

**ORSAY**  
n° d'ordre:

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD  
CENTRE D'ORSAY

**THÈSE**

présentée  
pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

par

Frédéric DUBLANCHET

**TITRE:** CONTRIBUTION DE LA MÉTHODOLOGIE BAYÉSIENNE  
À L'ANALYSE SPECTRALE DE RAIES PURES  
ET À LA GONIOMÉTRIE HAUTE RÉSOLUTION

Soutenue le **23 octobre 1996** devant la commission d'examen

Mme	O. MACCHI	Présidente
MM.	J.J. FUCHS	Rapporteur
	L. KOPP	Rapporteur
	P. DUVAUT	
	M. GRANGER	
	J. IDIER	
	F. FLORIN	Invité

## MOTIVATION ET ORGANISATION DU DOCUMENT

LE PRÉSENT mémoire est consacré à la résolution des problèmes classiques d'analyse goniométrique en traitement d'antenne et de recherches de raies en analyse spectrale, formulés comme des problèmes inverses et abordés dans le contexte de l'estimation bayésienne.

D'une manière générale, le traitement d'antenne intéresse un vaste domaine d'applications, dont les systèmes SONAR et RADAR, mais également l'imagerie des milieux stratifiés en prospection sismique ou encore la synthèse d'ouverture en radio-astronomie [HAYKIN 1985]. Dans toutes ces applications, des ondes sont reçues sur un réseau de capteurs, puis analysées. Les mesures recueillies en sortie des capteurs sont bruitées et limitées en résolution : elles doivent faire l'objet d'un traitement afin d'extraire les informations pertinentes qu'elles contiennent. Le processus de formation des observations commun à toutes ces applications implique des analogies dans les traitements sous-jacents à chacune d'elles. En fonction du degré de ces similitudes, des méthodes développées à l'origine dans un contexte spécifique, en réponse à une certaine classe de problèmes, peuvent être transposées ou adaptées à la résolution de problèmes issus d'applications différentes. En particulier, c'est le cas bien connu de la filiation de l'analyse spectrale de séries temporelles et de la localisation de sources en traitement d'antenne bande-étroite. Bien que chaque cadre d'étude présente ses particularités intrinsèques dont il faut tenir compte dans le traitement des données, ces « interactions méthodologiques » sont, quand elles sont possibles, fondamentales : elles sont à l'origine des travaux présentés dans ce document.

Ceux-ci se focalisent sur le traitement bande-étroite de signaux SONAR et RADAR émis ou réfléchis par des sources ponctuelles situées en champ lointain ainsi que, par l'analogie qui vient d'être évoquée et qui sera développée dans la suite, sur l'analyse spectrale de processus de raies pures. La difficulté de ces problèmes s'accroît avec la proximité en angle ou en fréquence des signaux reçus, de sorte qu'au cahier des charges s'ajoute l'objectif de séparer deux sources ou deux fréquences très proches l'une de l'autre. Les premières méthodes dites à « haute résolution » (HR) ont vu le jour dès les années 1960. Depuis, la littérature foisonne de variantes inspirées en substance des mêmes principes et dont on reconnaît aujourd'hui les limitations. En particulier, les méthodes de

référence (techniques de « sous-espaces », maximum de vraisemblance) achoppent sur la détection du nombre de sources, dont le pendant est la détermination de l'ordre du modèle des méthodes qui reposent sur une modélisation autorégressive des observations. Dans une analyse HR, l'estimation du nombre de sources ou de raies spectrales joue un rôle déterminant dans la mesure où elle conditionne la qualité globale des résultats. Or il est reconnu que les critères classiques de détection sont inefficaces lorsqu'un faible nombre d'observations est disponible ou (et) que les conditions de rapport signal-à-bruit sont difficiles. Au-delà du fait que toutes ces approches reposent sur des considérations asymptotiques en substituant à la matrice de covariance théorique des données une estimée qui exige un nombre suffisant d'observations, on peut penser que cette faiblesse émane, en amont, d'une démarche méthodologique peu naturelle qui consiste, sur la base des observations, à estimer le nombre de sources ou de raies présentes avant même de les localiser. En effet, les méthodes traditionnelles HR séparent systématiquement ces deux tâches dans la mesure où elles apparaissent de natures fondamentalement différentes, la première ayant pour objectif d'estimer une variable *discrete*, la seconde, un ensemble de variables *continues en nombre fixe*, préalablement estimé. Fusionner ces deux étapes en une seule est susceptible de lever la plupart des limitations de ces méthodes et d'améliorer les performances tant en détection qu'en localisation. C'est dans cette perspective que se situe le présent travail.

Les travaux rapportés ici proposent une nouvelle classe de solutions à ces problèmes, inspirée de la méthodologie inhérente aux problèmes de déconvolution d'impulsions rencontrés dans les domaines de la sismique-réflexion en géophysique et de l'échographie ultrasonore en contrôle non-destructif. En effet, ces trois problèmes partagent un objectif commun : identifier et caractériser un nombre *inconnu* d'impulsions en milieu bruité, les impulsions étant révélatrices de la présence de sources, de raies ou de réflecteurs. Or la méthodologie qui caractérise les problèmes de déconvolution impulsionale ne considère pas l'estimation du nombre d'impulsions comme un problème intrinsèque à résoudre en préalable à une étape de localisation. Elle vise à localiser *simultanément* un nombre inconnu d'impulsions. Une solution satisfaisante à ce problème, exemple typique de la classe des problèmes inverses dits *mal-posés*, est obtenue par régularisation, c'est-à-dire en obligeant la solution à vérifier certaines propriétés structurelles connues *a priori*, telles que son caractère impulsional. Cette approche permet de compenser le déficit d'information contenue dans les mesures en apportant une connaissance structurelle supplémentaire, de nature qualitative, sous forme déterministe ou statistique [DEMOMENT 1985]. Les méthodes de déconvolution impulsionale sont généralement abordées dans le contexte de l'estimation statistique bayésienne. Dans ce cadre de résolution, la structure impulsionale de la solution est décrite de façon satisfaisante par des processus aléatoires *composites*. Sur un plan algorithmique, une solution régularisée est obtenue par optimisation d'un critère mixte, composé d'un terme de fidélité aux données observées et d'un

terme traduisant l'*a priori* introduit sur la solution.

La plupart des résultats de ce travail ayant déjà été rassemblés sous forme de rapports, d'articles ou de communications, le présent document est en partie organisé autour de textes préexistants. Afin d'en préserver l'intégrité, ceux-ci sont proposés avec leur propres références bibliographiques. En outre, l'ensemble de la bibliographie est rassemblée à la fin du mémoire.

Le document est organisé comme suit. Le chapitre I présente les problèmes de géométrie et d'analyse spectrale ; les hypothèses de travail qui permettent d'établir un modèle mathématique commun y sont également définies. Le chapitre II est consacré à la démarche méthodologique orthodoxe ; il en expose les principes, en recense les limitations et propose des alternatives. Le chapitre III fait état des liens formels qui existent entre les problèmes étudiés et celui de la déconvolution impulsionale ; ce chapitre « pivot » a pour objet d'introduire la méthodologie bayésienne de détection-localisation qui constitue le fondement de ce travail. En particulier, les choix d'un estimateur bayésien et de modèles *a priori* susceptibles de représenter le caractère impulsional de la solution sont évoqués. Dans un premier temps, nous envisageons le modèle composite Bernoulli-Gaussien, très utilisé dans le domaine de la déconvolution impulsionale. Sa composante discrète permet de transformer la nature des problèmes qui deviennent des problèmes d'exploration combinatoire et d'utiliser, à cette fin, les techniques d'optimisation développées pour la déconvolution d'impulsions. Une application directe de ces principes méthodologiques sur un périodogramme, considéré comme la convolution bruitée d'un noyau connu par un spectre de raies modélisé par un processus Bernoulli-Gaussien, constitue le chapitre IV. Les différentes techniques qui permettent de résoudre les problèmes algorithmiques sous-jacents y sont également présentées. Cette première approche est destinée à mettre en évidence le bien-fondé de la démarche, tandis que le chapitre V fait l'objet d'une extension originale de la modélisation Bernoulli-Gaussienne ; elle établit un compromis entre les avantages et inconvénients liés au modèle Bernoulli-Gaussien. Le chapitre VI propose une généralisation au modèle continu Poisson-Gaussien, qui permet de représenter un nombre variable de sources ou de raies sur un continuum angulaire ou spectral et, par conséquent, de lever les contraintes propres à la manipulation de son homologue discret. En revanche, le problème ne se formule plus comme celui de l'exploration combinatoire d'un ensemble de cardinal fini. Après la définition de la vraisemblance *a priori* d'un tel processus et l'étude analytique du critère de localisation retenu, les aspects algorithmiques du problème sont examinés. Enfin, conclusion et perspectives sont rassemblées dans le chapitre VII.

## PRINCIPALES NOTATIONS UTILISÉES

$a$ ou $A$	: scalaire
$\mathbf{a}$ ou $\mathbf{a}$	: vecteur
$\mathbf{A}$ ou $A$	: matrice
$\mathbf{A}^T$ ou $A^t$	: transposé
$\mathbf{A}^*$	: conjugué
$\mathbf{A}^\dagger$	: transposé-conjugué
$\mathbf{A}^{-1}$	: inverse
$ \mathbf{A} $	: déterminant
$\mathbf{I}_n$	: matrice identité de taille $n$
$\text{diag}\{\mathbf{a}\}$	: matrice diagonale dont les éléments non nuls sont les composantes du vecteur $\mathbf{a}$
$\text{diag}\{\mathbf{A}\}$	: vecteur dont les composantes sont les éléments diagonaux de la matrice $\mathbf{A}$
$p(x)$	: densité de probabilité de $x$
$\Pr(x)$	: probabilité de $x$
$E[x]$	: espérance mathématique de $x$
$\mathcal{N}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\Gamma})$	: loi normale (réelle ou complexe suivant le contexte) de moyenne $\mathbf{m}$ et de covariance $\boldsymbol{\Gamma}$
$\chi_n^2$	: loi du $\chi^2$ à $n$ degrés de liberté
$\mathbb{1}_I(\cdot)$	: fonction indicatrice relative à l'ensemble $I$ $\mathbb{1}_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
$\Re$ ou $\text{Re}$	: partie réelle
$\Im$ ou $\text{Im}$	: partie imaginaire
$\mathbb{C}$	: corps des nombres complexes
$\mathbb{R}$	: corps des nombres réels

## CHAPITRE I

# FORMULATION ET MODÉLISATION DU PROBLÈME

**L**, OBJECTIF de ce premier chapitre est de présenter les problèmes de traitement d'antenne et d'analyse spectrale de raies pures et de figer les hypothèses de travail sous lesquelles un modèle mathématique simple à manipuler peut être établi. Goniométrie et filtrage d'antenne constituent les deux volets essentiels du traitement d'antenne. Dans ce document, nous nous focalisons sur les problèmes d'analyse goniométrique.

## 1 Le traitement d'antenne

D'une manière générale, l'objectif du traitement d'antenne (TA) est de décrire une ou plusieurs caractéristiques d'un environnement physique donné, à partir d'un ensemble de mesures dépendant de l'espace et du temps, fournies par un réseau de capteurs appelé *antenne*. Il s'agit d'extraire de ces mesures un certain nombre d'informations pertinentes concernant les émetteurs ou récepteurs de signaux, désignés sous le terme générique de *sources*, ou encore des informations relatives au milieu même de propagation des signaux (télécommunications). Au cœur de cette investigation, l'antenne joue donc le rôle d'interface entre l'environnement et les signaux porteurs d'informations.

### 1.1 Particularités de chaque application

Ainsi défini, le traitement d'antenne intéresse un vaste domaine d'applications, dont le SONAR, le RADAR, la radio-astronomie, la géophysique, l'imagerie médicale, le contrôle non-destructif, etc. Dans toutes ces applications, un milieu est éclairé par un champ d'ondes issu de différentes sources. Les deux situations suivantes sont généralement distinguées :

- le TA *passif*, pour lequel l'antenne a pour unique tâche « d'écouter » l'environnement ; ainsi le SONAR passif est typiquement le mode privilégié des sous-marins

pour des raisons évidentes de discrétion ;

- le TA *actif*, utilisé à des fins de prospection ou d'exploration et pour lequel un émetteur est utilisé pour illuminer ou éclairer l'environnement tandis que l'antenne écoute les signaux réfléchis par des sources ou cibles situées dans cet environnement ; les capteurs de l'antenne remplissent souvent ces deux fonctions d'émission-reception.

La nature des sources, comme celle des ondes et de leur milieu de propagation, ou encore celle des capteurs et de l'information recherchée, dépend évidemment de l'application concernée.

Ainsi, en SONAR – acronyme qui signifie « SOund Navigation And Ranging » – les ondes sont des vibrations mécaniques. Elles sont qualifiées d'ondes *acoustiques* et se propagent plus rapidement dans l'eau que dans l'air (1500 m/s contre 330 m/s). Les capteurs d'un système SONAR sont constitués de matériaux piézo-électriques ; ils sont sensibles aux variations de pression et permettent de transformer une contrainte mécanique en un signal électrique. Ces capteurs sont souvent appelés « hydrophones » en SONAR passif et « transducteurs » dans le cas actif. Les transducteurs permettent à la fois d'écouter et de transmettre un signal. Dans un système SONAR, l'antenne peut prendre des formes géométriques très variées : linéaire (baptisée « flûte ») lorsqu'elle est tractée derrière un bâtiment de surface, réseaux plans rectangulaire ou concentrique lorsqu'elle est solidaire du bâtiment, ou encore sphérique lorsqu'elle est immergée. Sa forme, comme ses caractéristiques, dépend essentiellement des conditions et objectifs de son utilisation. Quant aux sources, elles sont également de natures très diverses : bancs de poissons, bâtiments, fond marin, mines, etc. Notons enfin que le milieu de propagation joue un rôle très particulier dans le traitement de signaux SONAR [BOUVET 1991], notamment en raison de ses nombreuses inhomogénéités (bulles, éléments solides, êtres vivants, etc.).

Un système RADAR (« RAdio Detecting And Ranging ») ou de radio-astronomie utilise des ondes électromagnétiques qui, à la différence des ondes acoustiques, ne requièrent pas de support matériel puisqu'elles se propagent dans le vide à la vitesse de la lumière ( $3.10^8$  m/s). L'antenne peut prendre, là encore, des configurations géométriques extrêmement diverses : linéaire, circulaire, bidimensionnelle, etc. selon que le système RADAR est embarqué ou non, selon les objectifs de l'antenne, etc.

En séismologie, l'antenne est souvent linéaire : elle est constituée de géophones (transducteurs électro-acoustiques) sensibles aux ondes réfléchies par chaque inhomogénéité du sous-sol. Les capteurs sont encore des télescopes en radio-astronomie ou des détecteurs d'ultrasons ou de rayons X en imagerie médicale.

Dans chacune de ces applications, on doit considérer trois éléments essentiels : les capteurs, les ondes et le milieu de propagation. Leurs interactions, comme les phénomènes

physiques mis en jeu, sont naturellement propres à chaque application. Néanmoins, à travers cette variété d'applications, les procédés d'acquisition des mesures demeurent comparables et il est en outre possible de dégager des objectifs de traitement voisins. Ainsi la localisation d'inhomogénéités dans les profondeurs du sous-sol, la localisation de fissures en contrôle non-destructif et la localisation de sources dans le paysage marin ou spatial, à partir de données fournies par un réseau de capteurs, sont des exemples de problèmes présentant de fortes similitudes. Ce point est détaillé dans la section 1.1 du chapitre III.

Le traitement d'antenne concerne donc un grand nombre d'applications diverses et variées. Dès lors, on conçoit que des méthodes développées à l'origine dans un contexte spécifique, en réponse à un problème particulier, sont susceptibles d'être adaptées et étendues à la résolution de problèmes similaires bien qu'issus d'applications différentes.

## 1.2 Définition du problème posé

Les travaux rapportés dans ce document se focalisent sur le traitement des signaux SONAR et RADAR dans des conditions qui seront précisées ainsi que, par une analogie qui sera développée dans le § 2.4 de ce chapitre, sur l'analyse spectrale d'une certaine classe de séries temporelles.

De façon plus précise, l'objectif principal de ces travaux est d'établir une carte de position des sources dans le paysage spatial ou marin à partir de mesures recueillies par un système SONAR ou RADAR. En d'autres termes, le problème posé est celui de la *localisation de sources ou goniométrie*. L'enjeu en est important : cette étape de localisation des sources précède et, par conséquent, conditionne une *séparation-classification* des signaux reçus [LE CHEVALIER 1989]. L'objectif de celle-ci est de caractériser et d'identifier chaque source par divers paramètres d'intérêt (amplitude, spectre, polarisation, retard de groupe, décalage Doppler, etc.). L'analyse goniométrique constitue donc le premier maillon d'une chaîne classique de traitement d'antenne ; elle revêt à ce titre une importance considérable. Dans ce travail, seul le problème de la goniométrie sera abordé.

De même qu'une antenne est conçue pour fonctionner dans certaines conditions avec des objectifs bien définis, une méthode de TA est développée pour un type de problème et dans un contexte d'analyse particuliers. Ainsi pour le problème de la goniométrie, selon que les sources sont proches ou éloignées de l'antenne, selon leur taille, selon le contenu fréquentiel des signaux reçus, les mesures recueillies en sortie des capteurs feront l'objet d'un traitement spécifique, adapté aux besoins et aux conditions de l'expérimentation. L'efficacité de ce traitement est généralement subordonnée à une étape préalable d'analyse et de modélisation des interactions entre l'antenne, les ondes qui véhiculent l'information et le milieu de propagation de ces ondes. On trouvera dans [HAYKIN 1985]

une synthèse des modèles et traitements relatifs à la plupart des applications précitées.

En ce qui concerne les signaux recueillis par des systèmes SONAR et RADAR, une formulation commune peut être obtenue, moyennant la spécification d'un contexte d'analyse, à partir duquel un modèle reliant les mesures à l'information recherchée peut être construit. Un modèle mathématique simple à manipuler repose sur certaines hypothèses physiques de base. Celles-ci sont introduites dans le paragraphe suivant.

## 2 Modélisation mathématique

Le problème de la localisation de sources en SONAR et en RADAR peut se formuler de manière unifiée. En particulier, il est possible d'aboutir à une formulation mathématique commune, indépendante des phénomènes physiques mis en jeu. Dans cette section, nous préciserons les hypothèses retenues tout au long de ce travail.

### 2.1 Milieu de propagation – Physique des ondes

La physique de la propagation des ondes est décrite, en tout point  $\mathbf{r}$  de l'espace et à l'instant  $t$  par l'équation suivante, relative au milieu et à la nature des ondes considérées :

$$\left( \Delta_{\mathbf{r}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) s(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{I.1})$$

où  $\Delta_{\mathbf{r}}$  désigne l'opérateur laplacien au point  $\mathbf{r}$ . Dans le cas d'ondes électromagnétiques, l'équation (I.1) s'identifie à l'équation de Maxwell : la grandeur physique spatio-temporelle  $s(\mathbf{r}, t)$  représente alors un champ électromagnétique scalaire (au point  $\mathbf{r}$  et à l'instant  $t$ ) et  $c$  caractérise la célérité de la lumière. C'est le cas du RADAR.

Les lois de la physique permettent en outre de montrer que les ondes acoustiques vérifient une équation rigoureusement du même type que (I.1), moyennant un remplacement adéquat des grandeurs physiques mises en jeu [KINSLER et coll. 1982, chap. 5] :  $s(\mathbf{r}, t)$  est dans ce cas homogène à un champ de pression acoustique et  $c$  désigne la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu.

