

Problèmes inverses, imagerie

Jérôme IDIER

idier@irccyn.ec-nantes.fr
Institut de Recherche en Communications
et Cybernétique de Nantes (IRCCyN)
ECN - BP 92101 - 1 rue de la Noë - 44321 Nantes

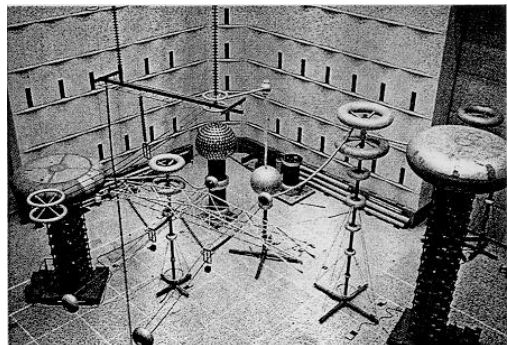
PLAN

- Problèmes inverses, problèmes mal-posés, déconvolution, régularisation, pénalisation quadratique
- Cadre probabiliste, estimation bayésienne, cadre linéaire gaussien, filtrage de Wiener, filtrage de Kalman
- Déconvolution de signaux piqués
- Problèmes d'imagerie, modèles markoviens
- Synthèse de Fourier, tomographie

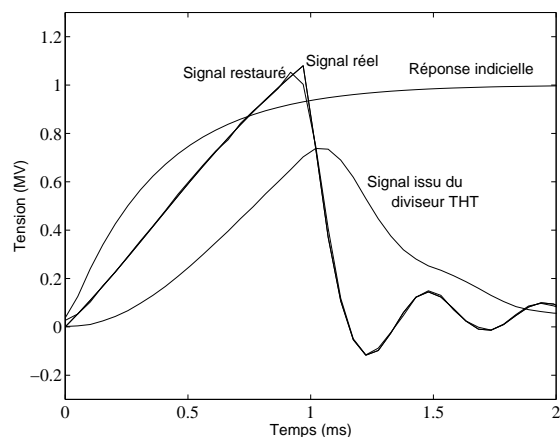
I. Problèmes inverses, problèmes mal-posés, déconvolution, régularisation, pénalisation quadratique

EXEMPLE : RÉSISTANCE DES ISOLATEURS AUX CHOCS DE Foudre

Dispositif permettant d'appliquer une onde de choc (EdF- Les Renardières)



Très hautes tensions réelle et estimée



■ Solution naïve

- Modèle du signal observé

$$\begin{aligned}
 \text{Échantillonnage :} \quad z_1 &= h_0 x_1 \\
 z_2 &= h_1 x_1 + h_0 x_2 \\
 &\vdots \\
 z_N &= h_P x_{N-P} + \dots + h_0 x_N \\
 \\
 \text{Écriture matricielle :} \quad \mathbf{z} &= \mathbf{H} \mathbf{x}
 \end{aligned}$$

- Méthode de **substitution**

$$x_1 = z_1/h_0, \quad x_2 = (z_2 - h_1/h_0 z_1)/h_0, \quad \dots$$

Solution : $\mathbf{x} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{z}$

RAPPEL : CONVOLUTION POUR DES SÉQUENCES FINIES

$$z_n = \sum_{p=0}^P h_p x_{n-p}, \quad n = 1, \dots, N$$

 \Downarrow

$$\mathbf{z} = \mathbf{h} \star \mathbf{x} = \mathbf{H} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^M, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_M]^t, \quad \mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_N]^t$$

H : matrice de convolution $N \times M$ associée à la réponse impulsionnelle finie $\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_P]$

H est une matrice de Toeplitz : $\forall m, n, H_{m,n} = H_{m+1,n+1}$

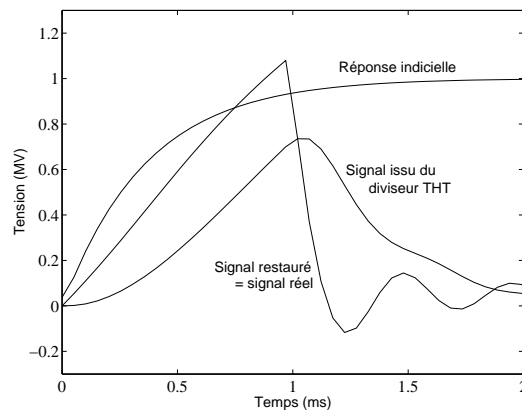
■ Trois hypothèses classiques

$$\mathbf{H} = \left. \left(\begin{array}{c} (H_0) \\ (H_1) \\ (H_2) \end{array} \right\} \right\}$$

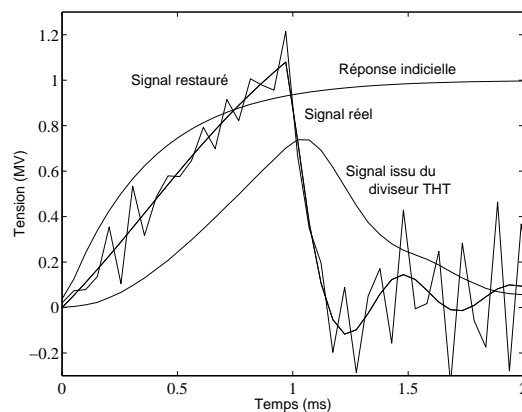
$$\left[\begin{array}{cccccccc}
 h_0 & 0 & \cdots & & & & & 0 \\
 \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\
 \hline
 h_P & \cdots & h_0 & 0 & \cdots & & & 0 \\
 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & & & \\
 \vdots & \ddots & & & & & & 0 \\
 0 & \cdots & & 0 & h_P & \cdots & h_0 & \\
 \hline
 \vdots & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
 0 & \cdots & & & 0 & h_P & &
 \end{array} \right]$$

