II. Cadre probabiliste, estimation bayésienne, cadre linéaire gaussien, filtrage de Wiener, filtrage de Kalman

Traitement de données et statistiques

Bruit

$$\boldsymbol{z} = \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) \quad \text{(par exemple : } \boldsymbol{z} = \mathbf{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\text{)}$$

par définition, $\boldsymbol{b}$ mal connu $\rightsquigarrow$ modèle statistique, *e.g.*, loi à densité $f_{\boldsymbol{B}}$

Vraisemblance (bruit additif à densité)

$$f(\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{z} - \mathbf{H}\boldsymbol{x}) \text{ (modèle linéaire)}$$

anti-log-vraisemblance : $V(\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{x}) = -\ln f(\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{x})$

Estimateur du *maximum de vraisemblance (MV)* :

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{MV}} = \arg\max_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{x}) = \arg\min_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{x})}$$

MV gaussien linéaire

$$\boldsymbol{z} = \mathbf{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b} \text{ réalisation de } \mathcal{N}(\boldsymbol{m_b}, \mathbf{R_b})$$

$$\widehat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{MV}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} \, (\boldsymbol{z} - \mathbf{H}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m_b})^{\mathrm{t}} \mathbf{R}_{\boldsymbol{b}}^{-1} (\boldsymbol{z} - \mathbf{H}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m_b})$$

$$\rightsquigarrow \text{ équation normale : } (\mathbf{H}^{\mathrm{t}} \mathbf{R}_{\boldsymbol{b}}^{-1} \mathbf{H}) \widehat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{MV}} = \mathbf{H}^{\mathrm{t}} \mathbf{R}_{\boldsymbol{b}}^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m_b})$$

Cas particuliers :

- $\boldsymbol{m_b} = \mathbf{0}, \, \mathbf{R_b} \propto \mathbf{I} \implies \widehat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{MV}} = \arg\min \|\boldsymbol{z} - \mathbf{H}\boldsymbol{x}\|^2 = \widehat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{MC}}$
- $\boldsymbol{m_b} = \mathbf{0}, \, \mathbf{R_b} = \operatorname{diag}\left\{\sigma_1^2, \ldots, \sigma_N^2\right\} \implies$ MC pondérés :

$$\widehat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{MV}} = \arg\min \sum_{n=1}^{N} \frac{(z_n - [\mathbf{H}\boldsymbol{x}]_n)^2}{\sigma_n^2}$$

Autres bruits : exemples

Bruit additif de Laplace

$$\boldsymbol{z} = \mathbf{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \quad \text{et} \quad f_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{b}) = \prod_{n=1}^{N} \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha |b_n|)$$

$$\implies \quad \text{Estimateur } \mathrm{L}^1 : \widehat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{MV}} = \arg\min \sum_{n=1}^{N} |z_n - [\mathbf{H}\boldsymbol{x}]_n|$$

Application : estimateur plus robuste aux données aberrantes

Bruit de Poisson : $P(z_n = k) = e^{-\phi_n(\boldsymbol{x})} \phi_n(\boldsymbol{x})^k / k!, \; k \in \mathbb{N}$

Applications : tomographie à émission de positon, astronomie

Bruit multiplicatif : $z_n = \phi_n(\boldsymbol{x}) b_n, \; 1 \leqslant n \leqslant N$

bruit gaussien réduit : $V(\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{N} \frac{z_n^2}{2\phi_n^2(\boldsymbol{x})} + \ln |\phi_n^2(\boldsymbol{x})|$

Applications : astronomie (≈ Poisson à nb de photons élevé)

Règle de Bayes

$$f(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{z}) = \frac{f(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})}{f(\boldsymbol{z})} \propto f(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})$$

$f(\boldsymbol{x})$: loi *a priori* sur $\boldsymbol{x}$, résume les informations disponibles sur l'objet *avant* la mesure

Décision $f(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{z}) \overset{?}{\rightsquigarrow} \widehat{\boldsymbol{x}}$