L'équation de propagation (I.1) admet comme solution une onde qui se propage. Les conditions de propagation de cette onde sont liées à certaines caractéristiques souhaitables du milieu :

- *homogénéité*: la vitesse de propagation  $c$  est indépendante de l'espace et du temps ; dans le cas contraire, des réfractions déforment la propagation des signaux ;
- *non dispersivité*: le milieu interagit de la même façon avec l'onde quelles que soient la fréquence et l'amplitude des signaux ;

### 2. Modélisation mathématique

- *absence de perte*: le milieu n'introduit pas d'atténuation supplémentaire à celle qui est autorisée par l'équation de propagation.

Les ondes solutions de (I.1) peuvent présenter des caractéristiques assez différentes. Parmi les plus utilisées en tant que modèles de propagation, on peut citer les ondes planes et les ondes sphériques. Les dernières décrivent relativement bien les formes de rayonnement de la plupart des sources, au moins à proximité de leur position. A l'inverse, les ondes planes constituent généralement une bonne approximation à une distance importante des sources. Notons que les seules ondes planes qui satisfont l'équation (I.1), et qui se propagent, s'expriment sous la forme générale :

$$S \exp(j2\pi\nu t - j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad j^2 = -1 \text{ et } S \in \mathbb{C}, \quad (\text{I.2})$$

où le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , indépendant de  $\mathbf{r}$  et de coordonnées constantes, est lié à la vitesse de propagation  $c$  et à la fréquence temporelle  $\nu$  par la relation (forme particulière de l'équation de Helmholtz) :

$$\mathbf{k} = -\frac{2\pi\nu}{c} \mathbf{u} \quad (\text{I.3})$$

où  $\mathbf{u}$  est un vecteur unitaire indiquant le sens de propagation de l'onde.

### 2.2 Champ de sources ponctuelles – Traitement bande-étroite

Le champ d'ondes rayonné est supposé stationnaire temporellement. Le milieu de propagation considéré homogène et isotrope, se comporte alors comme un filtre linéaire transformant tout signal qui s'y propage de façon linéaire et invariante dans le temps. Les signaux d'entrée sont fournis par les sources qui rayonnent en tout point  $\mathbf{r}$  de l'espace et à l'instant  $t$  un champ d'énergie  $s(\mathbf{r}, t)$ , d'origine électromagnétique ou acoustique. Le champ recueilli à l'instant  $t$  sur un capteur placé en un point  $\mathbf{r}_n$  de l'espace s'écrit :

$$y_n(t) = y(\mathbf{r}_n, t) = \iint a_n(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}, t - t') s(\mathbf{r}, t') d\mathbf{r} dt', \quad (\text{I.4})$$

où  $a_n$  inclue les caractéristiques du milieu de propagation au point  $\mathbf{r}_n$  ainsi que celles du capteur (directivité, gain). Une représentation équivalente dans le domaine dual ( $\mathbf{k}, \nu$ ) est donnée par la transformée de Fourier quadridimensionnelle<sup>1</sup> de la relation (I.4) :

$$Y_n(\mathbf{k}, \nu) = A_n(\mathbf{k}, \nu) S(\mathbf{k}, \nu). \quad (\text{I.5})$$

Lorsque le capteur est en outre omnidirectionnel, c'est-à-dire si  $A_n(\mathbf{k}, \nu)$  est indépendant de  $\mathbf{k}$ , il ne réalise qu'un filtrage temporel et l'on peut se contenter de la transformée de Fourier (TF) classique :

$$\tilde{y}_n(\nu) = \tilde{a}_n(\nu) \tilde{s}(\nu),$$

1. La transformée de Fourier à 4 dimensions du signal spatio-temporel  $x(\mathbf{r}, t)$  est définie par :

$$X(\mathbf{k}, \nu) = \iint x(\mathbf{r}, t) \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - j2\pi\nu t) d\mathbf{r} dt$$

avec des notations évidentes. Dans toute la suite, nous considérons un modèle de sources *punctuelles*. Ces sources sont en outre supposées *immobiles* pendant toute la durée d'acquisition des mesures. Les hypothèses d'isotropie et d'homogénéité du milieu permettent alors de considérer le signal issu d'un capteur comme la superposition des contributions individuelles des sources. Ces différentes contributions sont *discretées* et en *nombre fini*  $P$ . Dans ces conditions,

$$\tilde{s}(\nu) = \sum_{p=1}^P \tilde{s}_p(\nu) \quad (I.6)$$

et le champ mesuré s'écrit :

$$\tilde{y}_n(\nu) = \sum_{p=1}^P \tilde{a}_n(\nu) \tilde{s}_p(\nu) + \tilde{b}_n(\nu) \quad (I.7)$$

où le terme  $\tilde{b}_n(\nu)$  représente un bruit de mesure qui trouve son origine dans le milieu de propagation ainsi que dans le capteur.

Ainsi, disposant de  $N$  capteurs omnidirectionnels formant une antenne éclairée par  $P$  sources ponctuelles, le milieu de propagation est caractérisé par une matrice  $\mathbf{A}$  de filtres linéaires et homogènes (à  $P$  entrées et  $N$  sorties). En effet, pour toute fréquence  $\nu$  donnée, la relation (I.7) revêt la forme matricielle suivante :

$$\tilde{\mathbf{y}}(\nu) = \mathbf{A}(\rho, \nu) \tilde{\mathbf{s}}(\nu) + \tilde{\mathbf{b}}(\nu), \quad (I.8)$$

dans laquelle :

- $\rho$  désigne l'ensemble des paramètres spatiaux décrivant les positions relatives des sources et des capteurs ;
- le vecteur  $\tilde{\mathbf{y}}(\nu)$  de taille  $N$  concatène les TF, à la fréquence  $\nu$ , des mesures recueillies en sortie des  $N$  capteurs ;
- chaque élément  $\tilde{a}_{np}(\nu)$  de la matrice  $\mathbf{A}(\rho, \nu)$  de taille  $(N \times P)$  représente la fonction de transfert entre la source d'indice  $p$  et la sortie du capteur  $n$ , à la fréquence  $\nu$  ;
- le vecteur  $\tilde{\mathbf{s}}(\nu)$  rassemble les  $P$  amplitudes complexes des signaux sources, évaluées à la fréquence  $\nu$  ;
- le bruit  $\tilde{\mathbf{b}}(\nu)$  modélise tout ce qui n'est pas décrit dans le modèle.

**Signaux bande-étroite** Une formulation analogue à (I.8) est obtenue dans le domaine temporel lorsque le champ rayonné est dit « bande-étroite », c'est-à-dire lorsque l'énergie de tous les signaux reçus est confinée dans une bande fréquentielle de support étroit, centrée sur une fréquence porteuse  $\nu_0$ . Tout signal modulé autour de cette fréquence

## 2. Modélisation mathématique

porteuse est dit « bande-étroite » si sa phase et son amplitude sont sujettes à de lentes variations pendant la durée nécessaire à ce signal pour traverser le réseau de capteurs. Ces variations sont négligées en première approximation. Sous cette hypothèse, le modèle d'observation instantané prend également la forme d'un système linéaire bruité :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\rho, \nu_0) \mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t). \quad (I.9)$$

C'est la forme duale de la relation (I.8). Dans les applications, les signaux sources sont rarement bande-étroite. Néanmoins, un filtrage passe-bande des observations, souvent réalisé par TF des signaux reçus en cette fréquence d'analyse  $\nu_0$ , permet un traitement bande-étroite. En pratique, les signaux sont échantillonnés à la cadence  $1/T$  et la TF opère sur  $L$  échantillons, d'où une résolution fréquentielle de l'ordre de l'inverse de la durée de la mesure, soit  $1/LT$ . A chaque mesure effectuée à la fréquence de travail  $\nu_0$  correspond l'expression instantanée du modèle (I.8), à savoir :

$$\tilde{\mathbf{y}}(\nu_0, t) = \mathbf{A}(\rho, \nu_0) \tilde{\mathbf{s}}(\nu_0, t) + \tilde{\mathbf{b}}(\nu_0, t), \quad (I.10)$$

où  $t$  est caractéristique du temps de mesure. Généralement, l'opération est répétée à des instants différents  $t_i$ , ( $1 \leq i \leq K$ ). L'ensemble des données disponibles est alors constitué de la collection des vecteurs observations  $\tilde{\mathbf{y}}(\nu_0, t_i)$  ainsi acquis, désignés sous le terme anglo-saxon « *snapshots* » et que nous baptiserons « *enregistrements* ».

L'analyse bande-étroite diffère de son homologue appelée *a contrario* « large-bande » et qui concerne tous les signaux dont le spectre d'énergie s'étend sur une gamme de fréquences plus ou moins large. À la différence d'un traitement bande-étroite, un traitement large-bande repose sur des techniques qui prennent en compte, de manière cohérente, l'ensemble des fréquences d'intérêt. Ce point ne sera pas abordé dans ces travaux.

*Le cadre de la présente étude sera restreint à une analyse bande-étroite. Toutes les méthodes de localisation de sources présentées pourront s'appliquer indifféremment au modèle temporel (I.9) ou au modèle fréquentiel (I.10). En omettant désormais la dépendance fréquentielle, l'équation d'observation s'écrit à l'instant  $t$  :*

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\rho) \mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t). \quad (I.11)$$

## 2.3 Paramétrisation et modèle mathématique

La connaissance du modèle de propagation et des caractéristiques du réseau de capteurs est nécessaire pour expliciter la matrice  $\mathbf{A}(\rho)$  en fonction de paramètres physiques pertinents tels que les gains complexes des capteurs, la géométrie des fronts d'onde et celle

de l'antenne. Ces paramètres seront supposés connus. Dans le cas contraire, l'antenne devra faire l'objet d'une calibration préalable [BERCHER & LARZABAL 1994]. Dans la suite de ce document, outre le faisceau d'hypothèses formulé précédemment, nous considérons que :

- les capteurs sont de caractéristiques identiques, de gains complexes unitaires, dé-couplés et omnidirectionnels ;
- les fronts d'ondes au voisinage de l'antenne sont des plans ; cette hypothèse correspond à un modèle de sources ponctuelles situées à l'infini (elle est baptisée « champ lointain » et est justifiée en pratique si la distance antenne-source est supérieure au rapport  $\ell^2/\lambda$ , où  $\lambda$  désigne la longueur d'onde et  $\ell$  la longueur de l'antenne) [JOHNSON & DUDGEON 1993, p. 38] ;
- les capteurs régulièrement espacés d'une distance  $d$  forment une antenne linéaire uniforme (ALU) ;
- les sources se situent toutes dans un plan contenant l'antenne.

Ces hypothèses sont classiques et ont plusieurs conséquences. Tout d'abord, le modèle d'ondes planes sur un réseau de capteurs rectiligne permet de repérer la position d'une source  $p$  par un unique paramètre angulaire, appelé *gisement* et noté  $\theta_p$ . Ce paramètre représente l'angle formé par la direction d'arrivée du front d'onde avec la direction normale à l'antenne ; il est indépendant du temps lorsque la source est immobile. En conséquence, l'ensemble  $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P\}$  des gisements suffit à localiser les sources dans le paysage spatial : nous identifierons donc  $\rho$  à  $\boldsymbol{\theta}$ . L'énumération  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P$  correspond à une énumération arbitraire ; il sera néanmoins commode de confondre, abusivement, l'ensemble  $\boldsymbol{\theta}$  avec le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  des angles ainsi ordonnés.

Par ailleurs, les capteurs étant équidistants, chaque front d'onde arrive sur deux capteurs adjacents placés en  $\mathbf{r}_n$  et  $\mathbf{r}_{n+1}$  avec un retard constant qui ne dépend que de la distance intercapteurs  $d$ , de la direction d'arrivée  $\theta_p$  et de célérité  $c$  à la fréquence de travail  $\nu_0$ . On montre aisément que ce retard de propagation s'exprime par :

$$\tau_p = \frac{d}{c} \sin \theta_p.$$

Sous l'hypothèse bande-étroite, le retard de propagation se traduit par un simple déphasage  $\phi_p$  sur la fréquence porteuse et d'après (I.2) et (I.3) :

$$\phi_p \triangleq k \cdot (\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n) = 2\pi\nu_0\tau_p.$$

Les phases sont donc en progression arithmétique le long d'une antenne ALU. Si l'on désigne comme référence de phase l'un des capteurs situés à l'extrémité de l'antenne, soit

le capteur (1) sur la figure I.1, alors la réponse du réseau à une onde plane provenant de la direction  $\theta_p$  s'écrit :

$$\mathbf{a}(\theta_p) = \left[ 1 \ e^{j2\pi \frac{d}{\lambda_0} \sin \theta_p} \dots e^{j2\pi \frac{d}{\lambda_0} (N-1) \sin \theta_p} \right]^T. \quad (I.12)$$

où par définition  $\lambda_0 \triangleq c/\nu_0$  est la longueur d'onde à la fréquence de travail  $\nu_0$ . Le vecteur  $\mathbf{a}(\theta_p)$  est appelé *vecteur directionnel* (« steering vector ») ou *vecteur-source* associé au gisement  $\theta_p$ . A un déphasage arbitraire près, il s'interprète comme une fonction de transfert multidimensionnelle entre le signal reçu sur le capteur de référence et les  $(N-1)$  autres capteurs. Le vecteur  $\mathbf{a}(\theta_p)$  décrit une variété monodimensionnelle quand l'angle  $\theta_p$  parcourt son domaine de définition et la *variété d'antenne* est définie comme l'ensemble de tous les vecteurs directionnels sur l'horizon scruté  $\Theta$  :

$$\mathcal{V}(\Theta) \triangleq \{\mathbf{a}(\theta_p) / \theta_p \in \Theta\}.$$

Il est aisé de montrer que deux fronts d'ondes provenant de directions symétriques par rapport à l'axe formé par l'antenne sont caractérisés par le même vecteur directionnel. Cette ambiguïté est bien connue ; dans la suite on ne s'intéressera qu'aux sources situées dans un des demi-plans définis par l'antenne en imposant la condition :  $\Theta \subseteq [-\pi/2; \pi/2]$ . Notons que la variété d'antenne est rarement connue analytiquement ; on dispose dans ce cas d'un fichier de calibration d'antenne, l'expression analytique ne reflétant pas toujours fidèlement les contraintes imposées par l'expérimentation réelle.

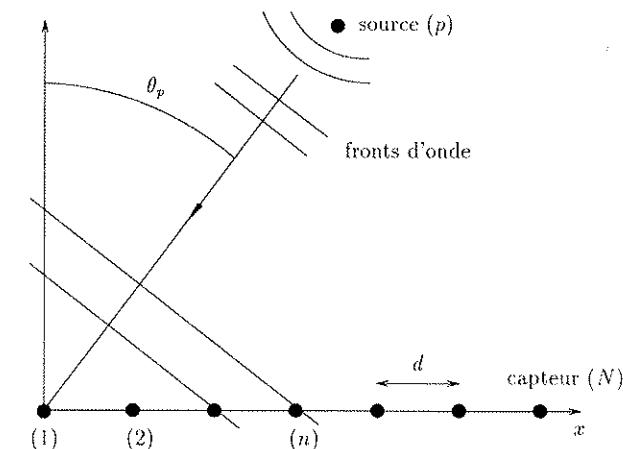


FIG. I.1 - Modèle d'ondes planes illuminant une antenne linéaire.

La matrice  $\mathbf{A}(\theta)$ , quant à elle, concatène  $P$  vecteurs directionnels dont la forme est donnée par (I.12). Elle possède, comme les vecteurs qui la constituent, une structure de Vandermonde :

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) | \cdots | \mathbf{a}(\theta_P)] \text{ avec } \theta = [\theta_1, \dots, \theta_P]^T \quad (\text{I.13})$$

Pour conclure, sous ces dernières hypothèses de travail, le modèle d'observation prend la forme générique :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t), \forall t = 1, \dots, K \quad (\text{I.14})$$

où  $K$  désigne le nombre d'enregistrements. Dans tout ce qui suit, nous adopterons indifféremment la notation  $\mathbf{y}_k$  ou  $\mathbf{y}(k)$  pour désigner le vecteur observation associé à l'enregistrement  $k$  et nous poserons  $\mathbf{Y} \triangleq [\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(k), \dots, \mathbf{y}(K)]$ . On procédera de la même façon pour les amplitudes  $\mathbf{s}$  et le bruit additif  $\mathbf{b}$ .

## 2.4 Analogie formelle avec l'estimation spectrale de raies pures

Le modèle d'ondes planes illuminant une antenne rectiligne à capteurs régulièrement espacés est très utilisé en raison de sa pertinence dans nombre de problèmes physiques. En particulier, il permet de réaliser une analogie avec l'estimation de fréquences pures d'une série temporelle échantillonnée uniformément. Cette analogie est largement mentionnée dans la littérature. Elle est maintenant établie, dans la mesure où l'approche développée dans ce travail contribue également à ce problème d'estimation spectrale.

A cet effet, considérons  $N$  échantillons d'un signal temporel modélisé comme la superposition de  $P$  exponentielles complexes noyées dans un bruit additif :

$$y(nT_e) = \sum_{p=1}^P a_p e^{j\varphi_p} \exp(j(2\pi\nu_p n T_e) + b(nT_e), n = 0, \dots, N-1. \quad (\text{I.15})$$

$T_e$  est la période d'échantillonnage et les quantités  $a_p$ ,  $\nu_p$  et  $\varphi_p$  désignent respectivement l'amplitude, la fréquence et la phase de chaque exponentielle complexe. En rassemblant toutes les observations  $y(nT_e)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ , dans un vecteur  $\mathbf{y}$  et en posant  $\boldsymbol{\nu} \triangleq \{\nu_1, \dots, \nu_p\}$ , la relation (I.15) s'écrit matriciellement :

$$\mathbf{y} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\nu})\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (\text{I.16})$$

où la matrice  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\nu})$  ( $N \times P$ ) est obtenue en juxtaposant  $P$  vecteurs-fréquence de la forme

$$\mathbf{e}(\nu_p) = [1 \ e^{j2\pi\nu_p T_e} \ \dots \ e^{j2\pi\nu_p(N-1)T_e}]^T, \quad (\text{I.17})$$

tandis que  $\mathbf{x}$  contient les amplitudes complexes correspondantes :

$$\mathbf{x} \triangleq [a_1 e^{j\varphi_1} \ a_2 e^{j\varphi_2} \ \dots \ a_P e^{j\varphi_P}]^T.$$

## 2. Modélisation mathématique

## Page 11

En comparant (I.16) et (I.17) respectivement à (I.14) et (I.12), l'analogie structurelle entre les deux modélisations apparaît clairement. En effet, il suffira de faire correspondre :

- à la période d'échantillonnage *temporelle*  $T_e$ , la période d'échantillonnage *spatiale*  $d$  le long de l'antenne ;
- aux fréquences *temporelles*  $\nu$ , les fréquences *spatiales*  $(\sin \theta)/\lambda_0$ ,

pour établir un lien formel entre les deux modèles. Entre autres conséquences, en s'inspirant du théorème de Shannon relatif aux signaux échantillonnés uniformément, il est possible d'exprimer la condition de Shannon en spatial. La fréquence d'échantillonnage spatial  $1/d$  doit être supérieure au double de la fréquence spatiale maximale contenue dans le signal reçu :

$$\frac{1}{d} \geq \frac{2(\sin \theta)_{\max}}{\lambda_0}.$$

Il en résulte qu'à la fréquence temporelle de travail, la condition sur la distance inter-capteurs

$$d \leq \frac{\lambda_0}{2} \quad (\text{I.18})$$

est nécessaire pour tout l'horizon  $\Theta = [-\pi/2, \pi/2]$  soit observable.

En pratique, l'analyse spectrale d'un signal est généralement réalisée sur la base de  $N$  échantillons issus d'un seul enregistrement. C'est la différence majeure avec l'analyse spatiale qui repose très souvent sur une série de  $K \geq 1$  mesures successives délivrant au total  $KN$  observations.

