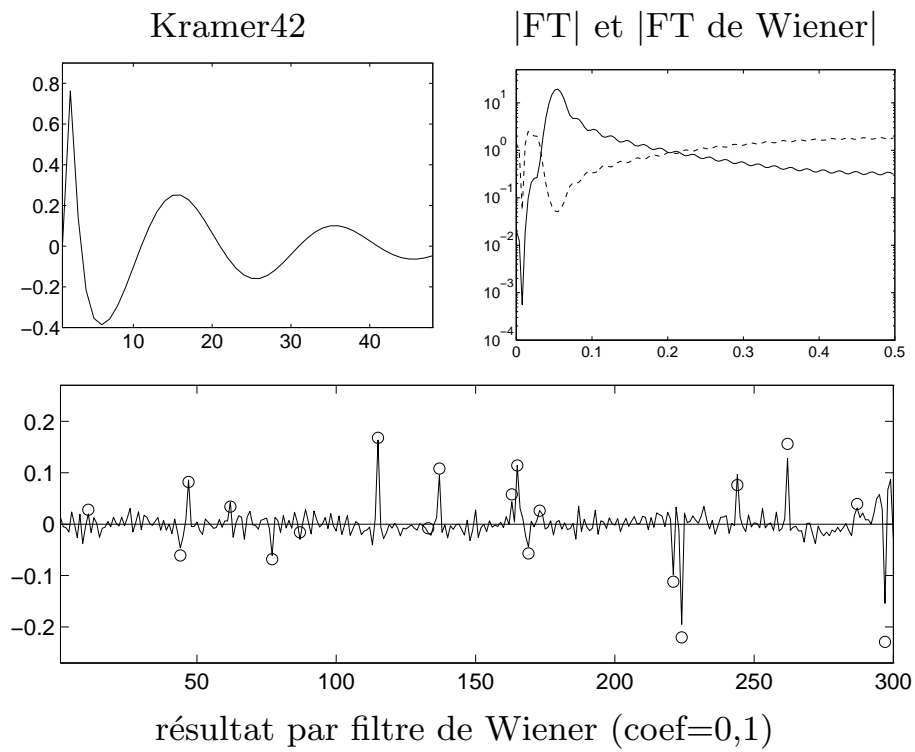
## Exemple 1



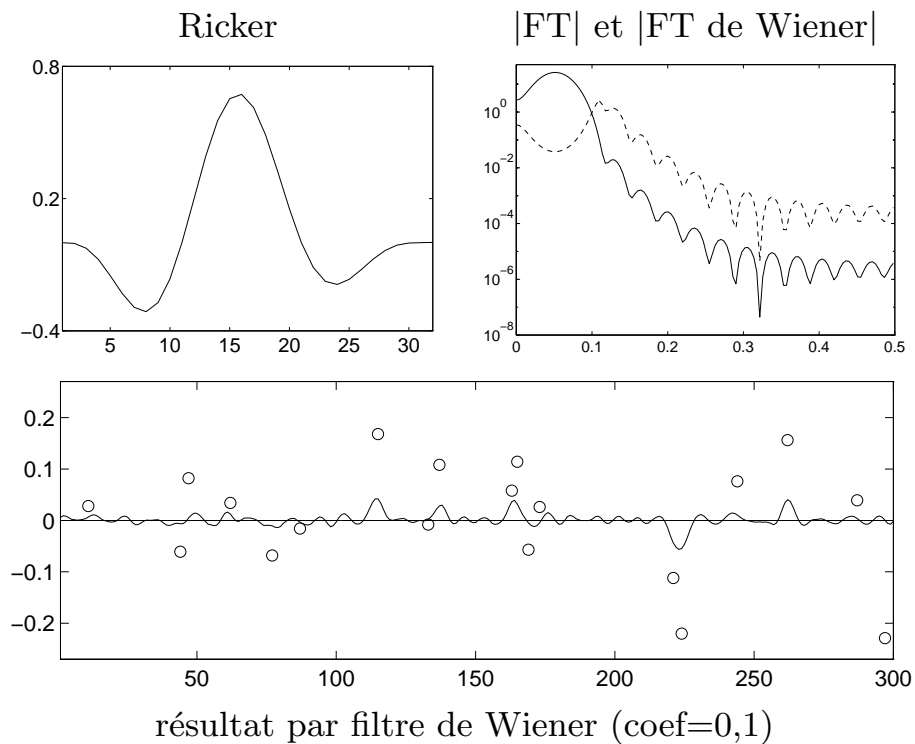
## Exemple 2



## Exemple 1



## Exemple 2



$$\hat{\mathbf{x}}^w \text{ minimise } \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \alpha \|\mathbf{x}\|^2$$

$$\text{maximise } f_{\mathbf{B}}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$$

- Le cadre gaussien ne convient pas  $\implies$  quelle forme pour  $f_{\mathbf{X}}$  ?
- De quelle loi les vecteurs d'entrée peuvent-ils provenir ?
- Quelles propriétés utiliser pour simplifier le calcul ?