- Espérance *a posteriori* : $\widehat{\boldsymbol{x}}^{\text{EAP}} = \mathrm{E}[\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}]$
- Maximum *a posteriori* : $\widehat{\boldsymbol{x}}^{\text{MAP}} = \arg\max\limits_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{z})$
- MAP Marginal : $\widehat{x}_m^{\text{MAPM}} = \arg\max\limits_{x_m} f(x_m\,|\,\boldsymbol{z}), \quad 1 \leqslant m \leqslant M$
- Estimateur linéaire à risque minimal : $\widehat{\boldsymbol{x}}^{\text{ELMQ}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{xz}}\mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}^{-1}(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{z}})+\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{x}}$

$\widehat{\boldsymbol{x}}^{\text{MV}} = \widehat{\boldsymbol{x}}^{\text{MAP}}$ pour une loi *a priori* uniforme

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{x}}^{\text{MAP}} &= \arg\max_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{z})\\ &= \arg\min_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{x}) - \ln f(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

Le MAP est une solution régularisée obtenue par pénalisation

Correspondances

« énergétiques »		probabilistes
$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$	$\longleftrightarrow$	$f(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{z}) = \dfrac{\exp -F(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{z})}{\int_{\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{z}} \exp -F(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}}$
$\widehat{\boldsymbol{x}}_{\text{p}} = \arg\min\limits_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{z})$	$=$	$\widehat{\boldsymbol{x}}^{\text{MAP}} = \arg\max\limits_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{z})$
?	$=$	Espérance conditionnelle (régression)
?	$=$	Marginalisation

$$\boldsymbol{z} = \mathbf{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{m_b},\, \mathbf{R}_{\boldsymbol{b}}),\ \boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{m_x},\, \mathbf{R}_{\boldsymbol{x}}),\ (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{b}) \text{ indépendant}$$

$$\Downarrow$$

Anti-log-vraisemblance a posteriori

$$L(\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{z}) \# \frac{1}{2} \left\| \boldsymbol{z} - \mathbf{H}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m_b} \right\|^2_{\mathbf{R}_{\boldsymbol{b}}^{-1}} + \frac{1}{2} \left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{m_x} \right\|^2_{\mathbf{R}_{\boldsymbol{x}}^{-1}}$$

Forme information :

$$\widehat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{MAP}} = (\mathbf{H}^{\mathrm{t}}\mathbf{R}_{\boldsymbol{b}}^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{x}}^{-1})^{-1}(\mathbf{H}^{\mathrm{t}}\mathbf{R}_{\boldsymbol{b}}^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m_b}) + \mathbf{R}_{\boldsymbol{x}}^{-1}\boldsymbol{m_x})$$

Forme covariance :

$$\widehat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{MAP}} = \boldsymbol{m_x} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{x}}\mathbf{H}^{\mathrm{t}}(\mathbf{R}_{\boldsymbol{b}} + \mathbf{H}\mathbf{R}_{\boldsymbol{x}}\mathbf{H}^{\mathrm{t}})^{-1}(\boldsymbol{z} - \mathbf{H}\boldsymbol{m_x} - \boldsymbol{m_b})$$

Lemme d'inversion de matrice

Soit $\boldsymbol{A}$ (N,N) ; $\boldsymbol{B}$ (N,M) ; $\boldsymbol{C}$ (M,M) ; $\boldsymbol{D}$ (M,N).
Sous réserve d'inversibilité,

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BCD})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}$$

- Corrolaires

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BCD})^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$\boldsymbol{CD}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BCD})^{-1} = (\boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}$$

Théorèmes statistiques

Soit $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Z}$ de moyennes $\boldsymbol{m_x}$, $\boldsymbol{m_z}$, de covariances $\mathbf{R}_{\boldsymbol{x}}$, $\mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}$, d'intercovariance $\mathbf{R}_{\boldsymbol{xz}}$ et soit

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{X}} &= \mathbf{R}_{\boldsymbol{xz}}\mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}^{-1}(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{m_z}) + \boldsymbol{m_x} \\ \boldsymbol{\Gamma} &= \mathbf{R}_{\boldsymbol{x}} - \mathbf{R}_{\boldsymbol{xz}}\mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}^{-1}\mathbf{R}_{\boldsymbol{zx}}\end{aligned}$$

① $\widehat{\boldsymbol{X}}$ possède un biais moyen nul et une matrice de covariance d'erreur moyenne égale à $\boldsymbol{\Gamma}$.