D'autre part, il est bien connu que la première difficulté de l'analyse spectrale émane du nombre limité d'échantillons disponibles [DUVAUT 1991]. Cette difficulté est d'autant plus cruciale en TA que le nombre d'échantillons s'identifie au nombre de capteurs qui, en pratique, peut prendre des valeurs très faibles (jusqu'à 2 selon les domaines d'applications), ce qui motive l'accumulation d'observations à différents instants de manière à augmenter le contenu informationnel des données.

L'analogie formelle qui vient d'être exposée justifie que des méthodes développées à l'origine pour la détermination de directions d'arrivée sous le modèle ALU puissent être appliquées à l'estimation de raies pures et vice versa [JOHNSON 1982]. De façon similaire, les travaux rapportés dans ce manuscrit reposent sur des relations, tant interprétatives que structurelles, avec des modèles convolutionnels. Ce point sera plus amplement détaillé par la suite.

### 3 Position du problème

Compte tenu de l'ensemble des hypothèses formulées et du contexte d'étude retenu, il est maintenant possible d'énoncer le problème de la localisation de sources en traitement d'antenne bande-étroite :

*Etant donnés  $K$  vecteurs observation et le modèle (I.14), il s'agit de déterminer :*

1. *l'ensemble  $\theta$  des directions d'arrivée ou, de manière équivalente, les colonnes de la matrice  $\mathbf{A}(\theta)$  ;*
2. *les amplitudes complexes des sources associées à ces directions d'arrivée.*

En vertu de l'analogie mentionnée précédemment, le problème de l'analyse spectrale de raies pures se formule dans les mêmes termes moyennant une substitution des quantités  $\theta$  et  $\mathbf{A}(\theta)$  par leurs homologues respectives, c'est-à-dire l'ensemble des fréquences pures  $\nu$  et la matrice  $\mathbf{E}(\nu)$ .

Cependant, quelques nuances différencient ces deux domaines. En analyse spectrale, seules  $N$  données sont en général disponibles, ce qui correspond à la situation où  $K = 1$ . En outre, on attache plus d'importance aux amplitudes, aux phases ou aux puissances des raies qu'en traitement d'antenne pour lequel les signaux sources sont caractérisés par divers paramètres dont l'amplitude, la phase, la puissance, mais aussi la fréquence, le décalage Doppler, la polarisation, etc. Cette caractérisation relève de l'étape de séparation-classification qui succède à celle de la localisation. Elle ne sera pas évoquée dans ce manuscrit.

Remarquons dès à présent que les modèles d'observation (I.14) et (I.16) sont linéaires par rapport aux amplitudes. En conséquence, une estimation au second ordre de ces dernières se réduit à un simple critère des moindres carrés dès qu'une estimation des directions d'arrivée ou des fréquences du signal est obtenue. Elle ne pose donc aucune difficulté et c'est au demeurant la partie la moins importante du problème. En revanche, les angles d'arrivée, ou les fréquences en analyse spectrale, interviennent de façon non linéaire dans ces modèles et leur estimation constitue la composante principale du problème.

La difficulté du problème s'accroît avec la proximité des angles d'arrivée ou des fréquences, de sorte qu'au cahier des charges s'ajoute généralement l'objectif de séparer deux sources ou deux raies très proches, difficulté qui s'ajoute aux dégradations introduites par le milieu de propagation des ondes et l'instrument de mesure. Une analyse « haute résolution » exige de prendre en charge l'estimation du nombre de sources (resp. de raies), c'est-à-dire de la dimension du vecteur  $\theta$  (resp.  $\nu$ ). Dans la suite, nous verrons

#### 3. Position du problème

que ce paramètre discret, rarement connu en pratique, est à l'origine de nombreuses difficultés de natures méthodologique et algorithmique. Le chapitre qui suit se propose de faire une synthèse des approches traditionnelles du problème.

## CHAPITRE II

### LA MÉTHODOLOGIE CLASSIQUE

**L**E PROBLÈME posé se résume à celui de la *localisation* et de la *caractérisation* d'un nombre *inconnu* de sources ou de raies en milieu bruité. Le but de ce chapitre n'est pas d'établir une liste exhaustive de toutes les approches existantes dédiées à la résolution de ce problème mais de considérer, dans leurs grandes lignes, les « courants de pensées » qui ont significativement marqué le domaine. A chaque fois qu'il sera nécessaire, le lecteur sera renvoyé aux ouvrages et articles de référence.

Nous nous proposons donc de recenser les principes qui sous-tendent la méthodologie traditionnelle dans le but d'exhiber les origines profondes de ses limitations. Une seconde motivation, qui se suffit à elle-même, réside dans le fait que la culture moderne du traitement d'antenne est fortement imprégnée de ces principes méthodologiques.

Dans un souci d'unité, toutes les approches classiques du problème seront abordées dans le contexte de la localisation de sources bande-étroite, bien que la majorité s'appliquent également dans le cadre de l'analyse spectrale de raies pures.

#### 1 Techniques de formation de voies

Il nous paraît important de nous attarder sur les techniques de formation de voies pour les raisons suivantes :

- parmi toutes les méthodes de TA, ces techniques sont les plus anciennes, les plus naturelles et, de fait, encore les plus utilisées aujourd'hui ;
- ce sont les seules à ne pas considérer le dénombrement des sources comme un problème intrinsèque.

## 1.1 Formation de voies standard

Dans le premier chapitre, nous avons vu que les signaux reçus sur chaque couple de capteurs adjacents sont affectés d'un retard de phase qui, par ailleurs, est identique dans le cas du réseau linéaire uniforme que nous considérons. L'idée de la formation de voies standard (FVS) consiste alors à remettre en phase, dans plusieurs directions d'intérêt, les sorties des différents capteurs. La connaissance du modèle de propagation est donc nécessaire pour compenser ces retards de phase et c'est le vecteur directionnel qui permet de réaliser cette opération en *focalisant* l'antenne dans une direction particulière  $\theta$  pour « former » la voie :

$$z_k(\theta) = \mathbf{a}^\dagger(\theta) \mathbf{y}_k.$$

Le vecteur directionnel joue donc ici le rôle d'un filtre spatial mis en œuvre sur le jeu des  $N$  observations contenues dans le vecteur  $\mathbf{y}_k$ . L'antenne est ainsi orientée *électroniquement* (les premiers systèmes de formation de voies orientaient l'antenne mécaniquement). Le filtre spatial atténue toutes les ondes planes provenant d'une direction différente de  $\theta$ . Dans cette opération, les signaux utiles sont sommés de manière cohérente tandis que le bruit additif l'est de manière incohérente. Il en résulte une amélioration du rapport signal à bruit. Le *filtrage spatial* constitue la première étape d'un système de formation de voies. Il est suivi par une opération de *quadrature* destinée à obtenir une mesure de la puissance reçue dans la direction scrutée :

$$P_k(\theta) \triangleq |z_k(\theta)|^2.$$

Compte tenu de la structure de Vandermonde du vecteur directionnel (I.12), celle-ci s'écrit encore :

$$P_k(\theta) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{y}_k[n] e^{-j2\pi n \frac{\theta}{\lambda_0} \sin \theta} \right|^2.$$

Cette écriture fait apparaître clairement l'analogie qui existe, sous l'hypothèse d'une antenne de type ALU, entre la FVS et le périodogramme en tant qu'estimateur de puissance pour les séries temporelles [JOHNSON 1982, KAY 1988]. Enfin, la dernière étape d'un système FVS est la phase d'*intégration* dont le but est de construire, sur la base des  $K$  enregistrements, un estimateur de la puissance moyenne reçue dans chaque direction d'intérêt :

$$P(\theta) = E[|z(\theta)|^2] = \mathbf{a}^\dagger(\theta) \mathbf{R} \mathbf{a}(\theta).$$

où  $\mathbf{R} \triangleq E[\mathbf{y}\mathbf{y}^\dagger]$ . En pratique, un estimateur de cette puissance est fourni en substituant à la matrice de covariance des observations  $\mathbf{R}$  une estimée  $\widehat{\mathbf{R}}$  qui tient compte des  $K$  enregistrements :

$$\widehat{P}(\theta) = \mathbf{a}^\dagger(\theta) \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{a}(\theta). \quad (\text{II.1})$$

Chaque système de FVS est caractérisé par son diagramme de directivité (module carré de la fonction de transfert du filtrage spatial effectué) dont la largeur du lobe central

## 1. Techniques de formation de voies

## Page 17

à  $-3$  dB fixe le pouvoir de résolution<sup>1</sup>. Il est possible d'en réduire la largeur en introduisant une fenêtre de pondération sur les observations [HARRIS 1978], mais au prix d'une augmentation du niveau des lobes secondaires. Ce compromis est en pratique difficile à gérer : il dépend essentiellement du contexte de l'analyse. A l'instar des méthodes d'analyse spectrale fondées sur la transformée de Fourier, dont la résolution est liée au nombre de données, le pouvoir de résolution d'un système de FVS est intrinsèquement limité par la dimension physique de l'antenne, c'est-à-dire le nombre de capteurs. C'est la limitation majeure de cette approche. Nous verrons dans le chapitre IV que des techniques de déconvolution permettent *a posteriori* d'en améliorer la résolution [FUCHS & CHUBERRE 1994, DUVAUT & DUBLANCHET 1995]. Un second inconvénient, lié au premier, réside dans le fait que la FVS ne tient pas compte de la présence des autres sources pour réaliser une mesure quand l'antenne pointe dans une direction particulière.

## 1.2 Formation de voies adaptative

Pour pallier ces deux limitations, CAPON [CAPON 1969] eut l'idée d'adapter le filtre spatial de façon à minimiser les contributions des sources qui ne sont pas situées dans la direction de visée. C'est en ce sens que la méthode de Capon est qualifiée d'*adaptative*. Cette approche conduit à rechercher le filtre spatial  $\mathbf{w}(\theta)$  qui minimise la puissance globale

$$P_{\text{CAP}}(\theta) = \mathbf{w}^\dagger(\theta) \mathbf{R} \mathbf{w}(\theta)$$

sous la contrainte de normalisation  $\mathbf{w}^\dagger(\theta) \mathbf{a}(\theta) = 1$ . Ce problème d'optimisation sous contrainte peut se résoudre par la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui mène au filtre optimal :

$$\mathbf{w}_{\text{opt}}(\theta) = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^\dagger(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)},$$

d'où l'on déduit l'estimateur de Capon :

$$\widehat{P}_{\text{CAP}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^\dagger(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}. \quad (\text{II.2})$$

En pratique, on substitue à  $\mathbf{R}$  une estimée  $\widehat{\mathbf{R}}$ . Enfin, à la différence de la FVS, la formation de voies adaptative (FVA) est caractérisée par un pouvoir de résolution dépendant du rapport signal-à-bruit : plus ce rapport est élevé, meilleure est la résolution.

Signalons également l'utilisation possible [JOHNSON 1982, HAYKIN et coll. 1992] de toutes les méthodes fondées sur une modélisation AR ou ARMA [KAY 1988] et pour lesquelles le choix de l'ordre du modèle demeure un problème ouvert. Néanmoins, ces

<sup>1</sup> Le pouvoir de résolution est sujet à de multiples définitions ; il est ici défini comme la capacité à séparer deux sources proches de mêmes puissances.

techniques et celle de CAPON ont permis d'amorcer un pas vers la « haute résolution »<sup>2</sup>. Celle-ci est atteinte par les méthodes qui exploitent pleinement l'hypothèse d'un champ discret de sources ponctuelles.

## 2 La méthodologie « haute résolution »

Exploiter le modèle du champ de sources ponctuelles exige de prendre en compte le nombre de sources présentes dans le secteur observé, et par conséquent de considérer le problème de son estimation (*détection*). Cette variable discrète joue un rôle fondamental dans la mesure où les dimensions des quantités mises en jeu dans le modèle d'observation (I.14) en dépendent directement. En conséquence, l'ensemble des angles d'arrivée  $\theta$  doit être estimé dans un espace *continu, borné* et de *dimension inconnue*. Cette dimension variable renforce la complexité du problème de la goniométrie : au-delà des problèmes algorithmiques qu'elle est susceptible d'engendrer, elle soulève des difficultés d'ordre méthodologique. C'est le prix à payer pour atteindre une analyse haute résolution.

Lorsque le nombre de sources n'est pas connu *a priori*, il est naturel de l'intégrer dans l'ensemble des paramètres à estimer (angles d'arrivée et amplitudes associées). Plusieurs stratégies sont alors envisageables : on peut choisir d'estimer le nombre des sources et leurs paramètres respectifs *simultanément, séquentiellement ou encore indépendamment*. La nécessité d'obtenir des résultats cohérents autorise cependant l'élimination de la dernière option. La démarche traditionnelle haute résolution (HR) choisit d'adopter une stratégie d'estimation *séquentielle*. En effet, elle sépare systématiquement la détermination du nombre de sources et l'estimation des angles d'arrivée dans la mesure où ces deux tâches apparaissent de natures fondamentalement différentes, la première ayant pour objectif d'estimer une variable *discrète*, la seconde un ensemble de paramètres *continus en nombre fixe*. Elle s'affranchit ainsi des difficultés d'ordre algorithmique liées à la dimension variable du modèle d'observation.

L'estimation du nombre de sources est donc considéré comme un problème intrinsèque à résoudre au préalable. Une procédure de localisation est ensuite mise en œuvre sur la base du nombre de sources détectées : celle-ci devient alors un problème d'estimation dans un espace de dimension rendue *fixe*. En résumé, la méthodologie classique HR repose sur les trois procédures séquentielles :

1. une étape de **détection** dédiée à l'estimation de la composante discrète  $P$  du problème, *i.e.*, le nombre de sources ;

<sup>2</sup> Ce qualificatif est réservé aux méthodes dont le pouvoir de résolution asymptotique est infini, c'est-à-dire qu'il n'y a théoriquement aucune limitation en termes de rapport signal-à-bruit et de proximité entre sources [BOUVET 1991].

### 3. Critères de détection

2. une étape de **localisation** des sources en nombre *fixe*, déterminé par l'étape précédente.
3. une étape d'**estimation** des amplitudes des sources localisées.

La détermination de la variable *discrète* du problème représente donc une étape cruciale au sein de cette démarche séquentielle car de toute évidence elle conditionne la qualité de l'estimation des directions d'arrivée. La seconde étape ne remet pas en cause le résultat issu de la première. Seule la troisième est susceptible de le faire – mais sans rétroaction – par seuillage *a posteriori* sur les amplitudes. Il importe donc que l'estimation de  $P$ , dont le rôle est déterminant, soit extrêmement fiable. L'enjeu de la détection est perceptible notamment dans la situation où les sources représentent une menace potentielle. Il s'agit donc d'un problème-clé.

Les deux sections qui suivent sont consacrées aux techniques de détection usuelles et aux méthodes HR de localisation de sources en nombre connu ou prédéterminé.

## 3 Critères de détection

Les critères de détection sont exclusivement consacrés à l'estimation de la variable discrète  $P$  du problème, sur la seule base des observations. La littérature du traitement d'antenne foisonne de critères de détection de toutes natures : heuristiques, tests d'hypothèses, etc. Néanmoins, deux critères font référence : ce sont les critères fondés sur des arguments issus de la théorie de l'information.

### 3.1 Éléments théoriques

Le développement du premier critère de détection *informationnel* est dû à AKAIKE [AKAIKE 1974]. Les principes en sont les suivants : soient  $K$  observations indépendantes  $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_K\}$  d'un processus aléatoire vectoriel dont la densité de probabilité (d.d.p.) jointe  $p(\mathbf{y}; \mathcal{M}_0) = \prod_{k=1}^K p(\mathbf{y}_k; \mathcal{M}_0)$  est paramétrée par  $\mathcal{M}_0$ . L'ensemble  $\mathcal{M}_0$  est le « vrai » modèle, constitué de  $Q$  paramètres indépendants : on dira que  $Q$  est sa dimension minimale, ou son ordre.

Partant des seules observations, on cherche alors à retrouver l'ordre du modèle. Dans ce dessein, tout modèle candidat  $\mathcal{M}$  de la même famille que  $\mathcal{M}_0$  et d'ordre  $q$  paramétrise la vraisemblance des observations, *i.e.*, la d.d.p.  $p(\mathbf{y}; \mathcal{M})$ . Une mesure de l'écart entre les deux modèles est alors donnée par la mesure d'information de Kullback-Leibler [KULLBACK 1959] :

$$I_{KL}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_0) = \int p(\mathbf{y}; \mathcal{M}_0) \ln \frac{p(\mathbf{y}; \mathcal{M}_0)}{p(\mathbf{y}; \mathcal{M})} d\mathbf{y}.$$

Cette quantité est toujours positive. Elle s'annule si et seulement si  $p(\mathbf{y}; \mathcal{M}) = p(\mathbf{y}; \mathcal{M}_0)$ . Bien qu'elle ne soit pas, au sens mathématique du terme, une *distance* entre densités (elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire et n'est pas symétrique), elle fournit ici une mesure d'adéquation de chaque modèle aux observations et le principe consiste à retenir parmi les modèles candidats celui qui minimise l'information de Kullback-Leibler. Puisque  $p(\mathbf{y}; \mathcal{M}_0)$  ne dépend pas de  $\mathcal{M}$ , il est équivalent de sélectionner le modèle qui minimise la quantité

$$I'_{KL}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_0) = - \int p(\mathbf{y}; \mathcal{M}_0) \ln p(\mathbf{y}; \mathcal{M}) d\mathbf{y}.$$

Sous l'hypothèse d'un grand nombre d'observations, on montre que :

$$I'_{KL}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\ln p(\mathbf{y}; \widehat{\mathcal{M}}) + q \quad (\text{II.3})$$

où  $\widehat{\mathcal{M}}$  désigne l'estimée des paramètres du modèle  $\mathcal{M}$  au sens du maximum de vraisemblance :

$$\widehat{\mathcal{M}} = \arg \max_{\mathcal{M}} \{p(\mathbf{y}; \mathcal{M})\}.$$

### 3.1.1 Critère d'Akaike

Le critère d'Akaike est alors défini à partir de (II.3) selon :

$$AIC(q) = -2 \ln p(\mathbf{y}; \widehat{\mathcal{M}}) + 2q \quad (\text{II.4})$$

où  $q$  est le nombre de paramètres indépendants du modèle  $\mathcal{M}$ . Le modèle retenu est celui dont l'ordre minimise (II.4).

### 3.1.2 Critère de Rissanen-Schwartz

Le second critère de cette nature, dont la structure est très voisine de celle du critère d'Akaike, est dû indépendamment à RISSANEN [RISSANEN 1978] et à SCHWARTZ [SCHWARTZ 1978]. Le premier suggère de retenir le modèle qui permet de coder les observations avec un minimum de symboles. Le second fonde sa démarche sur des arguments bayésiens en assignant à tout modèle candidat une d.d.p. *a priori* et en choisissant le modèle optimal au sens du maximum de la densité *a posteriori*. Toujours sous l'hypothèse d'un nombre important d'observations, les deux approches conduisent à la forme commune :

$$MDL(q) = -2 \ln p(\mathbf{y}; \widehat{\mathcal{M}}) + q \ln K \quad (\text{II.5})$$

où MDL signifie « Minimum Description Length ».