### ■ Propriétés choisies pour $f_{\mathbf{X}}$

① blancheur :  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{m=1}^M f_{X_m}(x_m)$

② homogénéité :  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{m=1}^M f_X(x_m)$

③ « longue queue » :  $f_X(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$  moins vite que  $e^{-x^2}$

④ (cas positif) :  $f_X(x) = 0, \forall x < 0$

⑤ stricte log-concavité et caractère  $C^1$

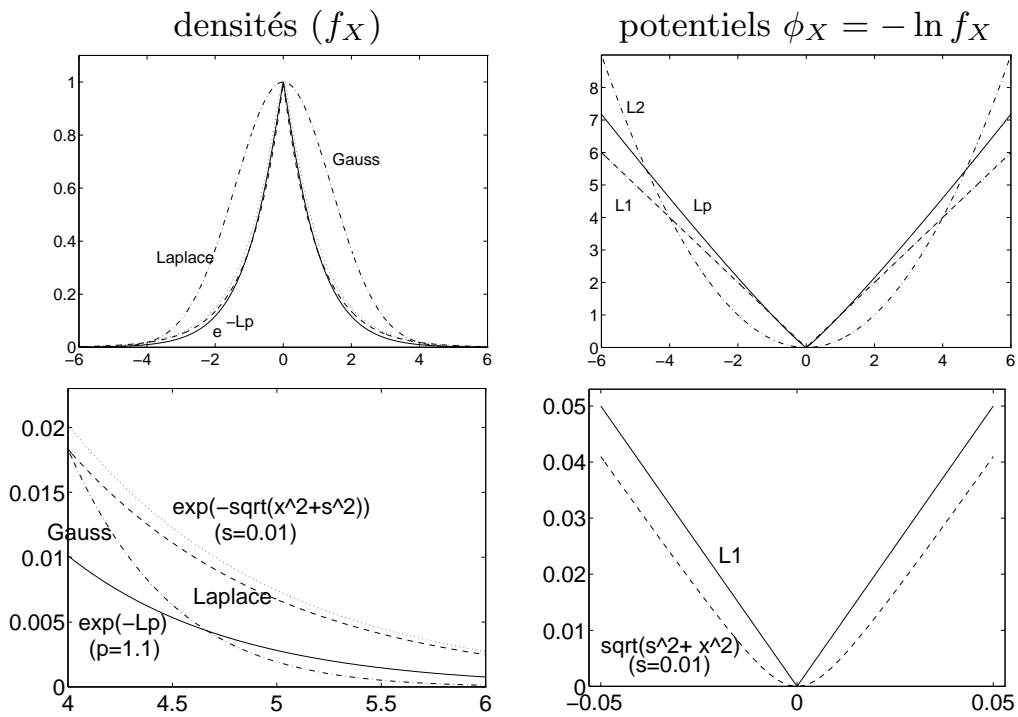
$\Downarrow$

$$\mathbf{x} \mapsto L(\mathbf{x} | \mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \alpha \sum_{m=1}^M \phi_X(x_m)$$