② $\widehat{\boldsymbol{X}}$ minimise le risque quadratique moyen parmi les estimateurs de structure affine ($\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{ELMQ}}$). Le minimum atteint est Trace $\boldsymbol{\Gamma}$.

③ Si de plus ($\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Z}$) est gaussien, alors la loi *a posteriori* $f_{\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{z}}$ est gaussienne de moyenne $\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{EAP}} = \widehat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{MAP}} = \widehat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{MMAP}}$ et de covariance $\boldsymbol{\Gamma}$.

Application

$\boldsymbol{Z} = \mathbf{H}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}$ avec ($\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{B}$) décorrélé donne les résultats du cadre linéaire gaussien pour $\widehat{\boldsymbol{X}}$ et

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma} &= \mathbf{R}_{\boldsymbol{x}} - \mathbf{R}_{\boldsymbol{x}}\mathbf{H}^{\mathrm{t}}(\mathbf{H}\mathbf{R}_{\boldsymbol{x}}\mathbf{H}^{\mathrm{t}} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{b}})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R}_{\boldsymbol{x}} \\ &= (\mathbf{H}^{\mathrm{t}}\mathbf{R}_{\boldsymbol{b}}^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{x}}^{-1})^{-1}\end{aligned}$$

Remarque

Le biais (au sens « classique ») s'écrit

$$\mathrm{E}\left[\widehat{\boldsymbol{X}} \mid \boldsymbol{X}\right] - \boldsymbol{X} = (\mathbf{H}^{\mathrm{t}}\mathbf{R}_{\boldsymbol{b}}^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{x}}^{-1})^{-1}(\mathbf{H}^{\mathrm{t}}\mathbf{R}_{\boldsymbol{b}}^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{X} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{x}}^{-1}\boldsymbol{m_x}) - \boldsymbol{X}$$

Il est nul pour « $\mathbf{R}_{\boldsymbol{x}}^{-1} = 0$ », c'est-à-dire pour $\widehat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{MV}}$, solution non régularisée !

$$\mathrm{E}\left[\|\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}\|^2 \mid \boldsymbol{X}\right] = \|\mathrm{biais}\|^2 + \mathrm{Trace}\ \mathrm{Cov}(\widehat{\boldsymbol{X}} \mid \boldsymbol{X})$$

- Soit $X = \{X_n\}_{\mathbb{Z}}$, $Z = \{Z_n\}_{\mathbb{Z}}$ signaux conjointement stationnaires faibles centrés de corrélation r_x, r_z et d'intercorrélation r_{xz}.

Soit g un filtre tel que $r_{xz} = g \star r_z$. Alors $\widehat{X} = g \star Z$ minimise à tout instant n le risque moyen $\mathrm{E}\left[\left(\widehat{X}_n - X_n\right)^2\right]$ parmi les estimateurs linéaires.

Application : $Z = h \star X + B$, avec (X, B) décorrélés :

$$\boxed{\forall\nu, \quad G(\nu) = \frac{H^*(\nu)\Gamma_x(\nu)}{|H(\nu)|^2\,\Gamma_x(\nu) + \Gamma_b(\nu)}}$$