Les deux critères AIC (II.4) et MDL (II.5) diffèrent donc par leur second terme. Notons dès à présent que celui d'Akaike est indépendant du nombre d'observations, ce qui lui confère un biais asymptotique. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

### 3. Critères de détection

## 3.2 Formes spécifiques en TA

Ces critères ont été développés à l'origine pour la sélection d'ordre de modèle en analyse spectrale autorégressive. WAX et KAILATH les ont adapté à la détermination du nombre de sources en traitement d'antenne [WAX & KAILATH 1985]. Les auteurs ont fondé leur développement sur une paramétrisation structurelle de la matrice de covariance des observations. Celle-ci requiert au préalable plusieurs hypothèses statistiques afférentes aux quantités mises en jeu dans le modèle d'observation (I.14). Ainsi, le bruit additif  $b_k$  est supposé spatiallement blanc, Gaussien complexe circulaire, centré et de variance  $\sigma_b^2$  que nous noterons :  $b_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_b^2 \mathbf{I}_N)$ . Ce bruit est en outre indépendant d'enregistrement en enregistrement et indépendant des amplitudes des  $P$  sources contenues dans  $s_k$ . Enfin, ces dernières sont supposées normalement distribuées, de moyenne nulle et de covariance  $\mathbf{S}$  :  $s_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{S})$ . Associées à la linéarité du modèle, ces hypothèses permettent de conclure à la normalité des observations, distribuées selon  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$  avec

$$\mathbf{R} \triangleq \mathbb{E} [\mathbf{y}\mathbf{y}^\dagger] = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^\dagger + \sigma_b^2 \mathbf{I}_N. \quad (\text{II.6})$$

Tant que la matrice  $\mathbf{S}$  est non singulière,  $\mathbf{R}$  possède  $N - P$  valeurs propres égales à  $\sigma_b^2$ . Les auteurs considèrent alors chaque modèle à  $P$  sources ( $P \leq N - 1$ ), paramétré par les éléments propres de la matrice de covariance théorique correspondante :

$$\mathbf{R}^{(P)} = \sum_{i=1}^P (\lambda_i - \sigma_b^2) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\dagger + \sigma_b^2 \mathbf{I}_N,$$

où  $\lambda_i, i = 1, \dots, P$  désignent les  $P$  valeurs propres les plus importantes de  $\mathbf{R}^{(P)}$  et  $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, P$  leurs vecteurs propres respectivement associés. En posant  $\mathcal{M}^{(P)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_P, \sigma_b^2, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_P)$ , la densité jointe des observations, paramétrée par  $\mathcal{M}^{(P)}$ , revêt la forme :

$$p(\mathbf{y}; \mathcal{M}^{(P)}) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\pi^N |\mathbf{R}^{(P)}|} \exp - \left\{ \mathbf{y}_k^\dagger [\mathbf{R}^{(P)}]^{-1} \mathbf{y}_k \right\} \quad (\text{II.7})$$

$$= \frac{1}{\pi^{NK} |\mathbf{R}^{(P)}|^K} \exp - \left( K \operatorname{tr} \{ [\mathbf{R}^{(P)}]^{-1} \widehat{\mathbf{R}} \} \right), \quad (\text{II.8})$$

dans laquelle  $|\cdot|$  désigne le déterminant matriciel et  $\widehat{\mathbf{R}}$  l'estimée de la matrice de covariance des observations définie par :

$$\widehat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^\dagger. \quad (\text{II.9})$$

On montre alors [ANDERSON 1963] que l'estimée  $\widehat{\mathcal{M}}^{(P)}$  du modèle au sens du maximum de la vraisemblance (II.7) s'exprime en fonction des éléments propres de la matrice  $\widehat{\mathbf{R}}$  et

que:

$$\ln p(\mathbf{y}; \hat{\mathcal{M}}^{(P)}) = -K \ln \left( \pi^N e^N \prod_{i=1}^N \hat{\lambda}_i \left( \frac{a(P)}{g(P)} \right)^{N-P} \right) \quad (\text{II.10})$$

où

$$a(P) = \frac{1}{N-P} \sum_{i=P+1}^N \hat{\lambda}_i \quad \text{et} \quad g(P) = \left( \prod_{i=P+1}^N \hat{\lambda}_i \right)^{\frac{1}{N-P}}$$

sont respectivement les moyennes arithmétique et géométrique des  $N - P$  plus faibles valeurs propres de la matrice  $\hat{\mathbf{R}}$ .

Estimer  $P$  au sens du maximum de la log-vraisemblance (II.10) conduit systématiquement au nombre maximal ( $N - 1$ ) [WAX & KAILATH 1985, CHOI et coll. 1993]. Il est alors nécessaire de compenser (II.10) par un terme qui pénalise un nombre trop élevé de sources. Ce terme peut être celui d'Akaike ou celui de Rissanen-Schwartz. Le modèle  $\hat{\mathcal{M}}^{(P)}$  possède  $q \triangleq P(2N - P)$  degrés de libertés [WAX & KAILATH 1985]. Après élimination des termes constants, les expressions (II.4) et (II.5) mènent alors aux estimateurs du nombre de sources :

$$\begin{cases} \text{AIC}(P) = -2K \ln \left( \frac{g(P)}{a(P)} \right)^{N-P} + 2P(2N - P) \\ \text{MDL}(P) = -2K \ln \left( \frac{g(P)}{a(P)} \right)^{N-P} + P(2N - P) \ln K. \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

En vertu de ce qui précède, le nombre de sources estimé est l'entier  $\hat{P} \leq N - 1$  qui minimise l'un ou l'autre critère :

$$\hat{P} = \arg \min_{P \in \{0, 1, \dots, N-1\}} \{\text{AIC}(P) \text{ ou } \text{MDL}(P)\}.$$

D'autres formes peuvent être données à ces critères, notamment en analyse spectrale par modélisations AR, MA ou ARMA pour le choix de l'ordre [MARPLE 1987]. Quelles que soient leurs formes, ils reposent sur l'approximation (II.3), justifiée pour un nombre suffisant de données.

## 4 Méthodes de goniométrie haute résolution

Les méthodes traditionnelles HR supposent la connaissance *a priori* du nombre  $P$  de sources présentes dans le milieu. En outre, elles requièrent l'hypothèse supplémentaire :  $P \leq N - 1$ . En pratique, le nombre de sources est estimé par l'un quelconque des critères de détection que nous venons de présenter. On peut distinguer essentiellement deux classes de méthodes HR :

- les techniques de « sous-espaces » qui s'appuient sur des interprétations géométriques ;

- les techniques de « maximum de vraisemblance » fondées sur une estimation statistique des paramètres.

### 4.1 Techniques de sous-espaces

Parmi les méthodes HR, les techniques de sous-espaces occupent une place importante. Elles reposent sur la partition possible de l'espace des observations en deux sous-espaces complémentaires, propriété exploitée la première fois par LIGETT [LIGETT 1972] et PISARENKO [PISARENKO 1973]. En effet, l'équation (I.14) du premier chapitre traduit l'appartenance des observations non bruitées à un espace vectoriel de dimension  $P$ . En présence de bruit, l'information relative au champ de sources demeure confinée dans cet espace, appelé par conséquent « *sous-espace source* ». Son complémentaire dans  $\mathbb{C}^N$  est appelé « *sous-espace bruit* ». Nous les noterons respectivement  $\mathbf{E}_s$  et  $\mathbf{E}_b$ .

Sous l'hypothèse d'un bruit de mesure stationnaire et spatialement blanc, indépendant des signaux reçus, la matrice de covariance des sources prend la forme donnée par (II.6) que nous rappelons ci-dessous :

$$\mathbf{R} \triangleq \mathbf{E} [\mathbf{y}\mathbf{y}^\dagger] = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^\dagger + \sigma_b^2 \mathbf{I}_N.$$

En supposant de plus que les signaux source sont décorrélés ( $\mathbf{S}$  diagonale), on obtient l'expression suivante :

$$\mathbf{R} = \sum_{p=1}^P \sigma_p^2 \mathbf{a}(\theta_p) \mathbf{a}^\dagger(\theta_p) + \sigma_b^2 \mathbf{I}_N.$$

Ainsi définie,  $\mathbf{R}$  est hermitienne définie-positive et par conséquent ses valeurs propres sont réelles positives et ses vecteurs propres orthogonaux. Il est alors possible de partitionner son espace propre en deux sous-espaces orthogonaux  $\mathbf{E}_s$  et  $\mathbf{E}_b$ . Le sous-espace bruit  $\mathbf{E}_b$  est défini comme le sous-espace propre de la matrice  $\mathbf{R}$  associé à la plus petite valeur propre  $\sigma_b^2$  de multiplicité  $N - P$  :  $\dim \mathbf{E}_b = N - P$ . Le sous-espace source  $\mathbf{E}_s$ , quant à lui, est l'espace de dimension  $P$  orthogonal à  $\mathbf{E}_b$ . D'après (I.14), les vecteurs directionnels  $\mathbf{a}(\theta_i)$ ,  $i = 1, \dots, P$ , sont des éléments du sous-espace source. Ils sont donc orthogonaux à tout vecteur de  $\mathbf{E}_b$ . Dès lors, il suffit de sélectionner un ou plusieurs vecteurs de  $\mathbf{E}_b$  et d'en mesurer le degré d'orthogonalité avec un vecteur d'analyse  $\mathbf{a}(\theta)$  pour différentes valeurs du paramètre  $\theta$ . La qualité statistique de la localisation dépend directement du choix du ou des vecteurs de  $\mathbf{E}_b$ . Ce choix *arbitraire* donne lieu à plusieurs variantes.

TUFTS et KUMARESAN [TUFTS & KUMARESAN 1983] préconisent le vecteur de  $\mathbf{E}_b$  de norme minimale et dont la première composante vaut 1, car ce choix assure une estimée de variance minimale. Cette méthode est souvent appelée « MinNorm ». Une amélioration de la stabilité statistique de la solution conduit naturellement à tester une

orthogonalité « moyenne » de l'espace engendré par tous les vecteurs directionnels avec tous les vecteurs du sous-espace bruit. Il s'agit de la méthode MUSIC introduite par SCHMIDT [SCHMIDT 1979, SCHMIDT 1986] et indépendamment par BIENVENU et KOPP [BIENVENU & KOPP 1980] sous le nom de « goniomètre ». Les angles d'arrivée estimés sont les arguments des  $P$  maxima de la fonction discriminante :

$$\hat{P}_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^\dagger(\theta) \widehat{\mathbf{V}} \widehat{\mathbf{V}}^\dagger \mathbf{a}(\theta)}, \quad (\text{II.12})$$

où la matrice unitaire  $\widehat{\mathbf{V}}$  concatène les  $N - P$  vecteurs propres de  $\widehat{\mathbf{R}}$  qui engendent le sous-espace bruit  $\mathbf{E}_b$ . Le dénominateur de  $\hat{P}_{\text{MUSIC}}(\theta)$  représente la norme au carré de la projection du vecteur d'analyse  $\mathbf{a}(\theta)$  sur  $\mathbf{E}_b$  : il mesure le degré d'orthogonalité des vecteurs directionnels et du sous-espace bruit.

Les méthodes que nous venons d'évoquer définissent les sous-espaces source et bruit à partir des éléments propres de la matrice de covariance des observations. Néanmoins, ces notions existent indépendamment de toute décomposition en éléments propres. En effet, MUNIER et DELISLE [MUNIER et coll. 1988, MUNIER & DELISLE 1991] déduisent des propriétés algébriques de la matrice  $\mathbf{A}$  des vecteurs directionnels une base non orthogonale du sous-espace bruit. Il s'agit de la méthode du « propagateur » qui consiste, à partir des vecteurs de cette base concaténés dans la matrice  $\mathbf{Q}$  de dimension  $(N \times N - P)$ , à rechercher les maxima de la fonction discriminante

$$\hat{P}_{\text{PROPAG}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^\dagger(\theta) \widehat{\mathbf{Q}} \widehat{\mathbf{Q}}^\dagger \mathbf{a}(\theta)}. \quad (\text{II.13})$$

En pratique, le calcul des vecteurs de la base est réalisé à partir de l'estimée  $\widehat{\mathbf{R}}$  par un processus des moindres carrés. Il nécessite essentiellement l'inversion d'une matrice de taille  $(P \times P)$  et s'avère moins coûteux que la décomposition en éléments propres de  $\widehat{\mathbf{R}}$  ( $N \times N$ ), d'où un gain en terme de coût calculatoire de l'ordre de  $\mathcal{O}(P/N)$ . Ajoutons que cette méthode a fait l'objet de nombreux aménagements dans [MARCOS & MUNIER 1989, MARCOS & BENIDIR 1990, MARSAL & MARCOS 1991].

Mentionnons pour finir la méthode ESPRIT (« Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques ») [ROY et coll. 1986, ROY & KAILATH 1989] qui exploite une structure particulière de l'antenne. Celle-ci doit être constituée de doublets de capteurs identiques de sorte que sa forme soit invariante par translation. C'est en particulier le cas d'une antenne de type ALU. Il est alors possible de décomposer l'antenne en deux sous-antennes translatées l'une de l'autre d'une même quantité et de reporter cette invariance en translation sur une invariance en rotation du sous-espace source. Les  $P$  angles d'arrivée sont alors déduits des valeurs propres de l'opérateur de rotation. Elle évite ainsi la difficile recherche des extrema d'une fonction discriminante qui néanmoins,

#### 4. Méthodes de goniométrie haute résolution

dans le cas d'une antenne ALU, correspond à celle des racines d'un polynôme. Le principal intérêt de la méthode ESPRIT réside dans le fait qu'elle s'affranchit totalement de la connaissance de la matrice des vecteurs directionnels. En revanche, elle exige une estimation de la matrice de covariance des données ainsi que sa décomposition en éléments propres.

Dans toutes les techniques de sous-espaces que nous venons de présenter, un estimateur des directions d'arrivée est formé, indépendamment des amplitudes des sources. Au prix d'une charge calculatoire plus élevée, on peut choisir de s'intéresser simultanément à tous les paramètres de toutes les sources, en supposant toujours que leur nombre est connu. Une telle démarche débouche sur une nouvelle classe de méthodes – dites « globales » – dont les plus séduisantes sont fondées sur la maximisation de la vraisemblance des observations.

## 4.2 Techniques de maximum de vraisemblance

Le principe du maximum de vraisemblance est largement utilisé en théorie de l'estimation statistique. Une des principales motivations de son utilisation est que dans beaucoup de cas, les estimateurs au sens du maximum de vraisemblance tendent vers une estimation non biaisée et à variance minimale. Dans ce sens, il possède les meilleures propriétés asymptotiques que l'on puisse espérer.

L'estimée au sens du maximum de vraisemblance est obtenue en évaluant la densité de probabilité pour les valeurs des observations et en recherchant la valeur des paramètres d'intérêt qui la maximisent.

Selon les hypothèses formulées sur les amplitudes des sources  $\mathbf{s}(t)$ , cette approche donne lieu à deux variantes : la méthode dite « du maximum de vraisemblance déterministe » qui considère les amplitudes comme des paramètres déterministes à estimer pour chaque enregistrement et sa version « stochastique » qui, par opposition, confère aux amplitudes une nature aléatoire qui permet de les intégrer hors du problème de la localisation. Ces méthodes sont maintenant détaillées, en particulier la version « stochastique », dans la mesure où celle-ci s'inscrit dans la logique de notre démarche qui probabilisera tous les paramètres à estimer.

### 4.2.1 Méthode du maximum de vraisemblance « déterministe »

L'ensemble  $\Theta$  des paramètres est constitué des  $P$  directions d'arrivée, de  $K$  vecteurs d'amplitudes  $\mathbf{s}(t)$ ,  $t = 1, \dots, K$ , auxquels s'ajoute la variance  $\sigma_b^2$  du bruit additif, considéré comme blanc gaussien centré complexe circulaire. Compte tenu de cette dernière hypothèse et du modèle (I.14), les observations sont gaussiennes de moyenne non nulle

$\mathbf{A}\mathbf{s}(t)$  et de covariance  $\sigma_b^2 \mathbf{I}$ .

En supposant en outre que le bruit est indépendant d'enregistrement en enregistrement, alors les données sont indépendantes et leur fonction de vraisemblance, définie comme leur d.d.p. jointe, est fournie par la statistique du bruit selon :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}; \Theta) &= \prod_{k=1}^K p_b(\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k; \Theta) \\ &= \prod_{k=1}^K \frac{1}{\pi^N |\sigma_b^2 \mathbf{I}|} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_b^2} |\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Maximiser cette vraisemblance est équivalent à minimiser l'anti-log-vraisemblance  $-\ln p(\mathbf{y}; \Theta)$ . Le résultat de cette minimisation est obtenu [BRESLER & MACOVSKI 1986, ZISKIND & WAX 1988] sous la forme séparable suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_k(\hat{\theta}) &= \mathbf{A}^\#(\hat{\theta}) \mathbf{y}_k, \forall k = 1, \dots, K \\ \hat{\sigma}_b^2(\hat{\theta}) &= \frac{1}{N - P} \operatorname{tr} \left\{ P_{\mathbf{A}(\hat{\theta})}^\perp \widehat{\mathbf{R}} \right\} \\ \hat{\theta}_{\text{MVD}} &= \arg \min_{\theta} \operatorname{tr} \left\{ P_{\mathbf{A}(\theta)}^\perp \widehat{\mathbf{R}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

où par définition,  $\mathbf{A}^\#(\hat{\theta})$  est la pseudo-inverse de la matrice des vecteurs-source construite avec les DDA estimées  $\hat{\theta}_{\text{MVD}}$  et  $P_{\mathbf{A}(\hat{\theta})}^\perp$  est l'opérateur de projection orthogonale sur le noyau de  $\mathbf{A}$ , c'est-à-dire, en omettant la dépendance en  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\# &= (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\dagger \\ P_{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} \mathbf{A}^\# \\ P_{\mathbf{A}}^\perp &= \mathbf{I} - P_{\mathbf{A}}. \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Les DDA estimées au sens du MVD sont telles que

$$\hat{\theta}_{\text{MVD}} = \arg \min_{\theta} H_{\text{MVD}}(\theta) \quad \text{où} \quad H_{\text{MVD}}(\theta) = \operatorname{tr} \left\{ P_{\mathbf{A}(\theta)}^\perp \widehat{\mathbf{R}} \right\}. \quad (\text{II.17})$$

Le problème de la minimisation de (II.17) par rapport à  $\theta$  sera discuté dans les lignes suivantes. Sa résolution mènera alors sans difficulté aux estimées des amplitudes complexes et à la variance du bruit additif selon (II.15).

#### 4.2.2 Méthode du maximum de vraisemblance « stochastique »

Les signaux issus de sources sont maintenant modélisés comme une suite de variables aléatoires complexes gaussiennes circulaires, de moyenne nulle et de covariance inconnue  $\mathbf{S}$ . Comparativement à l'approche déterministe, l'espace des paramètres  $\Theta = \{\theta, \mathbf{S}, \sigma_b^2\}$

est de dimension réduite, indépendante du nombre d'observations. Les mesures  $\mathbf{y}$ , combinaisons linéaires de variables aléatoires gaussiennes sont normalement distribuées selon  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$  avec

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{S} \mathbf{A}^\dagger(\theta) + \sigma_b^2 \mathbf{I}_N. \quad (\text{II.18})$$

Ces hypothèses sont les mêmes que celles qui permettent d'établir les critères informationnels (II.11). De fait, ils reposent sur la même fonction de vraisemblance donnée par :

$$p(\mathbf{y}; \Theta) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\pi^N |\mathbf{R}|} \exp \left\{ -\mathbf{y}_k^\dagger \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k \right\}. \quad (\text{II.19})$$

Après élimination des termes constants, l'anti-log-vraisemblance (normalisée) prend la forme

$$L_{\text{MVS}}(\Theta) = \ln |\mathbf{R}| + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k^\dagger \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k,$$

qui s'écrit encore :

$$L_{\text{MVS}}(\Theta) = \ln |\mathbf{R}| + \operatorname{tr} \{ \mathbf{R}^{-1} \widehat{\mathbf{R}} \} \quad (\text{II.20})$$

où  $\widehat{\mathbf{R}}$  est définie par (II.9). Sa minimisation, avec  $\mathbf{R}$  donnée par (II.18), conduit à la solution séparable [BÖHME 1986, JAFFER 1988] :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{S}}(\theta) &= \mathbf{A}^\#(\hat{\theta}) (\widehat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}_b^2(\hat{\theta}) \mathbf{I}_N) \mathbf{A}^{\#\dagger}(\hat{\theta}) \\ \hat{\sigma}_b^2(\hat{\theta}) &= \frac{1}{N - P} \operatorname{tr} \left\{ P_{\mathbf{A}(\hat{\theta})}^\perp \widehat{\mathbf{R}} \right\} \\ \hat{\theta}_{\text{MVS}} &= \arg \min_{\theta} |\mathbf{A}(\theta) \widehat{\mathbf{S}}(\theta) \mathbf{A}^\dagger(\theta) + \hat{\sigma}_b^2(\hat{\theta}) \mathbf{I}_N|. \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

JAFFER [JAFFER 1988] aboutit à cette expression sous l'hypothèse que  $\widehat{\mathbf{R}}$  est définie positive, condition assurée dès que  $K \geq N$ . Mentionnons toutefois que l'estimée  $\widehat{\mathbf{S}}$  est obtenue par minimisation de (II.20) par rapport à  $\mathbf{S}$  sur l'ensemble des matrices hermitiennes [STOICA et coll. 1996]. Par conséquent, son caractère semi-défini positif n'est pas garanti, sauf asymptotiquement. Toutes ces remarques font qu'en pratique un nombre suffisamment important d'enregistrements est souhaité. La méthode du maximum de vraisemblance stochastique a été spécifiquement élaborée dans ce contexte. Parmi toutes les méthodes précitées, c'est la seule qui ne s'adresse pas au problème d'analyse spectrale d'une série temporelle.