critère  $C^1$ , strictement convexe

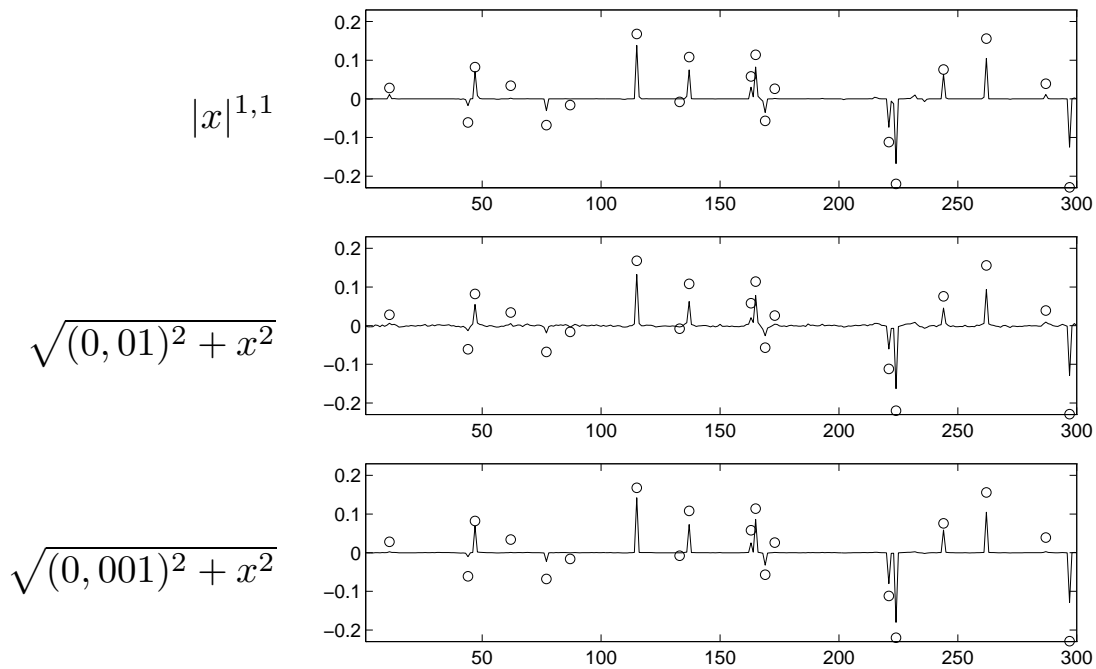
$\Downarrow$

$\exists! \hat{\mathbf{x}}^{\text{MAP}}$ , qui s'obtient par optimisation locale  
*e.g., gradient à pas optimal ou relaxation* [BERTSEKAS 1995]