- (H_0) \mathbf{x} est bordé par des zéros $\leadsto N = M + P \implies \mathbf{H}^t \mathbf{H}$ Toeplitz
- (H_1) \mathbf{x} commence par des zéros $\leadsto N = M$
 $(x_0 = 0, x_{-1} = 0, \dots)$
- (H_2) pas d'hypothèse $\leadsto N = M - P \implies \mathbf{H} \mathbf{H}^t$ Toeplitz

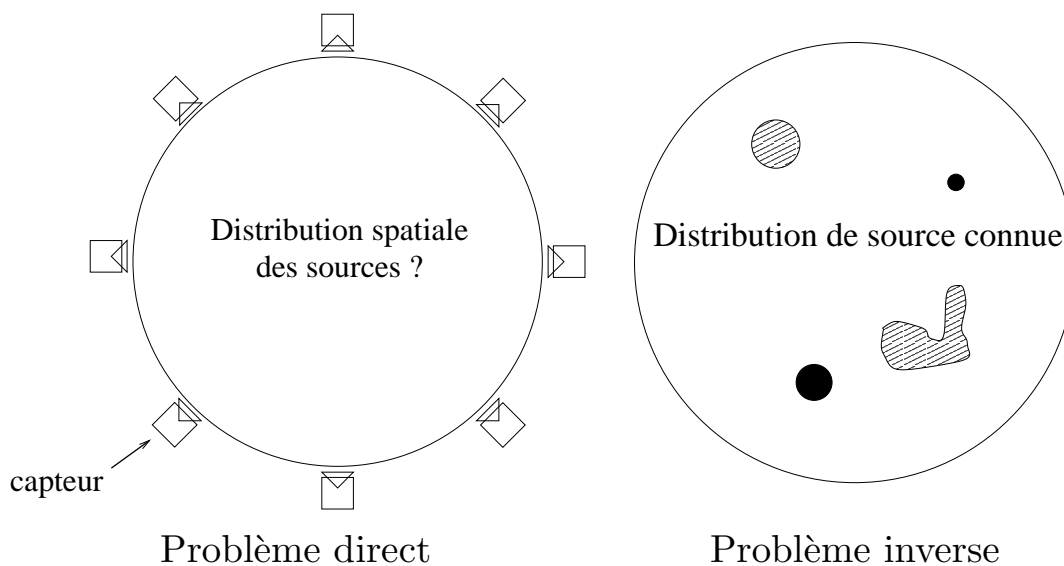
Cas idéal



Cas réel



PROBLÈME INVERSE : DÉFINITION *a contrario*



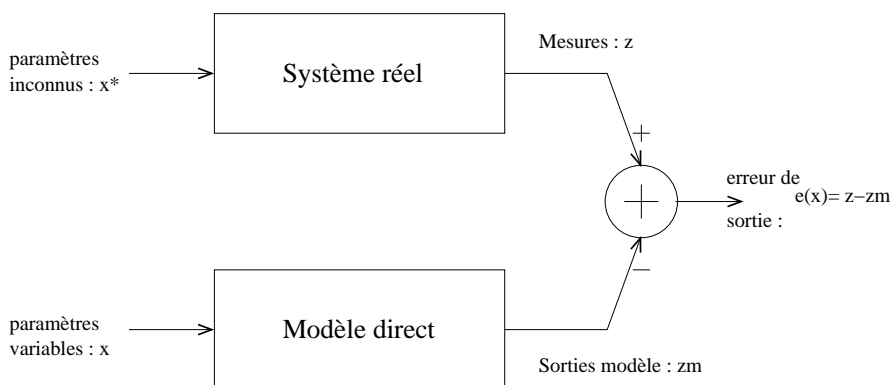
APPROCHES INTUITIVES

■ **Problème simple et données en nombre suffisant**

Loi d'Ohm, $R = U/I$, calcul d'erreur : $\Delta R = f(\Delta U, \Delta I)$

Cas linéaire : $z = \mathbf{A}x$ (\mathbf{A} carrée inversible) $\Rightarrow \begin{cases} x = \mathbf{A}^{-1}z, \\ \Delta x = \mathbf{A}^{-1}\Delta z \end{cases}$

■ **Méthode par essais et erreurs**

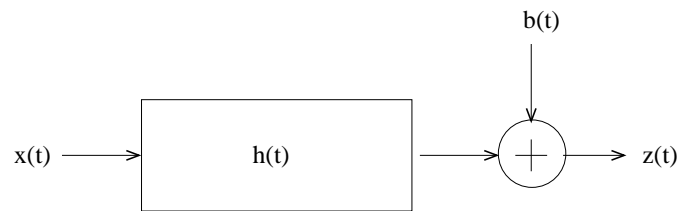


Échec si : $\{\|z - z^m\| \rightarrow 0\} \not\Rightarrow \{\|x^* - x\| \rightarrow 0\}$

DÉCONVOLUTION

■ Modèle direct

Convolution (bruitée) $z = h \star x (+ b)$



■ Problème inverse

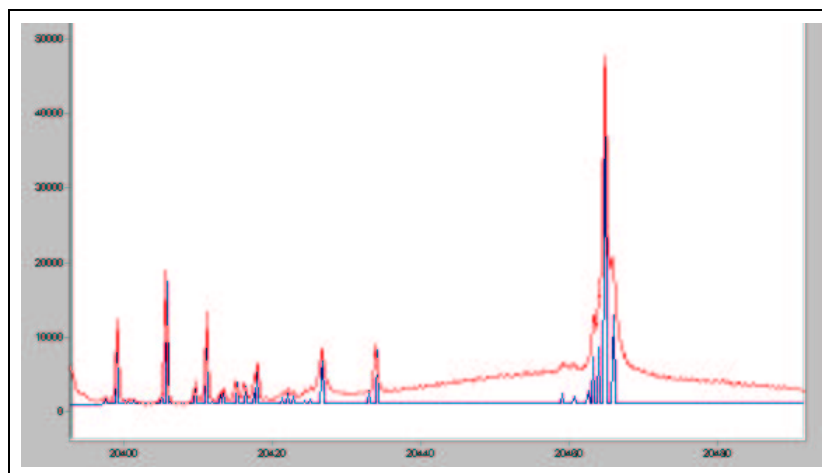
Déconvolution = estimer x connaissant z (et h)

Applications :

spectrométrie, restauration d'image, égalisation de canal...