En manipulant les solutions (II.21), il est possible d'obtenir une fonction de la seule variable  $\theta$  dont l'argument du minimum est l'estimée au sens du MVS des directions d'arrivée :

$$\hat{\theta}_{\text{MVS}} = \arg \min_{\theta} H_{\text{MVS}}(\theta), \quad (\text{II.22})$$

avec

$$H_{\text{MVS}}(\theta) = (N - P) \ln \frac{H_{\text{MVD}}(\theta)}{N - P} + \ln |\mathbf{A}^\dagger(\hat{\theta}) \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{A}(\hat{\theta})| - \ln |\mathbf{A}^\dagger(\hat{\theta}) \mathbf{A}(\hat{\theta})| \quad (\text{II.23})$$

et où  $H_{MVP}(\theta)$  est donnée par (II.17). La démonstration de ce résultat est donnée dans l'annexe C. Cette dernière relation montre que le critère MVS s'exprime en fonction du critère MVD ; sa minimisation est plus complexe.

#### 4.2.3 Problèmes d'optimisation

Bien que dans ces deux méthodes il soit possible de donner une solution sous forme séparable, les critères de vraisemblance (II.17) et (II.23) sont des fonctions non linéaires des directions d'arrivée. De plus, ils présentent de nombreux minima locaux, d'où la difficulté de garantir une convergence vers le minimum global. Minimiser ces critères exige de mettre en œuvre des algorithmes d'optimisation multidimensionnelle, la plupart du temps très coûteux. Étant donnée la complexité du problème, les techniques classiques de descente (gradient, Newton-Raphson, etc.), fortement dépendantes de l'initialisation, ne suffisent pas. Certains auteurs ont proposé des algorithmes stochastiques comme le recuit simulé [SHARMAN 1988] ou les algorithmes génétiques [SHARMAN & MCCLURKIN 1989]. Leur temps de convergence très long rend leur utilisation prohibitive. Il existe néanmoins dans la littérature certaines techniques permettant de réaliser cette tâche avec un souci de complexité minimale. Par exemple, pour le MVD on peut citer l'algorithme IQML de Bresler [BRESLER & MACOVSKI 1986] ainsi que la technique des projections alternées [ZISKIND & WAX 1988].

Eufin, quelle que soit la variante, l'implémentation des algorithmes correspondants est délicate. Ceci explique que ces méthodes restent peu utilisées, mais suscitent de nombreuses recherches.

## 5 Ambiguïtés d'antenne et identifiabilité

Nous proposons maintenant quelques commentaires à propos du nombre maximal de sources localisables par un réseau de capteurs donné.

Le nombre de sources présentes dans le secteur angulaire scruté peut, *théoriquement*, prendre une valeur quelconque. En revanche, il existe une limite au nombre de sources localisables, qui dépend de la géométrie de l'antenne, de la paramétrisation du modèle d'observation et des méthodes utilisées.

La mise en œuvre opérationnelle des méthodes de goniométrie HR fondées sur la structure de la matrice de covariance des observations et celle des critères de détection usuels nécessitent de travailler avec des géométries d'antenne n'introduisant pas d'*ambiguïtés* sur la position des sources.

Par définition, ces ambiguïtés se produisent dès qu'un vecteur de la variété d'antenne

## 5. Ambiguïtés d'antenne et identifiabilité

peut s'écrire comme combinaison linéaire d'autres vecteurs de cette variété [FLIELLER 1995]. Le nombre de sources localisables simultanément par une antenne linéaire est, pour cette raison, lié au nombre de capteurs. En effet pour une telle antenne, le rang de la matrice  $\mathbf{A}(\theta)$  des vecteurs sources ne peut excéder le nombre de capteurs, d'où la condition requise :  $P \leq N$ . C'est une condition nécessaire de non-ambiguïté. Elle n'est pas suffisante. Néanmoins il est montré dans [FLIELLER 1995] qu'une antenne linéaire qui satisfait la condition de Shannon (I.18) est effectivement non ambiguë sur tout l'horizon observable  $[-\pi/2; \pi/2]$ . Comme nous l'avons vu, la localisation et la détection par les méthodes classiques qui reposent sur la structure de la matrice de covariance des observations sont subordonnées à l'existence d'un « sous-espace bruit ». La dimension minimale de ce dernier étant égale à l'unité, ces méthodes imposent donc l'hypothèse plus restrictive  $P \leq N - 1$  pour éviter toute ambiguïté.

Abstraction faite des problèmes d'identifiabilité sous-jacents, l'utilisation des statistiques d'ordres supérieurs à deux [CARDOSO 1990] permet théoriquement de localiser simultanément, à partir d'une antenne ALU, des sources en nombre bien plus élevé que celui des capteurs. En outre, une paramétrisation plus complète (gisement, élévation, polarisation) du vecteur directionnel offre aussi la possibilité de franchir les limites classiques de localisation sans ambiguïtés [HOCHWALD & NEHORAI 1996].

Pour l'antenne ALU que nous considérons dans ce document, l'hypothèse  $P \leq N - 1$  assure seulement qu'à l'intérieur de la classe  $\mathcal{C}_{P \leq N-1}$  des solutions comportant moins de sources que de capteurs il n'y a pas, en effet, d'ambiguïtés sur la position angulaire des sources autre que celle que nous avons citée dans le chapitre précédent, à savoir l'ambiguïté liée à des directions d'arrivée symétriques par rapport à l'antenne. Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue qu'à toute configuration comprenant plus de sources que de capteurs – qui peut être la configuration réelle – correspond au moins une représentation équivalente dans la classe  $\mathcal{C}_{P \leq N-1}$ . Inversement, on montre aisément qu'à toute configuration de  $\mathcal{C}_{P \leq N-1}$  correspond une infinité de configurations à plus de sources que de capteurs. Par conséquent, l'hypothèse  $P \leq N - 1$  ne lève aucunement les problèmes d'identifiabilité qui sont susceptibles d'apparaître dans toute situation réelle.

Quoiqu'il en soit, au-delà des problèmes d'identifiabilité potentiels, l'hypothèse classique  $P \leq N - 1$  est surtout avancée pour des raisons d'ordre méthodologique [CARDOSO 1990]. Elle est en effet indispensable aux critères de détection et aux méthodes de goniométrie qui reposent sur une décomposition en éléments propres d'une estimée de la matrice de covariance des observations. Ajoutons que cette hypothèse peut s'avérer limitative sur un plan algorithmique puisqu'elle interdit d'emblée tout passage par une configuration à plus de sources que de capteurs.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ces problèmes d'identifiabilité et d'ambiguïtés d'antenne. Il convient cependant d'observer la plus extrême prudence sur ces

problèmes qui demandent encore quelque approfondissement et dont l'étude n'en est qu'à ses prémisses.

## 6 Limitations et alternatives à la méthodologie classique

Cette synthèse des principes de la méthodologie traditionnelle met en exergue un certain nombre de limitations que partagent les méthodes de détection et de localisation.

### 6.1 Limitations

La première d'entre elles vient d'être évoquée : le nombre de sources identifiables est intrinsèquement limité par la taille de l'antenne. La seconde émane du fait que les principes qui les sous-tendent se fondent exclusivement sur des considérations *asymptotiques*. En effet, les propriétés théoriques à nombre infini d'enregistrements constituent l'élément déterminant qui motive le choix des estimateurs. On est alors en droit d'attendre de ces techniques de « bonnes » propriétés lorsque le nombre d'enregistrements tend vers l'infini. C'est le cas pour la majorité d'entre elles qui, asymptotiquement, ne présentent pas de biais et atteignent la borne de référence de Cramer-Rao. Soulignons toutefois que le critère d'Akaike présente un biais asymptotique en surestimant systématiquement le nombre de sources [ZHANG et coll. 1989, WAX & KAILATH 1985].

Qu'il s'agisse des techniques afférentes à la détection ou à la localisation de sources en nombre fixe, toutes substituent à la « vraie » matrice de covariance des observations  $\mathbf{R}$  l'estimée  $\widehat{\mathbf{R}}$  donnée par (II.9). Elles sont qualifiées d'asymptotiques au sens où cette estimée satisfait

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^\dagger = \mathbb{E} [\mathbf{y} \mathbf{y}^\dagger] = \mathbf{R} \quad (\text{II.24})$$

D'après (II.24), la qualité de l'estimation de cette matrice, qui joue donc un rôle fondamental dans ces techniques, dépend fortement du nombre d'enregistrements.

Au contraire des techniques de formation de voies, les méthodes HR reposent fortement sur les propriétés algébriques liées au modèle d'observation. En particulier, hormis les techniques du maximum de vraisemblance, elles supposent que les amplitudes des sources sont mutuellement décorrélées. Cependant, les ondes provenant de certaines sources sont susceptibles d'emprunter des trajets de propagation différents, à la suite de réflexions multiples par exemple. Une telle situation induit alors une inévitable corrélation des amplitudes des sources responsables de ces multi-trajets. Il paraît alors évident qu'un nombre d'enregistrements important favorise la sensibilité des méthodes à cette

corrélation qui introduit une dégradation du conditionnement de la matrice  $\widehat{\mathbf{R}}$ . La technique du « lissage spatial » [OUAMRI & CLERGEOT 1987], qui consiste à moyenner plusieurs matrices de covariance sur différents sous-réseaux de capteurs, en améliore le conditionnement. Appliquée aux méthodes de goniométrie de type « sous-espaces », elle permet généralement de restituer l'ensemble des directions d'arrivée [SHAN et coll. 1985]. C'est une alternative intéressante. En revanche, elle ne permet pas d'étendre les critères AIC et MDL aux cas de sources partiellement corrélées [TAS & LACOUME 1989]. De surcroît, elle a pour effet de diminuer l'ouverture du réseau, donc sa précision et le nombre maximal de sources identifiables simultanément. Ces limitations ont suscité l'étude d'autres critères, comme par exemple, ceux qui reposent sur une modélisation du profil de décroissance des valeurs propres de la matrice  $\widehat{\mathbf{R}}$  [OUAMRI 1986, MICHEL et coll. 1991].

Néanmoins, aucun de tous ces critères ne donne encore entière satisfaction. Tous s'avèrent particulièrement inefficaces lorsque le nombre de données disponibles ou le rapport signal-à-bruit sont faibles. De plus, leur comportement est désastreux en présence de sources corrélées. Aussi le problème de l'estimation du nombre de sources demeure un problème ouvert, au point qu'il est souvent préférable de le surestimer et de procéder *a posteriori* par seuillage intensimétrique [MUNIER & DELISLE 1991].

Quant aux méthodes de goniométrie HR, l'inclusion des amplitudes des sources dans la procédure d'estimation, réalisée par les techniques de maximum de vraisemblance, a permis d'améliorer de façon substantielle les performances de localisation, bien qu'au prix d'une charge calculatoire accrue. Tous les méthodes HR souffrent néanmoins d'un manque de robustesse vis-à-vis d'un faible nombre de données ou d'un niveau de bruit important, situations fréquemment rencontrées en pratique.

### 6.2 Défauts méthodologiques et alternatives

En dehors du caractère asymptotique de ces méthodes, on peut penser que l'ensemble des faiblesses que nous venons de mentionner émanent, en amont, de la démarche méthodologique adoptée. En particulier, estimer le nombre de sources présentes dans le milieu exploré avant même de les localiser ne paraît pas être un choix naturel. Bien que de natures fondamentalement différentes, la détection et la localisation constituent des facettes du problème intimement liées. Les traiter conjointement est donc susceptible de contribuer à l'amélioration des performances globales. Comparativement à la méthodologie orthodoxe, il s'agit donc de franchir le pas supplémentaire qui consiste à intégrer la variable discrète  $P$  dans l'ensemble des paramètres à estimer, dans l'esprit d'une *stratégie d'estimation simultanée*. La structure composite du problème est ainsi préservée : c'est à ce niveau que se situe la première contribution de notre travail. Elle vise à prendre en charge l'estimation de la **totalité** des paramètres au sein d'une **unique** procédure. Nous

verrons qu'une telle démarche permet d'atteindre des performances de détection et d'estimation particulièrement remarquables dans les situations où les approches classiques sont traditionnellement mises en défaut.

## CHAPITRE III

# LA MÉTHODOLOGIE BAYÉSIENNE DE DÉTECTION-LOCALISATION

À plusieurs niveaux, des similitudes peuvent être établies entre les problèmes de géoniométrie en traitement d'antenne, de recherche de raies pures en analyse spectrale et celui de la déconvolution d'un train d'impulsions. En particulier, ils se formulent tous trois comme des problèmes inverses. Ceux-ci seront introduits, de même que les outils de régularisation qui permettent de lever leur caractère souvent mal-posé. Les notions de régularisation seront abordées dans le cadre de l'estimation statistique bayésienne et les problèmes de la location de sources et de raies spectrales seront reformulés dans ce contexte.

Dans ce chapitre « pivot », nous introduirons un certain nombre de concepts, lesquels débouchent sur une méthodologie différente de celle qui d'être évoquée : détection et localisation seront traitées simultanément. Enfin, nous présenterons une application originale de ces principes dans le cadre de l'analyse spectrale.

## 1 Analogie avec la déconvolution impulsionale

### 1.1 Similitudes des problèmes

Comme nous l'avons mentionné au début du chapitre I, la sismique-réflexion en géophysique, le contrôle non-destructif ainsi que l'échographie ultrasonore en imagerie médicale constituent des applications de traitement d'antenne. Tous ces procédés consistent à émettre une onde se propageant dans le matériau étudié et à recueillir à sa surface tout ou partie des ondes réfléchies par les inhomogénéités. Sous des hypothèses assez simplificatrices, il est possible de dégager un modèle physique commun à chacune de ces applications. Habituellement, on associe un modèle *convolutionnel*: le signal  $y$  des échos enregistrés (ou trace) est considéré comme la convolution de l'*ondelette* incidente avec la séquence de réflectivité  $r$  (signal décrivant les réflexions successives de l'onde) corrompue

par un bruit additif  $b$  traduisant aussi bien l'imperfection de la mesure que les erreurs de modélisation. L'équation d'entrée-sortie du modèle s'écrit :

$$y(z) = \int h(z, z') r(z') dz' + b(z) \quad (\text{III.1})$$

où  $z$  désigne la profondeur sur la verticale au point de mesure. Dans le cas d'un milieu composé de zones à peu près homogènes, la réflectivité s'annule partout à l'exception des interfaces entre zones. Elle apparaît donc comme une suite d'impulsions, en nombre limité (mais inconnu) et d'amplitudes variables :  $r(z) = \sum_i a_i \delta(z - z_i)$ . Pour séparer ces impulsions, les localiser et en déterminer l'amplitude, il est nécessaire d'inverser le processus de dégradation modélisé par (III.1). La restauration de la séquence de réflectivité  $r$  à partir des observations  $y$  est un problème de **déconvolution impulsionale**, en référence à la structure de la solution recherchée.

Ainsi formulée, la déconvolution impulsionale présente de fortes similitudes avec les problèmes de localisation de sources ou de raies spectrales. En effet, un champ discret de sources ponctuelles présente typiquement une structure impulsionale, de même qu'un spectre de raies pures. Il est en outre possible d'attribuer des rôles semblables :

- aux impulsions, aux sources ponctuelles et aux raies spectrales ;
- aux amplitudes de toutes ces quantités ;
- à l'ondelette, aux vecteurs-source et aux vecteurs-fréquence.

Les deux premiers paraissent évidents. Le troisième s'explique ainsi : l'ondelette réfléchie par un écho situé à une profondeur  $z$  donnée, considérée comme la réponse du système d'observation à une impulsion, joue un rôle comparable (i) au vecteur-source pointant dans une direction  $\theta$  donnée, qui s'identifie à la réponse de l'antenne à l'onde issue de cette direction et (ii) par l'analogie mentionnée au § I 2.4, aux vecteurs-fréquence.

Ces trois problèmes partagent un objectif commun : localiser un nombre inconnu d'impulsions en milieu bruité et en déterminer les amplitudes.

## 1.2 Problèmes inverses et régularisation

Dans chacun de ces problèmes, les grandeurs d'intérêt ne sont pas directement accessibles. Les mesures, recueillies par l'intermédiaire d'un dispositif expérimental, fournissent une « image » de ces grandeurs, distordue par la réponse du système d'observation. Par exemple en goniométrie, la réponse de l'antenne à une onde plane provenant d'une direction donnée ne reflète que partiellement la présence d'une source en raison du nombre limité de capteurs. Plus ce nombre est élevé, meilleure est la résolution naturelle de l'antenne. Théoriquement, une infinité de capteurs permet de résoudre parfaitement toutes

### 1. Analogie avec la déconvolution impulsionale

les sources présentes dans l'environnement, si proches soient-elles. D'autre part, aux limitations intrinsèques du dispositif expérimental s'ajoute la présence d'un inévitable bruit participant à cette distorsion des mesures. Celles-ci souffrent alors d'un déficit informationnel. Le problème qui consiste à restaurer une image physiquement acceptable des grandeurs d'intérêt à partir des mesures effectuées, dans le but d'améliorer la résolution de l'appareil, est un **problème inverse**.

La résolution d'un problème inverse pose généralement de sérieuses difficultés. C'est le cas du problème de la déconvolution impulsionale, même dans la situation favorable d'une connaissance parfaite de l'ondelette. Un tel problème appartient en effet à la classe des problèmes inverses dit *mal-posés* [DEMOMENT 1985, DEMOMENT 1989] : au sens de HADAMARD, l'*existence*, l'*unicité* et la *stabilité* de la solution ne sont pas garanties simultanément. Numériquement, le caractère mal-posé du problème inverse se traduit par un mauvais conditionnement de l'opérateur à inverser, qui nuit à la stabilité de la solution. Le caractère mal-posé de la déconvolution résulte du manque d'information des données à traiter. Il est à l'origine de fortes incertitudes sur les paramètres cherchés lorsqu'ils sont estimés sur la seule base des observations. En effet, les méthodes qui considèrent la fidélité aux observations comme unique critère de qualité fournissent généralement des résultats inacceptables. C'est en particulier le cas de la solution classique des moindres carrés, bien que parée de toutes les qualités de la statistique orthodoxe (biais nul, variance minimale, borne de Cramer-Rao atteinte) [DEMOMENT 1985]. Sous l'hypothèse d'un bruit additif blanc gaussien, cette solution est aussi celle qui maximise la vraisemblance des observations.