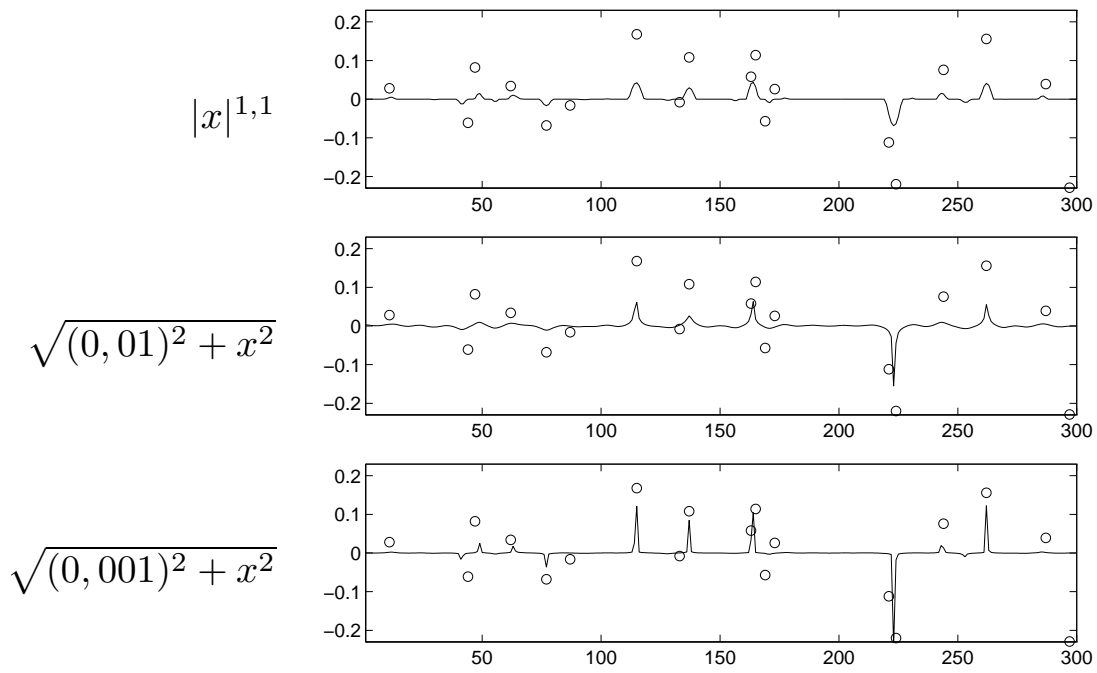
III. Déconvolution de signaux piqués

■ Exemple 1 :