- **Utilisation « courante »**

1. Si X et B sont blancs de puissance σ_x^2 et σ_b^2,

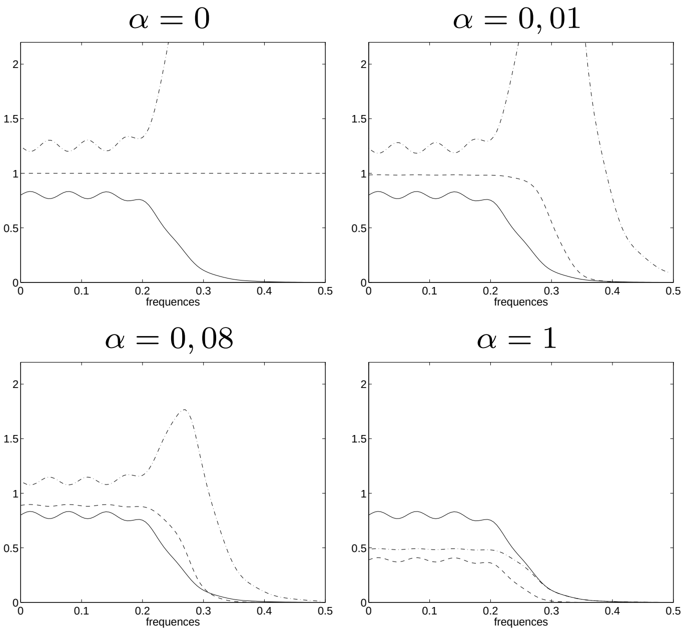
$$\boxed{\forall\nu, \quad G(\nu) = \frac{H^*(\nu)}{\left|H(\nu)\right|^2 + \sigma_b^2/\sigma_x^2}}$$

2. Application au cas fini par circularisation et `fft`

$\leftrightarrow$ Approche PTT pour $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ et $\alpha = \sigma_b^2/\sigma_x^2$!

Filtrage de Wiener =*Egalisation spectrale* dans la bande utile

Trait plein :	$\lvert H(\nu)\rvert$
Trait mixte :	$\lvert G(\nu)\rvert$
Tireté :	$\lvert H(\nu)G(\nu)\rvert$



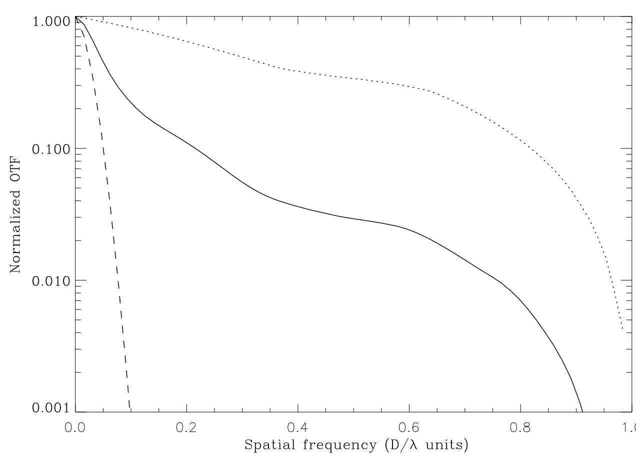
Exemple en astronomie

Observation à travers l'atmosphère

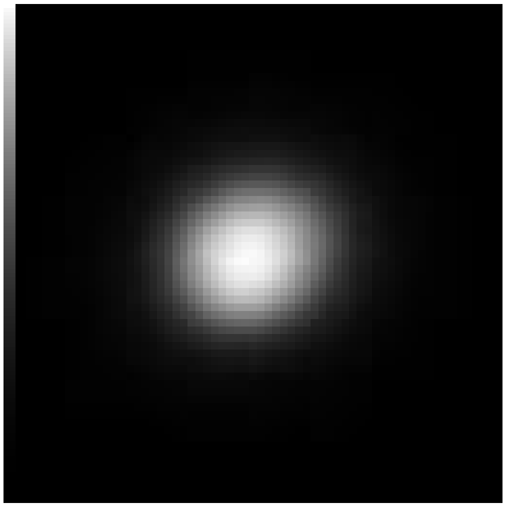
[extraits d'une communication a SPIE'97, ONERA]

Mots-clés :

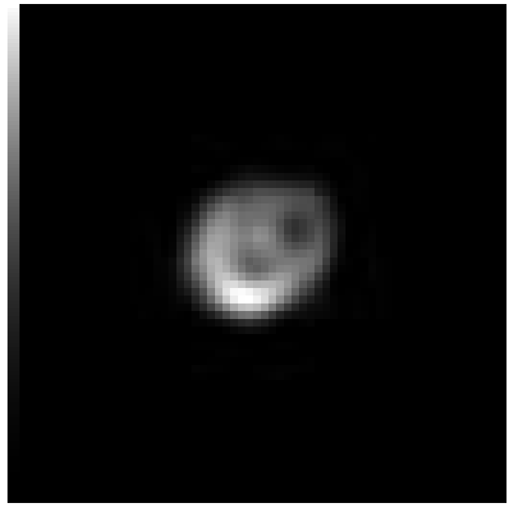
Ouverture téléscopique
Turbulence atmosphérique
Optique adaptative
Déconvolution