La **régularisation** [TIKHONOV & ARSENIN 1977] constitue maintenant une manière classique d'aborder ce problème. L'idée directrice est de renoncer à l'espoir de retrouver la solution exacte en partant de données « imparfaites ». Une classe de solutions admissibles est alors définie. Toute solution sélectionnée dans cette classe est acceptable au sens où elle est compatible avec une information supplémentaire décrivant les propriétés désirables d'une « bonne » solution. Dans notre cas, c'est le caractère impulsional de la solution qui doit être pris en compte. La régularisation du problème peut être menée dans les cadres de la statistique orthodoxe par une paramétrisation de la solution, de l'inference bayésienne par introduction de modèles probabilistes *a priori* ou de la régularisation déterministe en imposant des contraintes sur la solution. De toute façon, il s'agit d'exploiter une connaissance structurelle de la solution recherchée afin de compléter l'information contenue dans les observations.

En goniométrie comme en analyse spectrale, on peut citer quelques situations qui nécessitent de faire appel aux concepts de la régularisation :

1. seul un faible nombre de données est disponible ;

2. les conditions de rapport signal-à-bruit sont difficiles ;
3. on cherche à localiser un nombre de sources supérieur à celui des capteurs : dans ce cas, le nombre d'inconnues est supérieur à celui des observations, le système des équations d'observation est donc surdéterminé, et l'on aimerait pouvoir définir une solution ;
4. les sources ou les raies spectrales sont extrêmement proches : cette situation est illustrée sur la figure III.1.

Evidemment, une combinaison partielle ou totale de ces scénarios renforce la nécessité d'une régularisation. Notons que ces situations sont généralement celles qui échappent aux techniques traditionnelles, par manque de robustesse ou tout simplement parce qu'elles sortent de leurs objectifs (comme le point 3.).

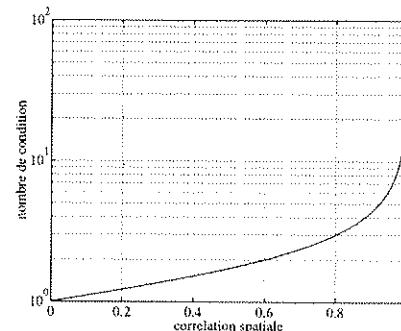


FIG. III.1 - *Evolution du nombre de condition de l'opérateur  $\mathbf{A}(\theta)$  constitué de deux vecteurs-source en fonction de leur produit scalaire normalisé (corrélation spatiale). Le nombre de condition de l'opérateur est défini comme le rapport de ses valeurs singulières. Le meilleur conditionnement numérique est obtenu lorsque les vecteurs sont orthogonaux, et sa dégradation est fonction croissante de leur degré de colinéarité.*

Les premières analogies qui viennent d'être établies sont de natures structurelle et interprétative. Elles ont suscité notre intérêt pour les principes méthodologiques qui sous-tendent la résolution du problème de la déconvolution impulsionnelle. La plupart des techniques modernes de déconvolution d'impulsions sont envisagées dans le contexte de la régularisation *bayésienne*. Elles fournissent des résultats d'une qualité très satisfaisante. En particulier, elles se prêtent facilement à la mise en œuvre d'un véritable procédé de détection-localisation simultané. Cette caractéristique nous a naturellement incité à privilégier l'approche bayésienne des problèmes inverses rencontrés en goniométrie et en analyse spectrale de raies pures. Ses principes sont maintenant décrits.

## 2. Approche bayésienne des problèmes inverses

### 2.1 Principes

Pour simplifier l'exposé, nous considérons la forme générale d'un problème inverse linéaire, obtenue lorsque la distorsion est linéaire ou approchée comme telle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b} \quad (\text{III.2})$$

où  $\mathbf{x}$  désigne le vecteur des paramètres recherchés,  $\mathbf{A}$  la matrice de transfert du dispositif d'observation,  $\mathbf{y}$  les mesures recueillies et  $\mathbf{b}$  un bruit additionnel qui mèle les erreurs de modélisation et de mesure. De plus, l'opérateur  $\mathbf{A}$  est supposé connu. Il s'agit alors d'estimer  $\mathbf{x}$  ayant observé  $\mathbf{y}$  et connaissant  $\mathbf{A}$ . L'inversion de la relation (III.2) demeure un problème difficile, même dans le cas favorable de la connaissance de l'opérateur  $\mathbf{A}$ .

La régularisation bayésienne est réalisée de la manière suivante. Les propriétés structurelles de la solution sont généralement introduites sous la forme d'une distribution de probabilité paramétrée  $p(\mathbf{x}|\mathcal{H})$ . En d'autres termes, la solution est considérée comme la réalisation particulière d'une famille de processus aléatoires. Les observations, quant à elles, sont décrites par leur distribution jointe  $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathcal{H})$ . Celle-ci est complètement définie par le modèle (III.2) et la distribution de probabilité du bruit de mesure. La règle de Bayes permet alors de fusionner l'information *a priori* introduite sur la solution et celle qui est contenue dans les données observées selon :

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathcal{H}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathcal{H}) p(\mathbf{x}|\mathcal{H})}{p(\mathbf{y}|\mathcal{H})}. \quad (\text{III.3})$$

La distribution *a posteriori* ainsi construite résume, à elle seule, toute l'information disponible sur la solution. L'ensemble  $\mathcal{H}$  des « hyperparamètres », selon la terminologie du domaine, est constitué de toutes les paramètres décrivant la statistique du bruit et la distribution *a priori*. Sauf mention contraire, nous le supposerons connu. Son estimation ne sera discutée qu'au chapitre VI. Le dénominateur de (III.3), quant à lui, ne joue pas d'autre rôle que celui d'un coefficient de normalisation :  $p(\mathbf{y}|\mathcal{H}) = \int p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathcal{H}) p(\mathbf{x}|\mathcal{H}) d\mathbf{x}$ .

Le problème de la déconvolution impulsionnelle est généralement mis sous la forme matricielle linéaire (III.2). Sa structure est très voisine de celle des systèmes semi-linéaires (I.14) et (I.16). Nous reviendrons sur ce point ultérieurement. Dans le chapitre V, nous examinons les approximations qui peuvent conduire à l'écriture de ces modèles sous la forme linéaire (III.2).

### 2.2 Estimateurs bayésiens

La règle d'inférence statistique choisie nous place naturellement dans un cadre d'estimation fondé sur la distribution *a posteriori* (III.3). Plusieurs choix sont possibles

parmi les estimateurs ponctuels, comme le maximum, la moyenne ou encore la médiane de cette densité, chacun de ces estimateurs correspondant à un critère de décision et une fonction de coût différents. Un choix très usuel cependant est celui de l'estimateur du maximum *a posteriori*:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathcal{H}),$$

en particulier en déconvolution impulsionale. Après élimination des termes indépendants de  $\mathbf{x}$ , cet estimateur s'écrit aussi sous la forme logarithmique :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{-\ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathcal{H}) - \ln p(\mathbf{x}|\mathcal{H})\} \quad (\text{III.4})$$

qui fait apparaître la minimisation d'un critère mixte. Le premier terme n'est autre que l'anti-log-vraisemblance des observations. Il représente l'adéquation aux données. Le second, quant à lui, traduit l'*a priori* introduit sur la solution. Notons que le choix d'une densité  $p(\mathbf{x}|\mathcal{H})$  uniforme conduit au critère de vraisemblance classique.

En conclusion, l'approche bayésienne offre un cheminement logique : on part des propriétés désirées de la solution et on aboutit à un estimateur, au contraire des approches classiques évoquées au chapitre II qui partent d'un estimateur *ad hoc* et examinent ensuite ses propriétés. De plus, elle permet de retrouver les approches fondées sur le principe du maximum de vraisemblance comme des cas limites, sans problème de cohérence.

### 3 Modèles *a priori* composites

La régularisation bayésienne repose sur une description statistique des propriétés structurelles de la solution  $\mathbf{x}$ . Dans les problèmes de goniométrie ou de recherche de raies pures, comme dans celui de la déconvolution de traces sismiques ou échographiques, la solution recherchée présente une *structure impulsionale*. D'après ce qui précède, la prise en compte de cette information *a priori*, de nature qualitative, ne peut qu'être bénéfique. Plusieurs modèles probabilistes sont envisageables, dès lors qu'ils reflètent cette propriété. Néanmoins, une approche très satisfaisante, qui permet de traduire parfaitement le caractère impulsional, est de considérer que la solution est constituée d'événements isolés (sources, raies, réflecteurs), répartis aléatoirement dans un signal résiduel nul. Ce niveau de description est atteint à l'aide d'un *modèle composite* comprenant :

- un processus ponctuel  $\mathbf{q}$  qui commande l'apparition des événements ;
- un processus continu  $\mathbf{s}$  qui contrôle leurs amplitudes respectives.

La solution est alors recherchée sous la forme  $\mathbf{x} = (\mathbf{s}, \mathbf{q})$ . Le processus ponctuel  $\mathbf{q}$ , non observé, s'interprète comme une succession de *variables cachées* décrivant la position des

impulsions. Les amplitudes  $\mathbf{s}$  sont, quant à elles, partiellement observées en raison des caractéristiques limitées du dispositif de mesure. Il convient de remarquer à ce stade que les modèles d'observation (I.14) et (I.16) font apparaître *explicitement* la structure composite de la solution : en effet, les variables de positions, décrites par  $\theta$  ou  $\nu$  selon le modèle, sont découpées des amplitudes.

Deux types de modèles composites vont maintenant être considérés : le modèle Bernoulli-Gaussien et le modèle Poisson-Gaussien, utilisés jusqu'à présent dans le seul contexte de la déconvolution impulsionale. Néanmoins le premier occupe dans la littérature une place beaucoup plus importante que le second, pour des raisons qui seront explicitées.

#### 3.1 Le modèle Bernoulli-Gaussien

Le modèle Bernoulli-Gaussien (BG) a été initialement introduit par KORMYLO et MENDEL [MENDEL & KORMYLO 1978, KORMYLO 1979, KORMYLO & MENDEL 1982] à la fin des années 70, avec pour cadre d'application la sismique-réflexion. Il s'agit d'un processus composite aléatoire blanc qui permet de modéliser une séquence d'impulsions disposées sur un ensemble *discret*. Les impulsions sont distribuées sur une grille de  $N_q$  points indépendamment les unes des autres et avec la même probabilité d'apparition. L'amplitude de chaque impulsion suit une distribution gaussienne. Plus précisément, un processus BG  $\mathbf{x} \triangleq (\mathbf{s}, \mathbf{q})$  est défini comme une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes  $q_k$  et  $s_k$  ( $1 \leq k \leq N_q$ ) et identiquement distribuées selon :

- $q_k$  est une variable binaire de Bernoulli :  $\begin{cases} \Pr(q_k = 1) = \lambda \\ \Pr(q_k = 0) = 1 - \lambda \end{cases}$  . (III.5)
- $(s_k|q_k = q)$  est une variable gaussienne centrée de variance  $q\sigma^2$ .

Un modèle BG est complètement défini par deux hyperparamètres :

- $\lambda \in [0, 1]$  : probabilité d'apparition d'une impulsion par pas de discrétilisation ;
- $\sigma^2$  : variance de l'amplitude des impulsions.

Le nombre d'impulsions coïncide avec la distance de Hamming du vecteur  $\mathbf{q}$ , c'est-à-dire le nombre de ses composantes non nulles.

#### 3.2 Le modèle Poisson-Gaussien

Le modèle Poisson-Gaussien (PG) a été introduit en déconvolution d'impulsions par KWAKERNAAK [KWAKERNAAK 1980]. A la différence du modèle BG, il permet de mo-

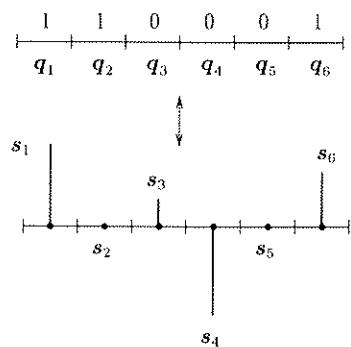


FIG. III.2 - Exemple illustratif d'un processus Bernoulli-Gaussien

déliser une répartition aléatoire uniforme de points sur un domaine *continu*. Chacune de ses composantes  $q$  et  $s$  se définit ainsi :

- les impulsions réparties sur un intervalle  $\Delta = [a, b]$  indépendamment les unes des autres sont modélisées comme la réalisation d'un processus de Poisson homogène  $q$ , de densité  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  uniforme sur  $\Delta$ . Par conséquent, le nombre total d'impulsions  $N(\Delta)$  sur l'intervalle  $\Delta$  suit la loi de Poisson:

$$\Pr(N(\Delta) = p) = \frac{\lambda^p (b-a)^p}{p!} e^{-\lambda(b-a)}. \quad (\text{III.6})$$

La densité  $\lambda$  du processus gère la probabilité d'apparition des impulsions. Enfin, notons que la quantité  $q$  ne représente plus un vecteur mais un ensemble non ordonné de points dont le cardinal s'identifie au nombre d'impulsions.

- la variable conditionnée  $(s|q)$ , qui représente les amplitudes des impulsions localisées par  $q$ , est modélisée par un processus gaussien, centré et de variance  $\sigma^2$ .

Le modèle PG est, lui aussi, entièrement défini par les deux hyperparamètres  $\lambda$  et  $\sigma^2$ .

Les définitions ci-dessus mettent en évidence la structure hiérarchique de tels modèles : les variables aléatoires qui contrôlent l'amplitude des impulsions sont définies conditionnellement à celles qui commandent la position. Quelques liens peuvent être établis entre les deux modèles qui ne diffèrent que par leur première composante. Le processus de Poisson peut être considéré comme un cas limite du processus de Bernoulli en faisant tendre le pas de discréétisation vers zéro, à densité d'impulsions constante [BLANC-LAPIERRE & PICINBONO 1981]. Le modèle BG s'interprète donc comme une

#### 4. La démarche méthodologique

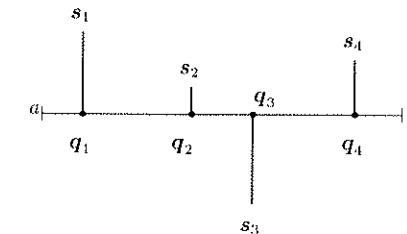


FIG. III.3 - Exemple illustratif d'un processus Poisson-Gaussian

« version discrétisée » du modèle PG dont on a quantifié les positions des impulsions. Cette caractéristique confère au modèle BG une plus grande simplicité d'emploi. Pour cette raison, il occupe une place privilégiée dans le domaine de la déconvolution impulsionnelle.

## 4 La démarche méthodologique

Qu'il s'agisse de l'un ou l'autre des deux modèles, la restauration de la solution  $x$  sous la forme composite  $(s, q)$  nécessite les deux opérations :

1. l'identification des variables de position contenues dans  $q$  ; (III.7)
2. la détermination des variables d'amplitude  $s$ .

**Considérations terminologiques** Selon le vocabulaire de la déconvolution impulsionnelle, la première de ces opérations est appelée « détection », la seconde « estimation ». Dans les domaines respectifs de la goniométrie et de l'estimation spectrale, le premier de ces termes désigne exclusivement la détermination du nombre de sources (cf. § II.2). Cette nuance terminologique n'est en fait que le reflet de conceptions méthodologiques fondamentalement opposées. Dans (III.7), le problème de l'estimation du nombre d'impulsions n'est pas formulé explicitement en tant que tel : il est intégré dans l'opération 1. Il est manifeste, en effet, que l'identification du processus ponctuel  $q$  permettra *simultanément* de localiser les impulsions et, *par conséquent*, d'en déterminer le nombre, au contraire de la méthodologie classique qui procède à rebours. Par souci de clarté, nous conserverons le vocabulaire défini au chapitre II. Ainsi, le terme « détection-localisation » concerne les deux premières opérations de l'approche classique, fusionnées dans la procédure 1. de (III.7).

**Considérations stratégiques** D'après le paragraphe 2.2 du présent chapitre, la stricte application de l'approche MAP conduit à effectuer les deux opérations ci-dessus conjointement, par maximisation de la vraisemblance *a posteriori* jointe  $p(\mathbf{s}, \mathbf{q}|\mathbf{y}, \mathcal{H})$ . Néanmoins, dans le cadre des estimateurs au sens du maximum de vraisemblance, il est également possible de construire des vraisemblances à partir des lois marginales de  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{q}$  ou encore d'estimer l'une des grandeurs par maximisation de sa vraisemblance marginale puis l'autre par maximisation de la loi conjointe en utilisant le résultat de l'étape précédente. Aucune règle générale ne favorise *a priori* l'une de ces stratégies et le choix demeure subordonné aux propriétés des estimateurs correspondants, à la cohérence des résultats obtenus et aux difficultés de mise en œuvre.

Aussi, certains travaux menés dans le contexte de la déconvolution BG [KORMYLO & MENDEL 1982, GOUSSARD et coll. 1990, CHAMPAGNAT et coll. 1994] préconisent une stratégie d'estimation séquentielle. Cette approche consiste à intégrer les amplitudes hors de l'étape de localisation des impulsions, de façon tout à fait similaire à la méthode du maximum de vraisemblance stochastique comparée à sa variante déterministe (voir § II 4.2). Une telle démarche se fonde donc sur les deux étapes séquentielles de localisation et d'estimation des amplitudes, dont les principes sont maintenant présentés.

#### 4.1 Localisation d'un nombre inconnu d'impulsions

D'après ce qui précède, les amplitudes sont traitées comme des paramètres de nuisance. La localisation des impulsions repose alors sur la vraisemblance *a posteriori marginale* de  $\mathbf{q}$  ayant observé  $\mathbf{y}$ , c'est-à-dire

$$p(\mathbf{q}|\mathbf{y}, \mathcal{H}) = \int p(\mathbf{q}, \mathbf{s}|\mathbf{y}, \mathcal{H}) d\mathbf{s}. \quad (\text{III.8})$$

L'estimateur retenu est l'argument de son maximum, appelé solution du maximum *a posteriori* marginal (MMAP). L'application successive de la règle de Bayes permet d'écrire :

$$\hat{\mathbf{q}} = \arg \max p(\mathbf{y}|\mathbf{q}, \mathcal{H}) p(\mathbf{q}, \mathcal{H}).$$

Les expressions de ces deux vraisemblances dépendent du modèle *a priori* utilisé. Elles seront envisagées dans les deux chapitres suivants. Dans le cas du modèle BG, l'estimée  $\hat{\mathbf{q}}$  se situe sur une grille. Dans le cas PG, elle appartient à un espace continu. De toute façon, le nombre d'impulsions apparaît comme un *sous-produit* de cette procédure :  $\hat{P} \triangleq \dim \hat{\mathbf{q}}$ .