CONVOLUTION 1D ET SPECTROMÉTRIE

Exemple (<http://www.spectrumsquare.com>) :



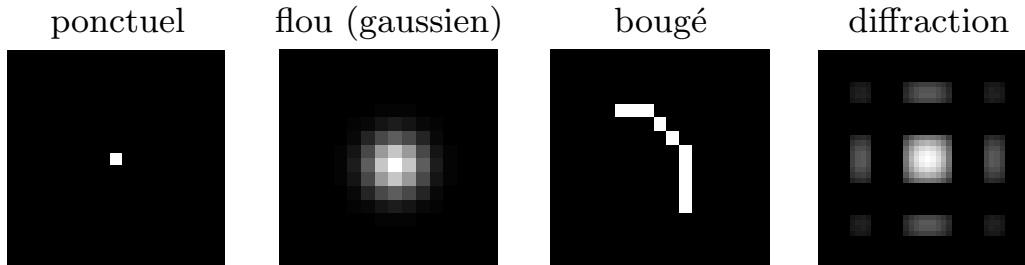
Performance of RazorPick on a Raman spectrum (sulfur). The peak model was chosen to be a Lorentzian peak of the same width as the dominant peak in the spectrum. The height of each marker is proportional to the peak significance. The picker was set to pick by amplitude.

CONVOLUTION 2D ET RESTAURATION

modèle : $y(r, s) = \iint x(u, v) h(r - u, s - v) du dv \quad (+ b(r, s))$

$h(r, s)$: noyau 2D ou fonction d'étalement de point

Exemples de noyaux 2D



CONDITIONS DE HADAMARD (1923)

Soit $H : X \rightarrow Z$, X et Z espaces de Hilbert.

La résolution de l'équation $z = Hx$ est dite **bien posé** si la solution $\hat{x}(z)$ vérifie :

- ① existence
- ② unicité
- ③ stabilité : $\|z - z'\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|\hat{x}(z) - \hat{x}(z')\| \rightarrow 0$

NB : pour H opérateur linéaire, ① $\Leftrightarrow z \in \text{Im } H$; ② $\Leftrightarrow \ker H = 0$

PROBLÈME MAL-POSÉ : EXEMPLE (TIKHONOV, 1977)

■ Équation intégrale de Fredholm de première espèce

$$z(s) = Hx(s) = \int_a^b h(s, t)x(t) dt, \quad c \leq s \leq d$$

avec h fonction continue de dérivée partielle $\frac{\partial h}{\partial s}$ continue.

Problème : connaissant $\tilde{z} \simeq z$, trouver une solution continue $\hat{x} \simeq x$

■ Métriques

$$d_X(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_2 = \left(\int_a^b (x_1(s) - x_2(s))^2 ds \right)^{1/2}$$

$$d_Z(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|_2 = \left(\int_c^d (z_1(s) - z_2(s))^2 ds \right)^{1/2}$$

■ Problème d'existence

si $\tilde{z} = z + b$, où b est un bruit non $C^1 \Rightarrow \nexists \hat{x} : H\hat{x} = \tilde{z}$

■ Problème de stabilité

$$\tilde{z}(s) = z(s) + K \int_a^b h(s, t) \sin \omega t dt, \quad K > 0$$

solution : $\hat{x}(t) = x(t) + K \sin \omega t$

$\forall K, \forall \varepsilon$, on peut choisir ω tel que

$$d_Z(\tilde{z}, z) = K \left(\int_c^d \left(\int_a^b h(s, t) \sin \omega t dt \right)^2 ds \right)^{1/2} < \varepsilon$$

mais $d_X(\hat{x}, x) \geq K \left(\frac{b-a}{2} - \frac{1}{2\omega} \right)^{1/2}$ n'est pas bornée.

DIMENSION FINIE

$$z = \mathbf{H}x + \mathbf{b}, \quad x \in \mathbb{R}^M, \quad z \in \mathbb{R}^N$$

- ① **Existence** : si $z \notin \text{Im } \mathbf{H} \rightarrow$ projection de z sur $\text{Im } \mathbf{H}$
 \Leftrightarrow solution des moindres carrés : \hat{x}^{MC} minimise $\|z - \mathbf{H}x\|^2$
- ② **Unicité** : si $\ker \mathbf{H} \neq \mathbf{0} \rightarrow$ contrainte de norme minimale
 \Leftrightarrow inverse généralisée : $\hat{x}^{\text{IG}} =$ projection de \hat{x}^{MC} sur $(\ker \mathbf{H})^\perp$
- ③ **Stabilité** : assurée en dimension finie

INVERSE GÉNÉRALISÉE ET SVD

SVD : *Singular Value Decomposition*

■ **Équation normale** : $\mathbf{H}^t z = (\mathbf{H}^t \mathbf{H})x$

■ **Décomposition en valeurs singulières** :

- $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^N, \{\mathbf{v}_m\}_{m=1}^M$ bases orthonormées de $\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M$,
- $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\max(M, N)}$, suite décroissante positive, tels que