Résultats



observation avec
optique adaptative



optique adaptative
+ déconvolution quadratique

Filtrage de Kalman (1960)

Premières applications

Asservissement de trajectoire : Apollo, Polaris (1960-65), puis Voyager, ...

- Pour des observations vectorielles successives $\boldsymbol{z}_0, \ldots, \boldsymbol{z}_k$, le filtre de Kalman calcule **récursivement** le meilleur estimateur **linéaire** d'un processus vectoriel $\boldsymbol{X}_0, \ldots, \boldsymbol{X}_k$ au sens du risque moyen minimum :

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{k\,|\,k} \triangleq \mathrm{EL}\left[\boldsymbol{X}_k \,|\, \boldsymbol{Z}_0, \ldots, \boldsymbol{Z}_k\right] \ \text{minimise}\ \mathrm{E}\left[\|\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_k\|^2\right]$$

Équations d'état

Équation d'observation	$\boldsymbol{Z}_k = \mathbf{H}_k \boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{B}_k$
Équation d'état	$\boldsymbol{X}_{k+1} = \mathbf{F}_k \boldsymbol{X}_k + \mathbf{G}_k \boldsymbol{U}_k$
Conditions initiales	$\mathrm{E}[\boldsymbol{X}_0,\, \boldsymbol{B}_k,\, \boldsymbol{U}_k] = \mathbf{0}$
(simplifiées)	$\mathrm{E}[\boldsymbol{B}_k \boldsymbol{B}_l^{\mathrm{t}}] = \boldsymbol{R}_k \delta_{kl}, \quad \mathrm{E}[\boldsymbol{U}_k \boldsymbol{U}_l^{\mathrm{t}}] = \mathbf{Q}_k \delta_{kl},$
	$\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}_0) = \mathbf{P}_0, \quad (\boldsymbol{X}_0,\, \boldsymbol{B}_k,\, \boldsymbol{U}_l)$ décorrélés

Cas particuliers en signal

- $\boldsymbol{Z}_k = Z_k = \boldsymbol{h}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{X}_k + b_k$ convolution bruitée, $\boldsymbol{h}$ RIF de taille M,
  $\boldsymbol{X}_k = [X_k,\, \ldots,\, X_{k-M+1}]^{\mathrm{t}}$ extrait d'un signal AR d'ordre $L < M$:

$$X_k = \sum_{l=1}^{L} a_l X_{k-l} + U_k$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{X}_{k+1} = \mathbf{F} \boldsymbol{X}_k + \mathbf{G} U_{k+1},$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_L & 0 \ldots & 0 \\ 1 & & & & \vdots \\ & & \ddots & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & & & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Extensions inhomogènes
  ... vis-à-vis de la convolution, du bruit d'observation, du modèle AR.

Les équations du filtre de Kalman [Jazwinski 1970]

- Étape de remise à jour

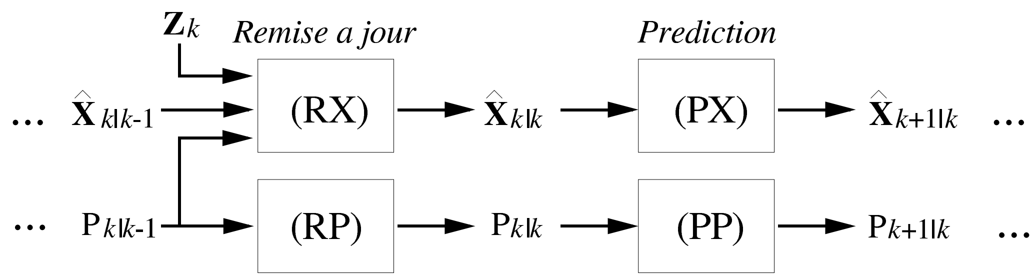
$$\text{(RX)}\quad \widehat{\boldsymbol{X}}_{k\,|\,k} = \widehat{\boldsymbol{X}}_{k\,|\,k-1} + \mathbf{P}_{k\,|\,k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{t}}(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k\,|\,k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{R}_k)^{-1}(\boldsymbol{Z}_k - \mathbf{H}_k\widehat{\boldsymbol{X}}_{k\,|\,k-1})$$