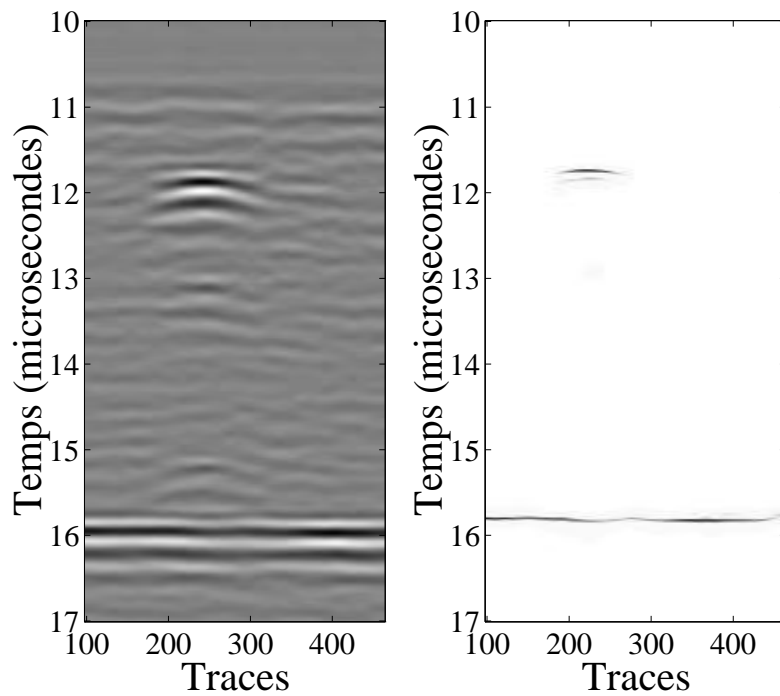


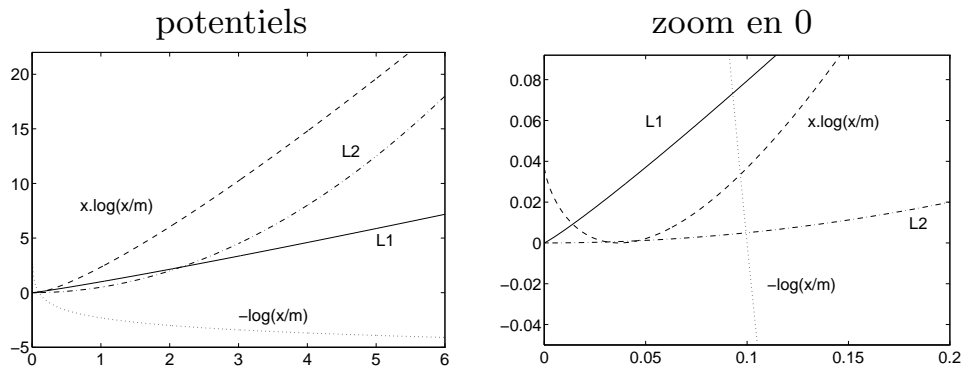


■ Exemple 2 :



■ Données réelles en CND ( $|x|^{1,1}$ , forme adaptative) :





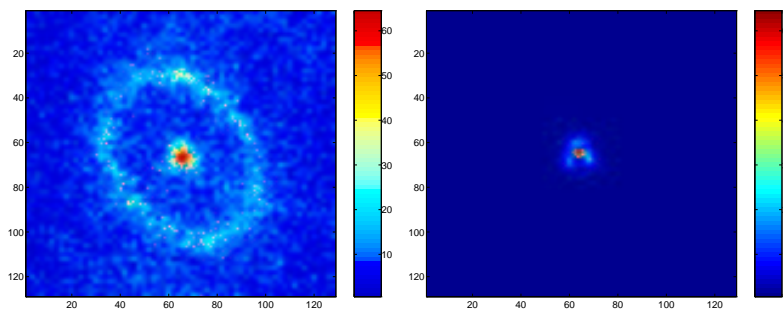
régularisation entropique :  $\min \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \alpha H(\mathbf{x})$

$$H(\mathbf{x}) = \sum_m x_m \ln x_m / \mu_m \text{ ou } - \sum_m \ln x_m / \mu_m$$

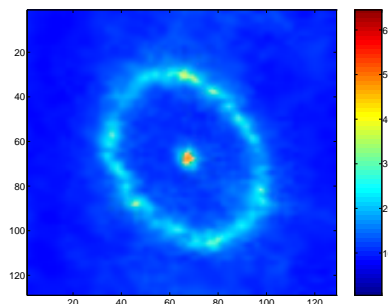
(NB :  $H$  est en fait définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ )

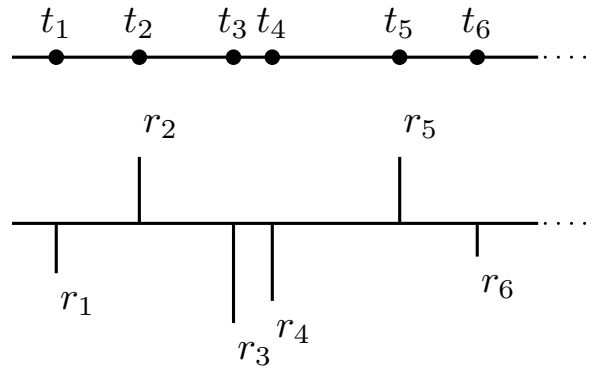
EXEMPLE

Image provenant de Hubble avant correction du miroir

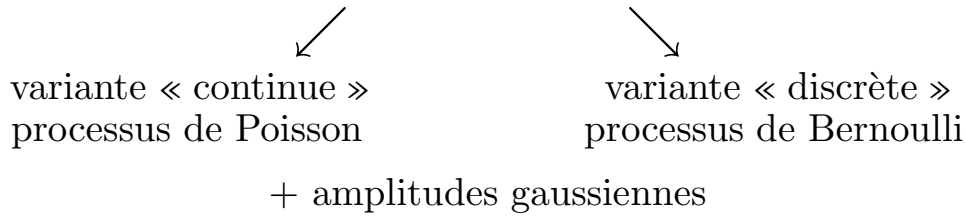


$$H(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j)} x_{i,j} \ln (x_{i,j} / \mu_{i,j}) + \text{support a priori} : (i,j) \notin S \Rightarrow x_{i,j} = 0$$





Processus composé  $(t_m, r_m)$  :  $t_m$  est un processus ponctuel qui commande l'apparition des événements, dont l'amplitude est distribuée suivant la loi du processus  $r_m$ .