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{v}_m &= \lambda_m \mathbf{u}_m & \mathbf{H}^t \mathbf{u}_n &= \lambda_n \mathbf{v}_n \\ \Rightarrow \mathbf{H}^t \mathbf{H}\mathbf{v}_m &= \lambda_m^2 \mathbf{v}_m & \mathbf{H}\mathbf{H}^t \mathbf{u}_n &= \lambda_n^2 \mathbf{u}_n \end{aligned}$$

$$(\text{et } \mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^t)$$

■ **Inverse généralisée**

$$\hat{x}^{\text{IG}} = \sum_{m=1}^M \alpha_m \mathbf{v}_m \quad \text{avec } \alpha_m = \begin{cases} \mathbf{u}_m^t z / \lambda_m & \text{si } \lambda_m > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda_m = 0 \end{cases}$$

INVERSE GÉNÉRALISÉE ET CONDITIONNEMENT

■ Propagation d'erreur

Si $z \rightarrow z + \delta z$ alors $\hat{x}^{\text{IG}} \rightarrow \hat{x}^{\text{IG}} + \delta \hat{x}^{\text{IG}}$ et

$$\frac{\|\delta \hat{x}^{\text{IG}}\|^2}{\|\hat{x}^{\text{IG}}\|^2} \leq \frac{\|\mathbf{P} \delta z\|^2}{\|\mathbf{P} z\|^2} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_I^2}, \quad I = \text{rang}(\mathbf{H}) = \max_{\lambda_i > 0} i$$

- La borne est atteinte pour certains couples $(z, \delta z)$!
- Erreur relative suivant $v_m \propto \frac{\delta z_m}{z_m} \approx \frac{1}{\text{RSB}(m)}$
- $C(\mathbf{H}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_{\min\{M, N\}}}$: nombre de condition de \mathbf{H}

\mathbf{H} est dite *mal conditionnée* si $C(\mathbf{H})$ est grand (par exemple $C(\mathbf{H}) > 10^5$).

Les systèmes obtenus par discrétisation (fine) d'un problème mal-posé sont mal conditionnés

CONDITIONNEMENT : ILLUSTRATION

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Perturbations (erreurs relatives) :

$$\delta z = \begin{bmatrix} 0, 1 \\ -0, 1 \\ 0, 1 \\ -0, 1 \end{bmatrix} \quad (\|\delta z\| \simeq 10^{-2,5}) \Rightarrow \delta x = \begin{bmatrix} 8, 2 \\ -11, 6 \\ 3, 5 \\ 0, 1 \end{bmatrix} \quad (\|\delta x\| \simeq 10)$$

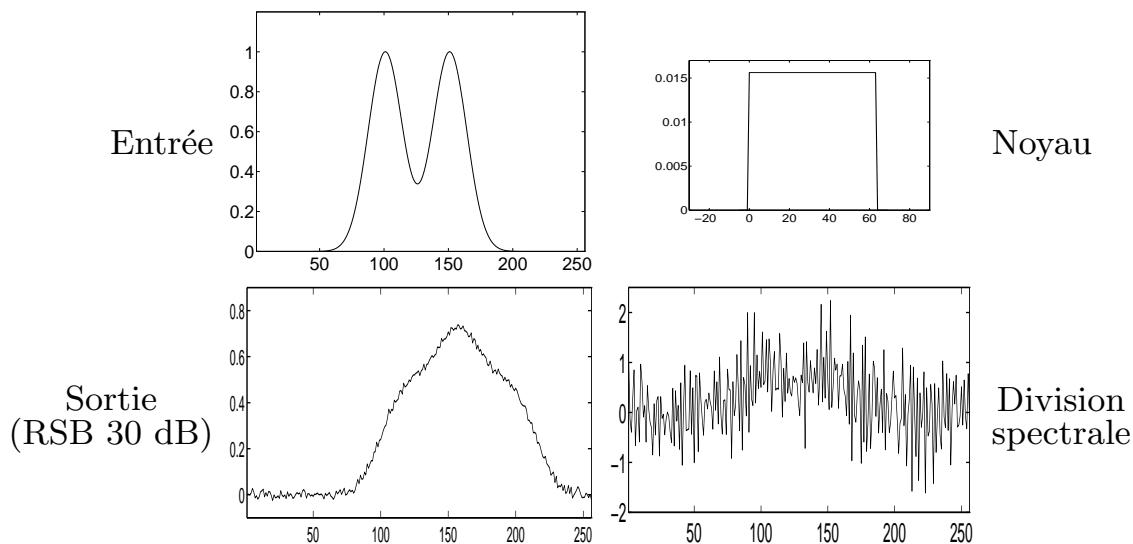
Valeurs propres de \mathbf{H} : 30,3 ; 3,9 ; 0,8 ; 0,01 $\Rightarrow C(\mathbf{H}^t \mathbf{H}) \simeq 10^7$