$$\text{(RP)}\quad \mathbf{P}_{k\,|\,k} = \mathbf{P}_{k\,|\,k-1} - \mathbf{P}_{k\,|\,k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{t}}(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k\,|\,k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{R}_k)^{-1}\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k\,|\,k-1}$$

- Étape de prédiction

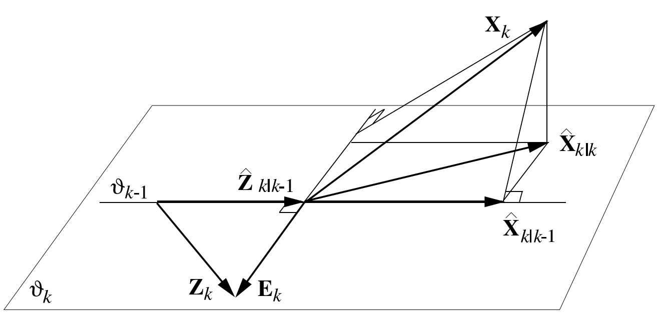
$$\text{(PX)}\quad \widehat{\boldsymbol{X}}_{k+1\,|\,k} = \mathbf{F}_k\widehat{\boldsymbol{X}}_{k\,|\,k}$$

$$\text{(PP)}\quad \widehat{\mathbf{P}}_{k+1\,|\,k} = \mathbf{F}_k\mathbf{P}_{k\,|\,k}\mathbf{F}_k^{\mathrm{t}} + \mathbf{G}_k\mathbf{Q}_k\mathbf{G}_k^{\mathrm{t}}$$

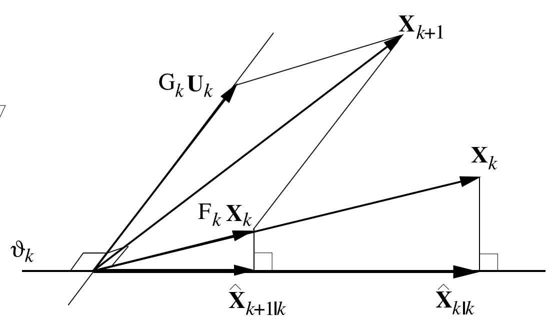


Principe géométrique de la démonstration

Étape de remise à jour



Étape de prédiction



Les dimensions vectorielles sont réduites pour la clarté des schémas. Si $\boldsymbol{Z}_k$ possède N composantes, $\mathcal{V}_k = Vect(\boldsymbol{Z}_0, \ldots, \boldsymbol{Z}_k)$ est de dimension maximale $(k+1)N$ et $\dim Vect(\boldsymbol{E}_k) \leqslant N$. D'autre part $\boldsymbol{X}_k$ est un vecteur de taille M qui doit être projeté composante par composante.

Extension : lissage de Kalman [Jazwinski 1970]

- Lisseur *à intervalle fixe* LdK(IF) : $\widehat{\boldsymbol{X}}_{k\,|\,K}$

  ① Étant donné $\boldsymbol{Z}_0, \ldots, \boldsymbol{Z}_K$, appliquer le FdK jusqu'à $k = K$;

  ② Pour $k = K-1, \ldots, 0$:

  $$\widehat{\boldsymbol{X}}_{k\,|\,K} = \widehat{\boldsymbol{X}}_{k\,|\,k} + \mathbf{P}_{k\,|\,k}\mathbf{F}_k^{\mathrm{t}}\mathbf{P}_{k\,|\,k+1}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{X}}_{k+1\,|\,K} - \widehat{\boldsymbol{X}}_{k+1\,|\,k})$$