MODÈLE BERNOULLI-GAUSSIEN

$$\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{r})$$

- $\mathbf{q}$  vecteur binaire indépendant

$$P(q_m = 1) = \lambda \quad \rightarrow \quad P(\mathbf{q}) = \lambda^{M_1} (1 - \lambda)^{M_0}, \quad M_0 + M_1 = M$$

$$P(q_m = 0) = 1 - \lambda$$

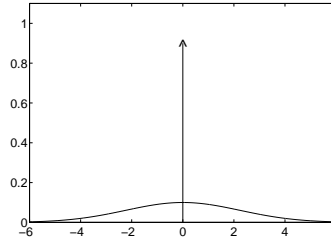
$\lambda$  : « densité d'événements »

- $\mathbf{r}$  vecteur gaussien indépendant

$$r_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 q_m)$$

$$q_m = 0 \Rightarrow r_m = 0 \quad q_m = 1 \Rightarrow r_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

- Variables cachées :  $\mathbf{q}$  n'intervient pas dans  $\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{r} + \mathbf{b}$



- Loi marginale de  $\mathbf{r}$  :

- Paramètres :

paramètre	domaine	interp. physique
$\lambda$	$[0, 1]$	densité moyenne de pics
$\sigma$	$\mathbb{R}_+$	écart-type des pics
$\sigma_b$	$\mathbb{R}_+$	écart-type du bruit

Le RSB vaut  $\|\mathbf{h}\|^2 \lambda \sigma^2 / \sigma_b^2$ .

■ Vraisemblance *a posteriori*  $P(\mathbf{x} | \mathbf{z})$

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{r} + \mathbf{b} \quad \mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{r}) \text{ BG}$$

$$\downarrow \quad \swarrow$$

$$dP(\mathbf{x} | \mathbf{z}) \propto f(\mathbf{z} | \mathbf{x}) dP(\mathbf{x})$$

$$f(\mathbf{z} | \mathbf{x}) = f_b(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{r})$$

$$dP(\mathbf{x}) = f(\mathbf{r} | \mathbf{q}) d\mathbf{r}P(\mathbf{q})$$

$\swarrow$                        $\downarrow$   
 densité                  probabilité  
 gaussienne              de Bernoulli

$$L(\mathbf{x} | \mathbf{z}) \# \sigma_b^{-2} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{r}\|^2 + \sigma^{-2} \mathbf{r}^t \mathbf{Q} \mathbf{r} + \alpha M_1 \quad \text{avec } \mathbf{Q} = \text{diag}[\{\} \mathbf{q}\}$$

■ Estimation des amplitudes : calcul de  $\hat{\mathbf{r}}$

$$L(\mathbf{r} | \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{z}) \# \sigma_b^{-2} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{r}\|^2 + \sigma^{-2} \mathbf{r}^t \mathbf{Q} \mathbf{r}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{r}} = \sigma^{-2} \mathbf{Q} \mathbf{H}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{z} \text{ avec } \mathbf{B} = \sigma^2 \mathbf{H} \mathbf{Q} \mathbf{H}^t + \sigma_b^2 \mathbf{I}$$

■ Détection des pics :  $\hat{\mathbf{q}} = \arg \max_{\mathbf{q}} P(\mathbf{q} | \mathbf{z})$

critère *marginal*  $P(\mathbf{q} | \mathbf{z}) \propto P(\mathbf{q}) \int f_b(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{r}) f(\mathbf{r} | \mathbf{q}) d\mathbf{r}$  (int. gaussienne)

$$\Rightarrow K(\mathbf{q}) = -\ln P(\mathbf{q} | \mathbf{z}) \# \mathbf{z}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{z} - \ln |\mathbf{B}| - 2M_1 \ln \frac{1 - \lambda}{\lambda}$$