DÉCONVOLUTION NAÏVE : DIVISION SPECTRALE

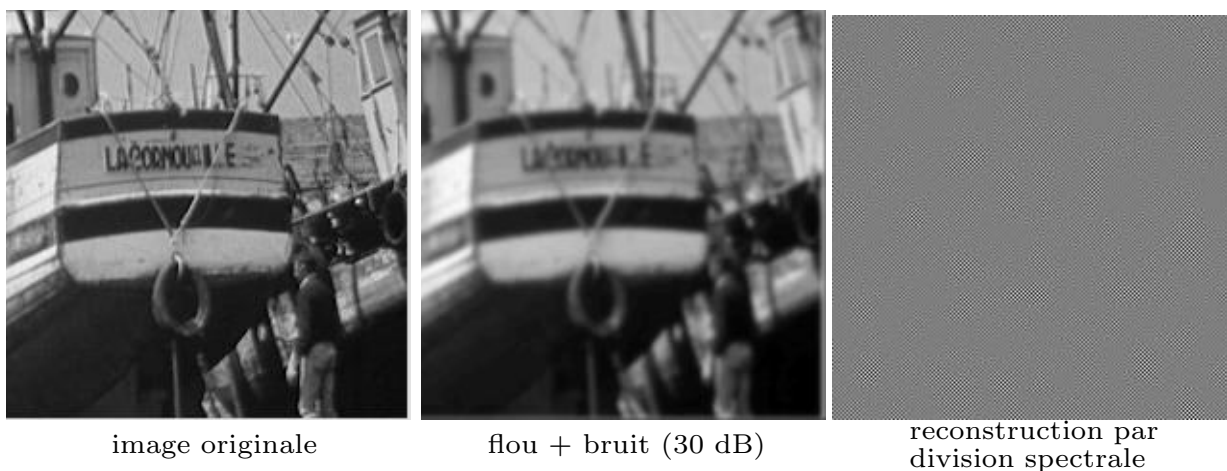
\hat{x}^{DS} définie par sa TF : $X^{\text{DS}}(\nu) \triangleq \begin{cases} Z(\nu)/H(\nu) & \text{si } H(\nu) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \nu \in [0, 1[$

à approcher par TFD : $x^{\text{DS}} = \text{ifft}(\text{fft}(z, Q) ./ \text{fft}(h, Q))$, $Q \geq \max\{M, N\}$

■ Exemple 1D : problème de Hunt [1970]



■ Exemple 2D



LIEN ENTRE IG ET DS (CAS 1D)

 (DS) par TFD calculée sur $M = N$ points

 \equiv

 (IG) pour \mathbf{H} matrice *circulante* :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 & h_P & \cdots & h_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_{P-1} & \cdots & h_0 & 0 & \cdots & 0 & h_P \\ h_P & \ddots & & h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_P & \cdots & & h_0 \end{bmatrix}$$



convolution circulaire (par périodisation)

$$\begin{aligned} \dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots \\ = x_{N-1} = x_N \quad \underbrace{x_1, x_2, \dots, x_N}_{\mathbf{x}} \quad = x_1 = x_2 \end{aligned}$$

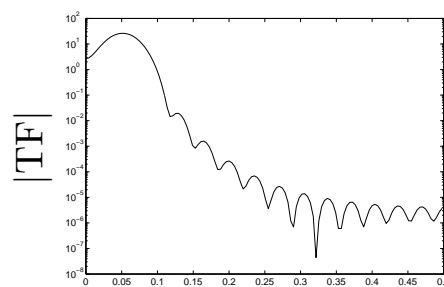
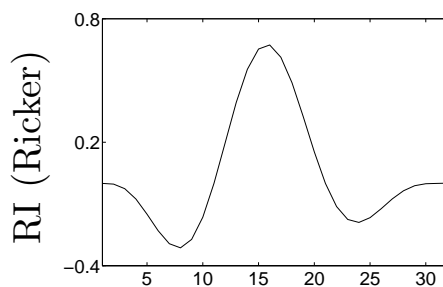
■ Diagonalisation des matrices circulantes

$$\mathbf{H} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^* \text{diag}\{\mathring{\mathbf{h}}\} \mathbf{W}, \quad \mathring{\mathbf{h}} = \mathbf{W} \mathbf{h} \quad (\mathbf{h} : 1 - \text{ère colonne de } \mathbf{H})$$

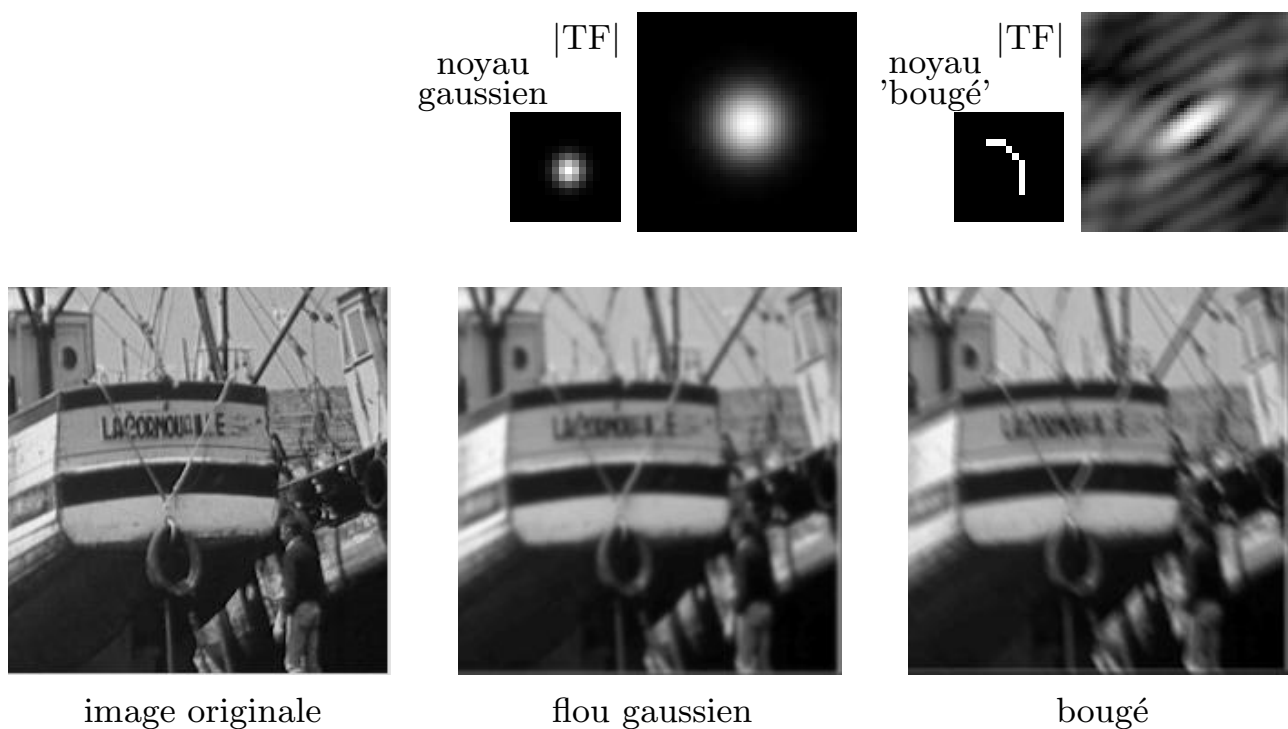
$$\text{avec } \mathbf{W} = \left\{ e^{-2i\pi \frac{1}{N}(k-1)(l-1)} \right\}_{kl} \text{ matrice de TFD : } \mathbf{h} \xrightarrow{\text{TFD}} \mathring{\mathbf{h}}$$