#### 4.2 Estimation des amplitudes des impulsions

L'estimation des amplitudes succède à l'étape de localisation. Cette démarche est commune à la méthodologie classique HR. Les amplitudes sont déterminées en maxi-

#### 4. La démarche méthodologique

sant par rapport à  $\mathbf{s}$  la vraisemblance *a posteriori* de  $\mathbf{s}$  connaissant  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{q}$  :

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{y}, \hat{\mathbf{q}}, \mathcal{H}) \propto p(\mathbf{y}|\mathbf{s}, \mathcal{H}) p(\mathbf{s}|\hat{\mathbf{q}}, \mathcal{H}), \quad (\text{III.9})$$

relation obtenue en appliquant la règle de Bayes et en remarquant d'autre part que  $p(\mathbf{y}|\mathbf{s}, \hat{\mathbf{q}}, \mathcal{H})$  et  $p(\mathbf{y}|\mathbf{s}, \mathcal{H})$  sont identiques, identité qui traduit que  $\mathbf{q}$  n'est pas observé. D'après le modèle (III.2), la première densité à droite de (III.9) correspond à celle du bruit d'observation  $\mathbf{b}$  que nous supposons blanc gaussien, centré et de variance  $\sigma_b^2$ . En raison de la normalité de la distribution  $p(\mathbf{s}|\hat{\mathbf{q}}, \mathcal{H})$  et de la linéarité du modèle, le problème ci-dessus se réduit alors à l'estimation d'une grandeur par MAP sous hypothèses linéaires et gaussiennes. Il admet donc une solution explicite, classiquement donnée par :

$$\hat{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{B}^{-1} \mathbf{y} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} \triangleq \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{A}^\dagger + \sigma_b^2 \mathbf{I}, \quad (\text{III.10})$$

où  $\boldsymbol{\Gamma}$  désigne la covariance *a priori* de  $(\mathbf{s}|\mathbf{q})$ . Par définition des modèles *a priori*, dans le cas d'un processus BG, elle s'écrit  $\boldsymbol{\Gamma} = \sigma^2 \text{diag}\{\mathbf{q}\}$  et dans le cas PG,  $\boldsymbol{\Gamma} = \sigma^2 \mathbf{I}_P$ . Cette solution n'est autre que celle des moindres carrés regularisés.

L'étape d'estimation possède une solution unique et explicite  $\hat{\mathbf{s}}$  donnée par (C.3). Elle est donc particulièrement simple. Par contre, la localisation des impulsions – en nombre inconnu – est beaucoup plus délicate.

**Quelques considérations algorithmiques** Dans le cas d'un modèle BG, la dimension du vecteur  $\mathbf{q}$  est fixée à l'avance et la séquence  $\mathbf{q}$  prend un nombre fini de configurations possibles. L'estimation de  $\mathbf{q}$  se réduit donc à celle de ses composantes. Cette caractéristique a une conséquence importante sur un plan algorithmique : l'optimisation de la vraisemblance *a posteriori* marginale (III.8) est un problème d'*exploration combinatoire*. Compte tenu des tailles courantes du vecteur  $\mathbf{q}$ , l'exploration exhaustive de toutes les configurations n'est pas envisageable pour un coût calculatoire raisonnable. La littérature de la déconvolution BG propose deux types d'approches, nécessairement sous-optimales : les approches récurrentes, pour un traitement en ligne des données, et les approches itératives qui travaillent d'emblée sur le problème complet en améliorant une solution courante par modifications successives. L'approche itérative, initialement un peu plus coûteuse, semble maintenant nettement préférable à la forme récurrente, notamment grâce à des stratégies d'exploration particulièrement performantes développées dans le contexte de la déconvolution BG [GOUTSIAS & MENDEL 1986, GOUSSARD et coll. 1990, CHAMPAGNAT et coll. 1996]. Les principes de cette approche sont partiellement décrits dans l'annexe de ce chapitre ; nous aurons néanmoins l'occasion d'y revenir et de les détailler dans les chapitres suivants.

Dans le cas d'un modèle PG, la dimension variable de l'ensemble  $\mathbf{q}$  – qui fait partie des paramètres à estimer – constitue une difficulté supplémentaire. Contrairement au cas

BG, l'optimisation de (III.8) n'est pas un problème d'*exploration combinatoire*. A notre connaissance, seuls les travaux de KWAKERNAAK [KWAKERNAAK 1980] ont considéré le problème de la déconvolution PG. Nous montrerons en quoi l'approche qu'il propose n'est pas satisfaisante d'un point de vue formel et algorithmique. Notons simplement que l'auteur choisit d'estimer la dimension de  $q$  indépendamment de ces composantes, en utilisant le critère de Rissanen. Cette approche s'insère dans le cadre méthodologique traditionnel évoqué dans le chapitre II.

## CHAPITRE IV

### APPLICATION À LA « DÉCONVOLUTION » D'UN PÉRIODOGRAMME

**N**OS PREMIERS travaux ont consisté à appliquer la démarche méthodologique définie en III. 4 à la déconvolution Bernoulli-Gaussienne d'un périodogramme, telle qu'elle est utilisée dans les problèmes de déconvolution impulsionale. Cette première mise en œuvre est présentée sous la forme d'un article publié en septembre 1995 dans la revue Traitement du Signal - volume 12 - numéro 3 et intitulé : « Une méthode d'analyse de sinusoïdes complexes par déconvolution du périodogramme : « Expuse » ».

Cet article figure après un bref préambule, dans lequel les principes de la méthode, décrits de façon exhaustive dans l'article, ne seront que succinctement repris, l'objectif étant plutôt de recenser ses limitations et d'envisager les alternatives et extensions qui constituent les chapitres qui suivent.

#### 1 Principes

L'idée est d'améliorer la résolution d'un analyseur de spectre lorsque l'entrée de celui-ci est un processus de raies pures. L'objectif est d'en estimer la densité spectrale de puissance (DSP) moyenne. La démarche proposée se fonde sur les propriétés asymptotiques du périodogramme : après lissage, le périodogramme obtenu en sortie de l'appareil présente une structure qui tend asymptotiquement vers le produit de convolution de la DSP du signal d'entrée par un noyau positif parfaitement connu, lequel dépend de la fenêtre de pondération appliquée sur les données. Le modèle obtenu sous la forme linéaire (III.2) est rigoureusement identique à celui qui est utilisé en déconvolution d'impulsions. Il autorise donc l'emploi de toutes les techniques y afférant. La DSP est modélisée par un processus BG, représentatif du spectre de raies. La séquence de Bernoulli modélise un nombre élevé de raies candidates, dans l'objectif d'une analyse haute résolution. Le mélange convolutif est alors inversé selon les différentes techniques inspirées du domaine de la déconvolution impulsionale, tant récurrentes qu'itératives. La qualité des premiers résultats obtenus a

confirmé le bien-fondé de cette démarche. Néanmoins, plusieurs limitations subsistent.

## 2 Limitations

1. La première limitation émane des arguments asymptotiques qui président à la démarche. A nombre fini d'observations, la structure convective du modèle peut s'avérer fruste. Le périodogramme, défini comme le module carré de la transformée de Fourier discrète des données, n'est évidemment pas une transformation linéaire. Or l'interaction entre le signal utile et le bruit après l'opération de quadrature a été négligée, dans le but de séparer leurs contributions respectives et d'utiliser un modèle linéaire, de fait approximatif.
2. Dans l'optique d'utiliser les techniques rapides de calcul de transformées de Fourier, les données ont été complétées par « burrage de zéros ». Il est bien connu qu'un tel procédé ne modifie en rien la résolution naturelle du périodogramme qui reste de l'ordre de l'inverse du nombre de données initiales. Il contribue uniquement au confort visuel en améliorant la lisibilité du spectre. Nous l'avons utilisé ici dans le but de former un ensemble discret de raies candidates. Cette technique introduit inévitablement une corrélation sur le bruit additif. Or nous avons fait l'hypothèse de sa blancheur.
3. La modélisation BG n'est pas parfaitement adaptée au cas des spectres (de puissance) des raies pures dans la mesure où la composante gaussienne centrée ne permet pas de représenter parfaitement la densité énergétique des raies qui, par définition, est positive. Des lois « Bernoulli- $\chi^2_2$  » ou « Bernoulli-Gamma » seraient sans doute plus appropriées, mais plus difficiles à manipuler.
4. En outre, la composante de Bernoulli suppose implicitement que les raies sont positionnées sur une grille, qui peut cependant être très fine. Elle ne permet donc pas de restituer une solution dans un continuum spectral.

Ces défauts peuvent être partiellement levés, par exemple en calculant le périodogramme sur les seules données disponibles, en formant un ensemble de raies candidates indépendant des fréquences discrètes introduites par le calcul du périodogramme ou encore en changeant de modèle *a priori*. En revanche, l'opération de quadrature inhérente au périodogramme pourra difficilement être assimilée à un effet linéaire. A l'évidence, cette première approche nécessite de nombreux aménagements. Elle demeure néanmoins justifiée dans la mesure où elle se place en aval des dispositifs opérationnels existants. A ce titre, elle entre en concurrence avec une méthode en plusieurs points similaire, proposée dans le cadre de la goniométrie [FUCHS & CHUBERRE 1994]. Celle-ci traite

les données issues d'un système de formation de voies - pendant du périodogramme en analyse spectrale - afin d'en améliorer la résolution, intrinsèquement limitée par la taille de l'antenne (cf. chapitre II). Cette approche s'appuie sur un modèle convolutionnel très voisin de celui que nous avons retenu. Elle formule également le problème comme un problème inverse. En revanche, la régularisation est réalisée dans un contexte déterministe par une paramétrisation de la solution impulsionale. Elle ne permet pas de prendre en charge simultanément la localisation des sources et la détermination de leur nombre. Sur un plan méthodologique, ces deux sous-problèmes sont donc dissociés. Le premier repose sur un critère de vraisemblance qui dégénère systématiquement vers le nombre maximal de sources s'il n'est pas compensé. En l'occurrence, c'est un critère du type Akaike qui pénalise un nombre élevé de sources. Cette approche sort du cadre méthodologique exposé dans ce document ; nous n'y reviendrons pas.

## 3 Alternatives et extensions

Eu égard aux limitations évoquées, il est clair que la manipulation d'un périodogramme ou d'une sortie de formation de voies ne peut conduire à une analyse optimale. Cette constatation n'est pas surprenante : ces derniers ne constituent pas une représentation exhaustive des données (non-linéarité, perte de l'information sur la phase). C'est pourquoi nous proposons dans les chapitres qui suivent de travailler sur les données « brutes » (grandeur complexes) ou tout autre représentation strictement équivalente. Dans ces conditions, la loi normale complexe pour décrire les amplitudes des raies ou des sources constitue un choix tout à fait fondé. Rappelons à ce titre que la méthode du maximum de vraisemblance stochastique s'appuie sur ce modèle.

Dans les problèmes respectifs de localisation de sources en traitement d'antenne et d'analyse spectrale de raies pures, la solution est recherchée dans un intervalle continu. Des deux modèles composites envisagés pour exprimer le caractère impulsional de cette solution, le modèle PG est donc incontestablement le mieux adapté. Néanmoins, pour des raisons essentiellement algorithmiques, nous avons choisi dans un premier temps d'utiliser le modèle BG, en recherchant un compromis entre les avantages et les inconvénients liés à sa nature discrète. Cette seconde approche fait l'objet du chapitre V, qui sera présenté dans le cadre de l'analyse spectrale de raies pures. Le passage au modèle PG sera alors proposé dans le chapitre VI, qui sera envisagé dans le contexte de la goniométrie bande-étroite haute résolution.

## Une méthode d'analyse de sinusoïdes complexes par déconvolution du périodogramme : «Expulse»\*

*A Complex Sinusoids Estimation Method  
Based on the Deconvolution of the Periodogram : “Expulse”*

par Patrick DUVAUT, Frédéric DUBLANCHET

ETIS, Groupe Signal, ENSEA  
6, avenue du Ponceau  
F-95014 Cergy-Pontoise cedex

### Résumé

La méthode EXPULSE pallie l'une des principales limitations des techniques traditionnelles d'Analyse Spectrale à Haute Résolution ASHR (MUSIC, Norme minimale, etc.) à savoir la faible robustesse vis-à-vis d'une méconnaissance de leur nombre. Son originalité repose sur l'interprétation d'un périodogramme mis en œuvre sur un processus de raies pures noyées dans un bruit additif, comme la convolution, à un bruit près, d'un processus composite Bernoulli-Gaussien avec une fonction spectrale parfaitement connue qui dépend de la calibration retenue du périodogramme (type de fenêtre d'apodisation, lissage temporel ou fréquentiel, etc.). Les fréquences discrètes où le processus de Bernoulli prend la valeur 1 sont des raies potentielles de l'espace signal; le processus gaussien caractérise quant à lui l'amplitude des raies.

**Mots clés :** Périodogramme, Problème Inverse, Déconvolution, Bernoulli-gaussien, Détection-estimation conjointes, Bayésien, Vraisemblance, Récurrent, itératif, Kalman, Sinusoïdes complexes, Représentation d'état, Propriété de Découplage, Analyse Spectrale, Haute-Résolution, EXPULSE, EXIT, EXPRE.

### Abstract

*EXPULSE method lifts the main drawback of the classical high resolution spectral analysis methods (MUSIC, MINORM, ...) which have a poor robustness with respect to an unreliable knowledge of the number of sources. Its novelty stems from the modeling of the periodogram of complex sinusoids embedded in an additive noise, as the convolution of a perfectly known kernel (depending upon the window) and a compound Bernoulli-Gaussian process, plus a noise. The discrete frequencies where the Bernoulli process takes 1 values locate the sinusoids; the gaussian process describes the amplitudes.*

**Key words :** Periodogram, Inverse problem, Deconvolution, Bernoulli-Gaussian, Joint Detection-estimation, Bayesian, Likelihood, On line, Off line, Kalman, Complex sinusoids, State space representation, Decoupling property, Spectral analysis, High Resolution, EXPULSE, EXIT, EXPRE.

## 1. Introduction

### 1.1. LE CONTEXTE

La principale limitation des méthodes d'analyse spectrale à haute résolution ASHR, qu'elles soient fondées sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice de données, telles que MUSIC [1], la Norme Minimale [2], Matrix-Pencil [3] etc, ou bien sur une argumentation au sens du maximum de Vraisemblance [4], réside dans une faible robustesse vis-à-vis d'une méconnaissance de la dimension de l'espace signal.

\* Rapport interne ETIS GS/INV/95001, mars 1995.

partiellement une optimalité *globale de détection-estimation conjointes*. Prise en charge tard, et uniquement à l'intérieur des tâches incombant à l'estimation, l'optimalité de la détection ne pourra suggérer aucune remise en question de la structure générale des procédures.

Cette question s'avère de toute façon délicate : peu de résultats théoriques généraux existent sur des méthodologies de détection et d'estimation conjointes [11] [12].

Le présent article apporte une contribution à ce problème en reformulant l'analyse de raies noyées dans un bruit additif comme un problème inverse [13] : celui de la déconvolution du périodogramme [14]. Après régularisation (*c'est-à-dire ajout d'information*), cette déconvolution s'énonce bien comme un problème de détection et d'estimation conjointes.

sont centrées, également indépendantes entre elles et de variance  $\sigma_k^2$ .

Il s'agit d'estimer les paramètres de la DSP du modèle (1) avec une résolution plus fine que  $1/N$  en ce qui concerne la détermination des fréquences  $\nu_k$ . Pour ce faire, les algorithmes classiques d'analyse spectrale à haute résolution prolongent les *N échantillons observés*, en modélisant le signal temporel. La méthode EXPULSE procède elle par *comblement fréquentiel* : elle régularise les données dans l'espace fréquentiel en considérant le périodogramme standard comme un opérateur de convolution, puis inverse le mélange convolutif correspondant.

## 3. L'Analyse de raies en tant que problème inverse

### 3.1. LE PÉRIODOGRAMME STANDARD COMME UNE OPÉRATION DE CONVOLUTION

Le signal discret  $y[n]$  observé sur un horizon de  $N$  échantillons est pondéré par une fenêtre  $w[n]$ . On note  $y_w[n]$  le signal apodisé correspondant. Le périodogramme standard associé à la fenêtre  $w[n]$  se définit alors, pour des fréquences réduites  $\nu$  à variations continues dans un intervalle de longueur unité [8] [10] [14], par :

$$\Pi_w(\nu) \triangleq \frac{1}{N} |\hat{\gamma}_w(\nu)|^2 \quad (2)$$

où  $\hat{\gamma}_w(\nu)$  désigne la *TF* de la séquence  $y_w[n], 0 \leq n \leq N-1$ . On établit [8] :

$$E[\Pi_w(\nu)] = \frac{1}{N} (\hat{\gamma}_y \circledast \hat{\gamma}_w)(\nu) \quad (3)$$

où  $\hat{\gamma}_y(\nu)$  désigne la *DSP* de  $y[n]$ , @ n'est autre que le produit de convolution et  $\hat{\gamma}_w(\nu)$  représente la densité spectrale d'énergie *DSE* de  $w[n]$  considérée comme une séquence d'énergie finie déterministe. En d'autres termes :

$$\hat{\gamma}_w(\nu) = |\hat{w}(\nu)|^2 \quad (4)$$

où  $\hat{\gamma}_w(\nu)$  est la *TF* de  $w[n]$ . Le périodogramme standard s'interprète alors, dans le domaine des fréquences continues, comme le produit de convolution de la fonction spectrale  $\hat{\gamma}_w(\nu)/N$  et de la vraie *DSP* du signal qui se confond avec :

$$\sum_{k=1}^M \sigma_k^2 \delta(\nu - \nu_k) + \sigma_\eta^2 \quad (5)$$

où  $\sigma_k^2$  est la variance du bruit  $\eta[n]$ , voir (1). Dans la pratique, le calcul fréquentiel ne peut se faire qu'en fréquence discrète et les algorithmes déterminent la transformée de Fourier discrète (*TFD*) sur  $N_F$  points, ( $N_F \geq N$ ). L'axe fréquentiel est donc

## 2. Hypothèses, Notations, Motivations

On considère  $N$  échantillons d'un processus complexe circulaire [7]  $y[n]$  composé de  $M$  raies complexes noyées dans un bruit blanc additif  $\eta[n]$ , indépendant de  $x[n]$  :

$$y[n] = x[n] + \eta[n],$$

où :

$$x[n, \omega] \triangleq \sum_{k=1}^M a_k(\omega) e^{j2\pi\nu_k n} e^{j\phi_k(\omega)} \quad (1)$$

$$\text{pour } 0 \leq n \leq N-1, \text{ avec } \nu_k \triangleq \frac{f_k}{F_e}$$

où par définition  $T_e \triangleq 1/F_e$  désigne la période d'échantillonage et  $\omega$  une épreuve. Les  $\nu_k$  sont les fréquences réduites. Les phases  $\phi_k$  sont uniformément réparties sur  $[0, 2\pi]$ , elles sont supposées mutuellement indépendantes, et indépendantes des  $a_k$ . Les  $a_k$

échantillonné à la cadence  $1/N_F$  et le périodogramme discret s'écrit :

$$\Pi_w[k] \triangleq \Pi_w \left( \frac{k}{N_F} \right), 0 \leq k \leq N_F - 1 \quad (6)$$

$y[n]$  étant nul en dehors de l'intervalle  $0 \leq n \leq N - 1$ .

Remarque R1.

Avant de présenter la version discrétisée en fréquence de la formule (3), il convient de préciser une différence fondamentale, afin d'éviter tout malentendu, entre un « canal de résolution de Fourier » et un « canal fréquentiel ». Etant donné que seuls  $N$  échantillons temporels ont été mesurés, on appelle canal de résolution de Fourier toute fréquence discrète de la forme  $q/N$  où  $0 \leq q \leq N - 1$ . Le Périodogramme résoud au mieux deux raies distantes d'au moins  $1/N$  approximativement. En général, de façon à augmenter le nombre de points fréquentiels sans toutefois modifier la résolution, on complète les  $N$  échantillons par des zéros pour obtenir  $N_F$  fréquences discrètes  $k/N_F$ ,  $0 \leq k \leq N_F - 1$ , avec  $N_F = 2^\alpha N$  par exemple, où  $\alpha$  est choisi en fonction des besoins. Les fréquences  $k/N_F$  ne peuvent être considérées en aucun cas comme des canaux de résolution de Fourier, dans la mesure où les relations d'incertitude empêchent toujours le seul Périodogramme de séparer des raies distantes de moins de  $1/N$ . Pour éviter toute ambiguïté, les fréquences  $k/N_F$  seront appelées des « canaux fréquentiels ». Séparer des raies distantes  $1/N_F$  par déconvolution du Périodogramme revient donc à franchir la résolution de Fourier dans des proportions dictées par la valeur de  $\alpha$ . Ce progrès ne peut être accompli que par l'ajout d'informations a priori. En résumé, dans la formule (6),  $k$  est un canal fréquentiel et non un canal de résolution de Fourier.