- Lisseur *à retard fixe* LdK(RF) : $\widehat{\boldsymbol{X}}_{k\,|\,k+D}$

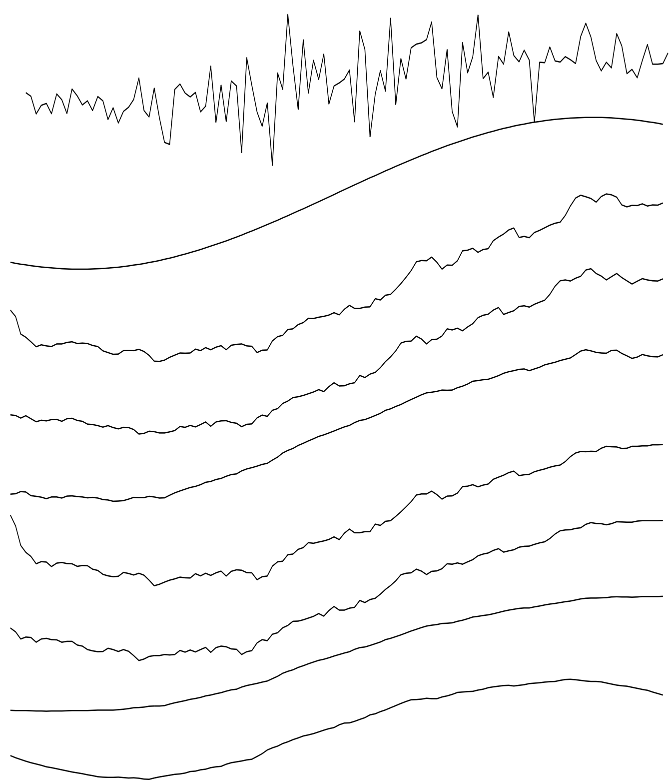
  Calcul par la méthode de la *chaîne serpent* :

  ① Réécrire les équations d'état pour le vecteur étendu
  $$\mathcal{X}_k = (\boldsymbol{X}_k, \ldots, \boldsymbol{X}_{k-D});$$

  ② Appliquer le FdK et conserver la dernière composante de
  $$\widehat{\mathcal{X}}_{k\,|\,k} = (\widehat{\boldsymbol{X}}_{k\,|\,k}, \ldots, \widehat{\boldsymbol{X}}_{k-D\,|\,k})$$

Exemple en déconvolution (bruit d'observation inhomogène)

$\|\widehat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{X}^*\|_1$	
	Observations
	Solution $\boldsymbol{X}^*$
4,47	FdK
3,98	LdK(RF=3)
1,57	LdK(IF)
5,01	FdK
4,50	LdK(RF=3)
2,55	LdK(IF)
3,38	Hunt



Conclusions sur le filtrage de Kalman en déconvolution

- FdK, LdK(IF) et LdK(RF) permettent des modèles inhomogènes.
- LdK(IF) minimise (d'après ③ dans Gauss-Markov) non récursivement

$$L(x_0, \ldots, x_K \mid z_0, \ldots, z_K) \# \sum_{k=0}^{K} \frac{(z_k - h_k^{\mathrm{t}} \boldsymbol{x}_k)^2}{r_k} + \sum_{k=1}^{K} \frac{(x_k - \boldsymbol{a}_k^{\mathrm{t}} \boldsymbol{x}_k)^2}{q_k} + \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{t}} \mathbf{P}_0^{-1} \boldsymbol{x}_0$$

- LdK(RF) est un bon compromis entre FdK et LdK(IF).
- Il existe des formes *rapides* pour les équations d'états homogènes.

[Demoment 1989]

[Demoment 1989] G. Demoment (1989), « Équations de Chandrasekhar et algorithmes rapides pour le traitement du signal et des images », *Traitement du Signal*, **6**, 103-115.

[Jazwinski 1970] A. H. Jazwinski (1970), *Stochastic process and filtering theory*, Academic Press, New York, NY, USA.