$$\blacksquare \text{ IG : } \mathbf{H}^t \mathbf{H} \widehat{\mathbf{x}}^{\text{IG}} = \mathbf{H}^t \mathbf{z} \Leftrightarrow \text{diag}\{|\mathring{\mathbf{h}}|^2\} \mathbf{W} \widehat{\mathbf{x}}^{\text{IG}} = \text{diag}\{\mathring{\mathbf{h}}^*\} \mathbf{W} \mathbf{z}$$

$$\Rightarrow \hat{x}_n^{\text{IG}} = \begin{cases} z_n / \mathring{h}_n & \text{si } \mathring{h}_n \neq 0, \\ 0 & \text{si } \mathring{h}_n = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{division} \\ \text{spectrale} \end{array} \right)$$

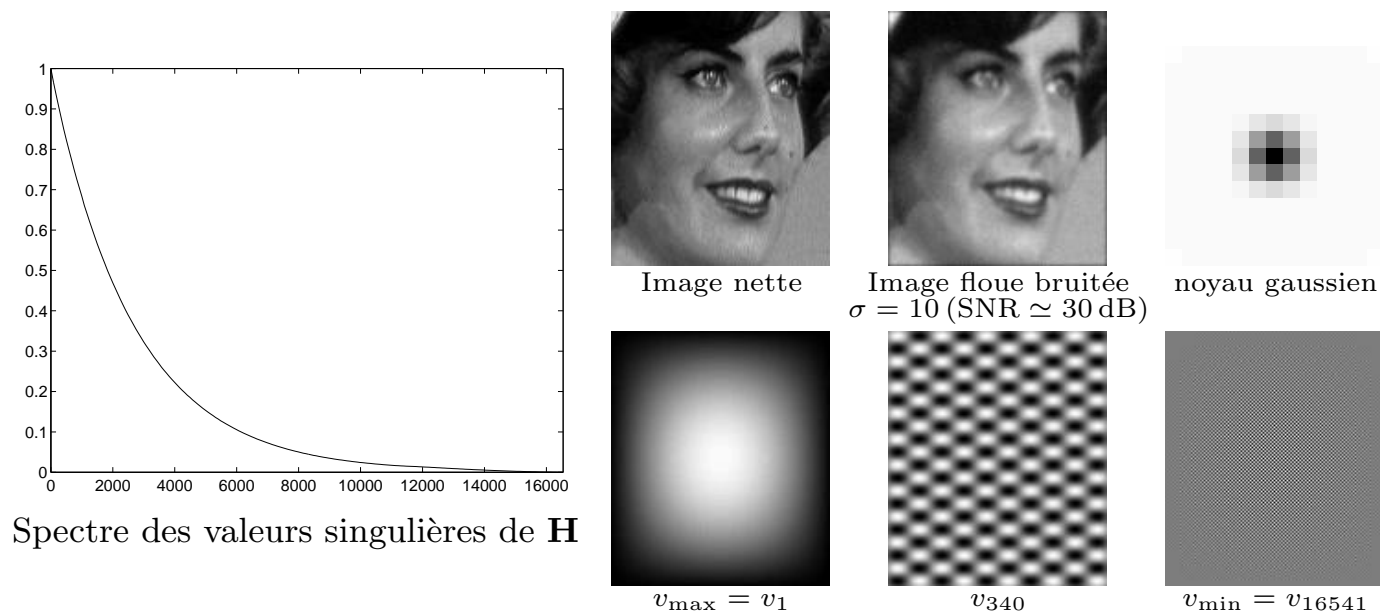
 ■ Conditionnement de \mathbf{H}


Convolution 2D

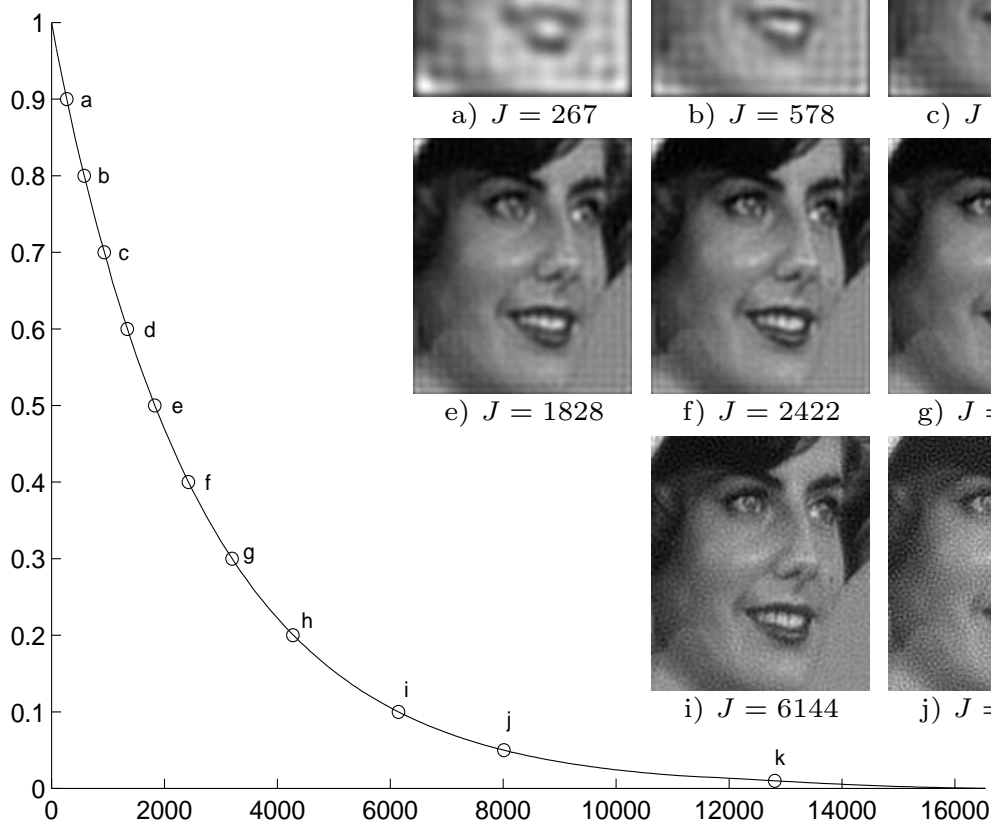


TRONCATURE DES VALEURS SINGULIÈRES — TSVD

$$\hat{\mathbf{x}}^{\text{TSVD}} = \sum_{j=0}^J \frac{\mathbf{u}_j^t \mathbf{z}}{\lambda_j} \mathbf{v}_j ; \text{ problème : choisir } J (< \text{rang}(\mathbf{H}))$$



Massacre à la troncature...



AMORTISSEMENT, WIENER ET RÉGULARISATION

■ La troncature molle

$$\hat{\mathbf{x}}^{\text{ASVD}} = \sum_{j=0}^I w_j \frac{\mathbf{u}_j^t \mathbf{z}}{\lambda_j} \mathbf{v}_j \quad \text{avec} \quad w_j \rightarrow 0.$$

■ Comment choisir la pondération w ?

... par la recherche d'un compromis sur $\mathbf{x} \Rightarrow$ régularisation

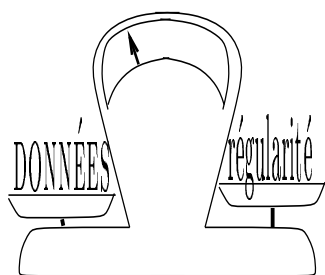
RÉGULARISATION : PRINCIPE GÉNÉRAL

- Le respect des données ne suffit pas...
- Régularisation = ajout d'une information *a priori*

Plusieurs approches possibles :