~> problème d'optimisation combinatoire

OPTIMISATION COMBINATOIRE

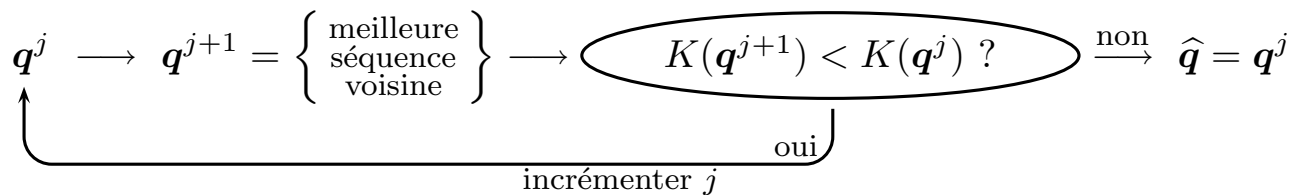
■  $\mathbf{q} \in \{0, 1\}^M$  soit  $2^M$  possibilités,

=> examen exhaustif impossible

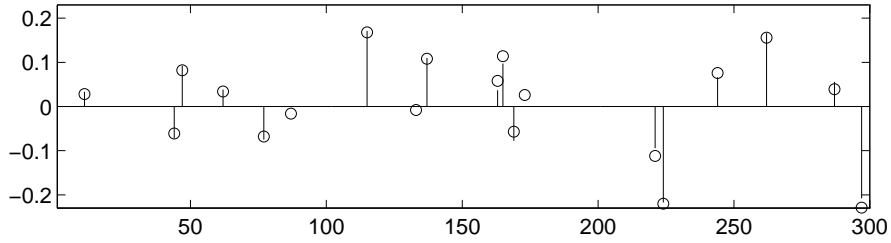
■ Algos « sous-optimaux » récurrents :  $[\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k] \rightarrow [\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k, \hat{q}_{k+1}]$   
 (Structures approchées de type « Kalman + décision en ligne »)

■ Algos « sous-optimaux » itératifs :  $\mathbf{q}^j \rightarrow \mathbf{q}^{j+1} \dots \rightarrow \mathbf{q}^J = \hat{\mathbf{q}}$

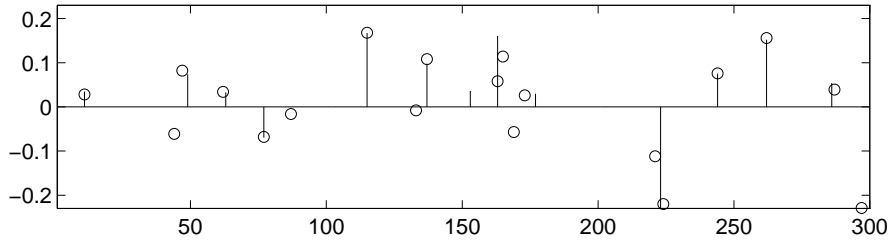
Méthode de parcours : *Single Most Likely Replacement* (SMLR) [MENDEL 1983]



■ Exemple 1



■ Exemple 2



SIGNAUX PIQUÉS : CONCLUSION

■ Divers modèles de bruits blancs

Gaussien, Laplace (ou approchant), Bernoulli-gaussien  
 lois à longues queues

■ Complexité de calcul de  $\hat{x}$  croissante

- linéaire,
- optimisation convexe,
- optimisation non convexe ou combinatoire.

■ Sur-problèmes

- estimation des paramètres
- filtre  $h$  mal connu

[BERTSEKAS 1995] D. P. BERTSEKAS (1995), *Nonlinear programming*, Athena Scientific, Belmont, MA, USA.

[MENDEL 1983] J. M. MENDEL (1983), *Optimal Seismic Deconvolution*, Academic Press, New York, NY, USA.