- contrainte $\hat{\mathbf{x}}_c = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 \quad \text{s. c. } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- paramétrée $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta})\|^2$
- pénalisée $\hat{\mathbf{x}}_p = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \alpha\Omega(\mathbf{x})$

LA RÉGULARISATION COMME UN COMPROMIS



$$J_\alpha(\hat{\mathbf{x}}_\alpha(\mathbf{z})) = \min_{\mathbf{x}} J_\alpha(\mathbf{x}),$$

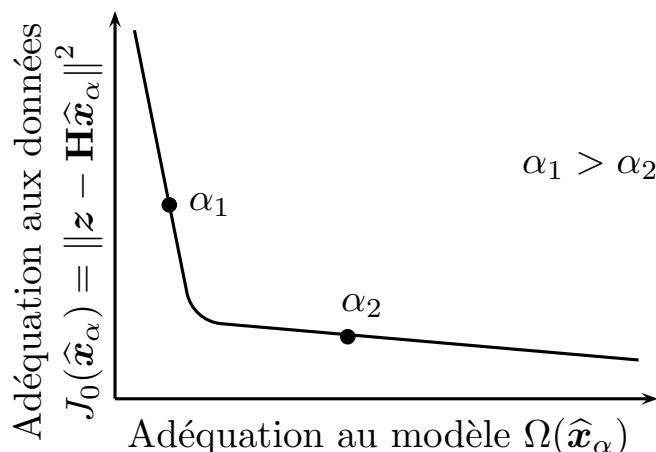
$$J_\alpha(\mathbf{x}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \alpha\Omega(\mathbf{x})$$

α : paramètre de régularisation

$\alpha \rightarrow 0$	$\alpha \rightarrow \infty$
$\hat{\mathbf{x}}_0 = \arg \min_{\mathbf{x}} \ \mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\ ^2$ solution non régularisée	$\hat{\mathbf{x}}_\infty = \arg \min_{\mathbf{x}} \Omega(\mathbf{x})$ solution <i>a priori</i> (ne dépend pas de \mathbf{z})

« L-CURVE »

[HANSEN 1992]



- Propriété : $J_0(\hat{x}_\alpha)$ et $-\Omega(\hat{x}_\alpha)$ sont des fonctions croissantes de α
- Démonstration : en combinant
$$\begin{cases} J_{\alpha_1}(\hat{x}_{\alpha_1}) \leq J_{\alpha_1}(\hat{x}_{\alpha_2}), \\ J_{\alpha_2}(\hat{x}_{\alpha_2}) \leq J_{\alpha_2}(\hat{x}_{\alpha_1}) \end{cases}$$

CAS QUADRATIQUE : APPROCHE PTT (PHILLIPS-TWOMEY-TIKHONOV)

■ Cas fonctionnel $\Omega(x) = \int \sum_i p_i(t) (x^{(i)}(t))^2 dt$ [TIKHONOV et ARSÉNINE 1976]

■ Dimension finie ($x \in \mathbb{R}^M$) [PHILLIPS 1962, TWOMEY 1962]

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= (x - x_\infty)^t \mathbf{Q} (x - x_\infty) \\ \hat{x} &= (\mathbf{H}^t \mathbf{H} + \alpha \mathbf{Q})^{-1} (\alpha \mathbf{Q} x_\infty + \mathbf{H}^t z) \\ &= x_\infty + (\mathbf{H}^t \mathbf{H} + \alpha \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{H}^t (z - \mathbf{H} x_\infty) \end{aligned}$$

Par exemple, $\mathbf{Q} = \sum_i (\mathbf{D}^{(i)})^t \text{diag}\{p_i\} \mathbf{D}^{(i)}$ avec

$$\mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{D}_M^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^{(2)} = \mathbf{D}_M^{(2)} = \mathbf{D}_{M-1}^{(1)} \mathbf{D}_M^{(1)}, \dots$$

APPLICATION : EXEMPLE DE HUNT

 ■ La solution cherchée est *douce*

$$J_\alpha(\mathbf{x}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \alpha \sum_{m=2}^{M-1} (x_{m+1} - 2x_m + x_{m-1})^2$$

$$\hat{\mathbf{x}}_\alpha^{\text{Hunt}} = (\mathbf{H}^t \mathbf{H} + \alpha (\mathbf{D}^{(2)})^t \mathbf{D}^{(2)})^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{z}$$

 ■ Calcul approché de $\hat{\mathbf{x}}_\alpha^{\text{Hunt}}$

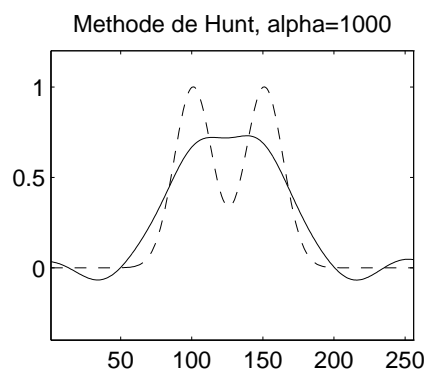
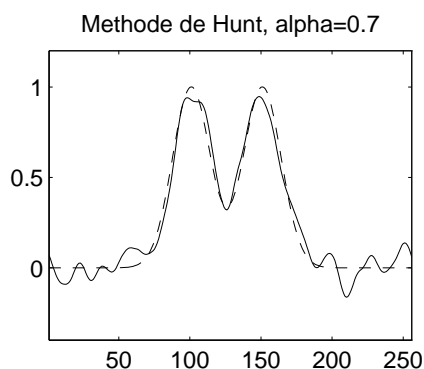
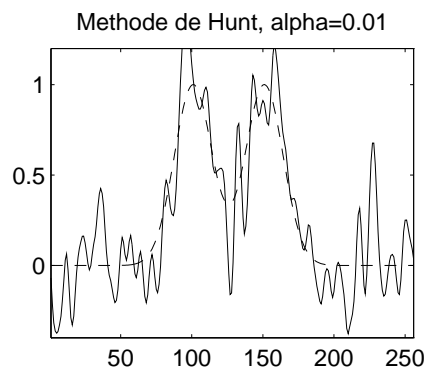
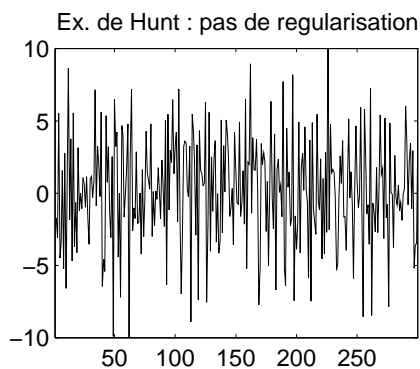
Soit $Q \geq \max\{M, N\}$:

```
Z=fft(z,Q); H=fft(h,Q); D=fft([2,-1,0,...,0,-1],Q);
xHunt=ifft(conj(H).*Z./(abs(H).^2+alpha*abs(D).^2))
```

— Pour $Q = M = N$, et \mathbf{H} et $\mathbf{D}^{(2)}$ circulantes, $\mathbf{xHunt} = \hat{\mathbf{x}}_\alpha^{\text{Hunt}}$

— Pour $Q \rightarrow \infty$, \mathbf{xHunt} correspond à $X_\alpha^{\text{Hunt}}(\nu) \simeq \frac{H^*(\nu)Z(\nu)}{|H(\nu)|^2 + \alpha |D(\nu)|^2}$

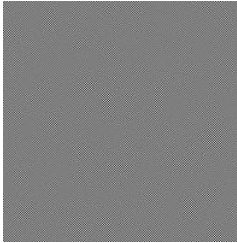
■ Résultats 1D



■ Résultats 2D



image originale



'lou + bruit 30 dB
division spectrale



reconstruction par
régul. quadratique

- [HANSEN 1992] P. HANSEN (1992), « Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve », *SIAM Review*, **34**, 561-580.
- [HUNT 1977] B. R. HUNT (1977), « Bayesian Methods in Nonlinear Digital Image Restoration », *IEEE Transactions on Communications*, **C-26**, 219-229.
- [NASHED 1981] M. Z. NASHED (1981), « Operator-theoretic and computational approaches to ill-posed problems with applications to antenna theory », *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **29**, 220-231.
- [PHILLIPS 1962] D. L. PHILLIPS (1962), « A technique for the numerical solution of certain integral equation of the first kind », *J. Ass. Comput. Mach.*, **9**, 84-97.
- [TIKHONOV et ARSÉNINE 1976] A. TIKHONOV et V. ARSÉNINE (1976), *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*, Éditions MIR, Moscou, Russie.
- [TWOMEY 1962] S. TWOMEY (1962), « On the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind by the Inversion of the Linear System Produced by Quadrature », *J. Assoc. Comp. Mach.*, **10**, 97-101.