Un raisonnement identique à celui effectué lorsque les fréquences sont continues donne :

$$E[\Pi_w[k]] = \left( \frac{\hat{\gamma}_w}{N} \otimes \hat{\gamma}_y \right) [k] \quad (7)$$

$\otimes$  désigne l'opérateur de convolution discrète circulaire, [8]. Dans (7), les densités spectrales ont été échantillonées à la cadence  $1/N_F$ . L'espérance mathématique du Périodogramme standard discrétisé s'interprète aussi comme le produit de convolution discret d'une fonction spectrale parfaitement connue :

$$\hat{o}_w[k] \triangleq \left( \frac{1}{N} \right) \hat{w}[k]^2$$

par une séquence discrète représentative du spectre de raies à identifier.

Dans ces conditions, la DSP discrète  $s[k]$  estimée

$$s[k] \triangleq \hat{\gamma}_x(\nu)$$

peut avantageusement être décrite comme un processus composite aléatoire Bernoulli-gaussien. En effet, le modèle Bernoulli-gaussien représente explicitement une suite d'impulsions

aléatoires d'amplitude a priori gaussienne dont la probabilité de présence est régie par une loi de Bernoulli [19], de densité  $\lambda$ . Ainsi :

$$s[k] \triangleq \xi[k] \cdot \beta[k] \quad (8)$$

où la séquence de Bernoulli  $\beta[k]$ , entièrement définie par

$$\text{Prob}[\beta[k] = 1] = \lambda, \text{Prob}[\beta[k] = 0] = 1 - \lambda$$

caractérise la présence ou l'absence des raies.  $\xi[k]$ , processus amplitude des raies, est une variable aléatoire gaussienne. L'inversion d'une relation de la forme :

$$\Pi_w[k] \triangleq (o_w \otimes s)[k] + b[k] \quad (9)$$

où  $b[k]$  est un terme de perturbation qui contient en partie les erreurs de modélisation et la contribution fréquentielle de  $z[n]$ , est donc une opération de déconvolution impulsionale. La modélisation de la DSP estimée  $s[k]$  par un processus  $BG$  régularise le problème inverse mal posé, par ajout d'information a priori sur la nature de la solution. Le Périodogramme réalise donc un filtrage linéaire bruité de la DSP estimée du signal, par un filtre ( $F$ ) de réponse impulsionale  $o_w[k]$ . Présentée ainsi, l'analyse spectrale d'un processus de raies pures s'interprète comme un problème bayésien de détection (recherche des  $\beta[k]$ ) et d'estimation (identification des  $\xi[k]$ ) conjointes.

En toute rigueur, la séquence  $BG$   $s[k]$  n'est qu'une approche du spectre de raies pures dans la mesure où la composante gaussienne ne permet pas de représenter parfaitement la densité énergétique des raies qui, par définition, est positive. Cependant, un environnement gaussien limite la description statistique au second ordre, d'où de multiples simplifications de mise en œuvre. Motivés par la même raison, nous assimilerons les perturbations temporelles qui s'ajoutent au signal  $x[n]$  et filtrées par le système linéaire ( $F$ ) à un bruit blanc gaussien centré  $b[n]$ . On tiendra compte du caractère positif de la DSP estimée en agissant sur la variance du processus  $\xi[k]$ .

La méthode EXPULSE considère le périodogramme discret calculé sur un processus de raies pures comme un filtre linéaire bruité, dans le domaine fréquentiel, dont les caractéristiques sont parfaitement connues et dont l'entrée  $s[k]$ , DSP estimée du signal, est modélisée par un processus Bernoulli-gaussien.

En résumé, EXPULSE résoud un problème inverse dans le domaine fréquentiel en déconvolvant tout ou partie du périodogramme.

## 3.2. LA DÉCONVOLUTION DU PÉRIODOGRAMME

### 3.2.1. Formulation bayésienne et propriété de découplage

#### 3.2.1.1. Formulation bayésienne de la déconvolution du périodogramme

Les  $N_F$  échantillons fréquentiels  $\Pi_w[k]$  issus du périodogramme discret sont décrits par le modèle suggéré par (9) :

$$\Pi_w[k] = \sum_{i=0}^{L-1} o_w[i] s[k-i] + b[k], 0 \leq k \leq N_F - 1 \quad (10)$$

où  $b[k]$  est supposé blanc gaussien centré de variance  $\sigma_b^2$  et où la DSP estimée  $s[k]$  à restaurer est modélisée par un processus composite Bernoulli-gaussien  $s[k] = \xi[k]\beta[k]$  où  $\beta[k]$  est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $\lambda$  et  $\xi[k]$  une variable aléatoire gaussienne centrée de variance  $\sigma^2$  indépendante de  $\beta[k]$ . Les quantités  $\{\sigma_b^2, \sigma^2, \lambda\}$  sont les hyperparamètres du problème de déconvolution, regroupés dans le vecteur  $\mathbf{h}$ . La relation (10) se récrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{p}_w = \mathbf{O}_w s + \mathbf{b} \quad (11)$$

les  $N_F$  lignes de la matrice  $\mathbf{O}_w$  étant constituées des échantillons décalés de la fonction spectrale convoluante  $o_w[\cdot]$ . Les composantes du vecteur  $\mathbf{p}_w$  sont les  $\Pi_w[k]$ ,  $0 \leq k \leq N_F - 1$ . D'après (11), conditionnellement à la connaissance du processus  $s$ ,  $\mathbf{p}_w$  est gaussien de moyenne  $\mathbf{O}_w s$  et de matrice de covariance  $\sigma_b^2 I$ . Lorsque seule la séquence de Bernoulli  $\beta[k]$  est connue,  $s$  est gaussien, de moyenne nulle et de matrice de covariance :

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \text{diag}\{\beta[k]\}, 0 \leq k \leq N_F - 1 \quad (12)$$

Si l'on désigne par  $Q$  le nombre d'impulsions présentes, i.e. le nombre de 1 contenus dans une réalisation du processus  $\beta[k]$ ,  $0 \leq k \leq N_F - 1$ , on note que le rang de la matrice  $\mathbf{R}$  est égal à  $Q$ . Conditionnellement à la séquence  $\beta[k]$ ,  $0 \leq k \leq N_F - 1$ , le vecteur  $s$  est donc un vecteur gaussien dégénéré, ayant en fait  $N_F - 1 - Q$  composantes nulles. On écrira  $s'$  le vecteur non dégénéré de taille  $Q$  qui contient, dans leur ordre d'arrivée, les seules composantes non nulles de  $s$ . Dans le même ordre d'idée, on prima la toutes les grandeurs relatives à  $s'$ . Dans ces conditions, on a, toujours conditionnellement à la séquence des impulsions :

$$\mathbf{p}_w = \mathbf{O}'_w s' + \mathbf{b} \quad (13)$$

où conformément à nos conventions  $\mathbf{O}'_w$  désigne la matrice des vecteurs-colonnes de  $\mathbf{O}_w$  dont les rangs coïncident avec ceux des impulsions présentes. Le vecteur  $s'$  est alors gaussien de matrice de covariance :

$$\mathbf{R}' = \sigma^2 I_Q \quad (14)$$

si  $I_Q$  désigne la matrice-identité de taille  $Q$ .  $\mathbf{p}_w$  demeure gaussien centré de matrice de covariance :

$$\mathbf{F} = \mathbf{O}'_w \mathbf{R}' \mathbf{O}_w^T + \sigma_b^2 I = \mathbf{O}_w \mathbf{R} \mathbf{O}_w^T + \sigma_b^2 I \quad (15)$$

où le symbole  $T$  désigne la transposition. Les méthodes d'inversion restent alors dans le cadre simple de l'estimation de grandeurs gaussiennes et les techniques bayésiennes de déconvolution simple sont fondées sur la maximisation de fonctions de vraisemblance généralisée de la forme :

$$\mathcal{L}(s) \triangleq f(s | \mathbf{p}_w, \mathbf{h}, \mathbf{o}_w) \quad (16)$$

avec :

$$\mathbf{o}_w \triangleq [o_w[L-1] o_w[L-2] \dots o_w[0]]^T \quad (17)$$

où  $f(\cdot)$  représente une densité de probabilité dont seul l'argument précise la nature, afin de ne pas alourdir les notations. Dans toute la suite,  $\mathbf{q}$  désigne le vecteur de taille  $N_F$  dont les composantes sont les  $\beta[k]$ ,  $0 \leq k \leq N_F - 1$  et  $f_q(\cdot)$  est une densité de probabilité conditionnellement à  $\mathbf{q}$ . Dans la mesure où le noyau de convolution est parfaitement déterminé par la calibration du périodogramme et où les hyper-paramètres sont supposés connus et localement invariants, nous omettrons dans l'écriture des lois de probabilités, le conditionnement par  $\mathbf{o}_w$  et  $\mathbf{h}$ .

Comme déjà mentionné, le problème de déconvolution du Périodogramme, tel qu'il est abordé dans cette approche bayésienne, nécessite de détecter la position des raies d'une part et d'estimer leurs amplitudes respectives d'autre part. Des considérations stratégiques se posent quant à l'estimation de deux quantités : simultanément, indépendamment ou séquentiellement.

Une certaine cohérence des résultats déconseille tant une estimation indépendante des deux processus qu'une procédure de détection des événements à la suite de l'estimation du processus amplitude. Se présentent alors deux stratégies possibles :

#### Stratégie Conjointe

Détection-Estimation conjuguée de  $q$  et  $s$  par maximisation de la densité conjointe a posteriori

$$\mathcal{L}_C(q, s) \triangleq f(q, s | \mathbf{p}_w) \quad (18)$$

ce qui revient à maximiser, par rapport à  $q$  et  $s$  :

$$\mathcal{V}_C(q, s) = f(\mathbf{p}_w | q, s) f(s | q) f(q) \quad (19)$$

#### Stratégie Marginale

Détection-Estimation séquentielle où l'étape de détection est réalisée par maximisation de la densité marginale a posteriori

$$\mathcal{L}_M(q) \triangleq f(q | \mathbf{p}_w)$$

ce qui revient à maximiser par rapport à  $q$  :

$$\mathcal{V}_M(q) = f(\mathbf{p}_w | q) f(q) \quad (20)$$

et la procédure d'estimation par maximisation de la vraisemblance conjointe :

$$\mathcal{V}_C(\hat{q}, \hat{s})$$

avec

$$\hat{q} \triangleq \text{Arg}\{\max\{\mathcal{V}_M(q)\}\} \quad (22)$$

Quand  $q$  est connu, le critère d'estimation  $\mathcal{V}_C$  représente la vraisemblance a posteriori de  $s/q$  et la distribution gaussienne de la variable conditionnée  $s|q$  permet d'estimer au sens du maximum a posteriori (MAP) [5] [6] [7] [8] :

$$\hat{s} = R O_w^T \Gamma^{-1} p_w \quad (23)$$

Une détection optimale nécessiterait le calcul des vraisemblances pour les  $2^{N_F}$  réalisations possibles de la séquence de Bernoulli, calcul rédhibitoire pour un échantillonnage fréquentiel trop fin (i.e.  $N_F$  trop élevé). Il convient par conséquent d'envisager à défaut une *détection sous-optimale* par exploration d'un nombre limité de réalisations du processus de Bernoulli. Nous avons retenu deux approches de cette sous-optimalité justifiées par leur bon compromis complexité calculatoire/performances. La première élaboré une approximation *récursive* du critère utilisé et maximise ce dernier de manière optimale. La seconde consiste à calculer, sans approximation et dans une procédure *itérative* d'optimisation, une suite convergente de vraisemblances d'un sous-ensemble de l'espace des réalisations possibles de  $q$ . Ces deux techniques sont respectivement détaillées aux § 3.2.2 et 3.2.3.

### 3.2.1.2. Propriété de découplage

Qu'il s'agisse de l'approche récurrente ou itérative, les algorithmes correspondants reposent sur un résultat largement utilisé dans [17] initialement établi par MENDEL [15], selon une approche algébrique nécessitant de nombreux calculs. Nous proposons ici une nouvelle démonstration de ce résultat, directe, sans développements algébriques particuliers. D'autre part, ce résultat revêt une forme enrichie par rapport à [15], qui constitue ce que nous avons appelé ci-dessous la *propriété de découplage*.

Au préalable, nous introduisons les notations suivantes. Si besoin est, toute densité de probabilité d'un vecteur gaussien  $u$  s'écrira sous la forme du produit  $c(u)g(u - E[u])$  où  $c(\cdot)$  est la constante de normalisation et où  $g(\cdot)$  désigne le terme exponentiel correspondant. Pour fixer les idées si  $u$ , vecteur gaussien réel non dégénéré de taille  $K$ , a une valeur moyenne égale au vecteur  $m$  et une matrice de covariance confondue avec  $B$ , alors :

$$c(u) = \frac{1}{2\pi^{K/2}} \frac{1}{\det^{1/2}(B)} \quad \text{et} \\ g(u - m) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(u - m)^T B^{-1}(u - m) \right\} \quad (24)$$

En cohérence avec ce qui précède,  $g_q(\cdot)$  représentera l'exponentielle d'une densité gaussienne conditionnellement à  $q$ . La propriété de découplage repose sur le théorème T1 et sa conséquence fondamentale C1.

Dans toute la suite, l'opérateur  $\otimes$  désigne le *produit de Hadamard* de deux vecteurs. La composante de rang  $k$  du produit de

Hadamard de  $q$  et  $a$ , est égale au produit des composantes de rang  $k$  de chacun des deux vecteurs :

$$[q \otimes a]_k = [q]_k [a]_k$$

### Théorème T1. [8]

Sous les hypothèses suivantes :

- H1  $p_w = O_w s + b$ , où  $s = q \otimes a$ ,
- H2  $b$  est blanc gaussien de matrice de covariance  $\sigma_b^2 I$ ;
- H3  $a$  est blanc gaussien de matrice de covariance  $\sigma_a^2 I$ ;
- H4  $q$  est un vecteur blanc de Bernoulli de covariance  $\lambda(1 - \lambda) I$ ;
- H5  $\{q, a, b\}$  sont mutuellement indépendants;

et compte tenu des conventions (19) (20) (23) et (24), alors :

$$\mathcal{V}_C(q, s) = \frac{1}{2\pi^{(N_F+Q)/2}} \frac{1}{\sigma_b^{N_F}} \frac{1}{\sigma_a^Q} g_q(p_w) f(q) g_q(s - \hat{s}) \quad (25)$$

$$\mathcal{V}_C(q, s) = \mathcal{V}_M(q) \frac{1}{2\pi^{Q/2}} \frac{\det^{1/2}(\Gamma)}{\sigma_a^Q \sigma_b^{N_F}} g_q(s - \hat{s}) \quad (26)$$

Il est rappelé que  $Q$  désigne le nombre de composantes non nulles de  $q$ .

### Preuve de T1.

La démonstration de T1 repose sur la formule de Bayes relative à des densités conjointes :

$$f_q(p_w, s) = f_q(s | p_w) f_q(p_w) = f_q(p_w | s) f_q(s) \quad (27)$$

écrite dans le cas gaussien selon nos conventions :

$$c_q(p_w) c_q(s | p_w) g_q(p_w) g_q(s - E_q[s | p_w]) = \\ c_q(p_w | s) c_q(s) g_q(p_w - E_q[p_w | s]) g_q(s) \quad (28)$$

En partant de (19), on établit la formule (25) si l'on conserve le membre de gauche de (28) où l'on remarque, d'une part que l'espérance conditionnelle  $E_q[s | p_w]$  n'est autre que  $\hat{s}$ , voir [19], et d'autre part que :

$$c_q(p_w) c_q(s | p_w) = c_q(p_w | s) c_q(s) = \frac{1}{2\pi^{(N_F+Q)/2}} \frac{1}{\sigma_b^{N_F}} \frac{1}{\sigma_a^Q} \quad (29)$$

La formule (26) est une conséquence de (25), de la définition de  $\mathcal{V}_M(q)$ , voir (20), et de la forme explicite de la densité d'une gaussienne [19].

### Conséquence fondamentale C1.

Toujours sous les hypothèses H1 H2 H3 H4 H5,  $\mathcal{V}_C(q, \hat{s})$  est indépendant de  $\hat{s}$  et s'écrit :

$$\mathcal{V}_C(q, \hat{s}) = \frac{1}{2\pi^{(N_F+Q)/2}} \frac{1}{\sigma_b^{N_F}} \frac{1}{\sigma_a^Q} g_q(p_w) f(q) \quad (30)$$

On a, de plus :

$$\mathcal{V}_C(q, \hat{s}) = \mathcal{V}_M(q) \frac{1}{2\pi^{Q/2}} \frac{\det^{1/2}(\Gamma)}{\sigma_a^Q \sigma_b^{N_F}} \quad (31)$$

On déduit (30) et (31) de (25) et (26), en notant que  $g(\theta) = 1$ .

La propriété de découplage s'énonce alors en ces termes, compte tenu de T1 et C1 :

### SYNTHÈSE

La maximisation de la vraisemblance conjointe  $\mathcal{V}_C(q, s)$  peut se scinder en deux opérations, de détection d'une part et d'estimation d'autre part. La détection est obtenue en maximisant la vraisemblance de détection conjointe, indépendante de  $\hat{s}$  :

$$\mathcal{V}_C(q, \hat{s}) = \frac{1}{2\pi^{(N_F+Q)/2}} \frac{1}{\sigma_b^{N_F}} \frac{1}{\sigma_a^Q} g_q(p_w) f(q) \quad (32)$$

L'estimation afférente consiste à maximiser la vraisemblance d'estimation conditionnellement à une détection  $\hat{s}$  :

$$\mathcal{V}_C(s, \hat{s}) = f_q(p_w | s) f_q(s) \quad (33)$$

ce qui conduit à la relation (23). Les stratégies conjointes et marginales ne diffèrent que par leurs détections respectives dont les vraisemblances sont reliées, par l'identité :

$$\mathcal{V}_C(q, \hat{s}) = \mathcal{V}_M(q) \frac{1}{2\pi^{Q/2}} \frac{\det^{1/2}(\Gamma)}{\sigma_a^Q \sigma_b^{N_F}} \quad (34)$$

### Remarque R2.

Un résultat analogue à la formule (34) a été obtenu dans [16] selon une démarche fondée sur des calculs algébriques. Le théorème T1 s'affranchit, par conséquent, de tous ces développements. Cette formule s'avère d'autant plus importante qu'elle préside en partie à l'élaboration des algorithmes itératifs de déconvolution impulsionnelle [16], comme il sera vu au § 3.2.3.

### 3.2.2. EXPULSE Récurrent EXPRE

#### 3.2.2.1. Considérations générales, notations

La nature récurrente de l'algorithme recherché exige de progresser dans l'identification de  $s$  ou de  $q$  de proche en proche, en partant d'une détection-estimation réalisée dans un canal fréquentiel de rang  $k-1$ , par exemple, puis de prendre en compte l'information contenue dans la valeur du périodogramme dans le canal  $k$  pour

détecter et estimer au sein même de ce canal, etc. Les notations suivantes s'avèrent commodes :  $\hat{s}_{k/k}$  représente le vecteur-signal estimé jusqu'au canal  $k$ ,  $0 \leq k \leq N_F - 1$ , connaissant les échantillons  $\Pi_w[i] : 0 \leq i \leq k$  du périodogramme ;  $p_w^k$  est le vecteur de taille  $k+1$  contenant les  $\Pi_w[i], 0 \leq i \leq k$ ;  $q_k$  est le vecteur de taille  $N_F$  dont les  $k+1$  premières composantes sont les  $\beta[i], 0 \leq i \leq k$  et dont les dernières composantes sont nulles; en d'autres termes, on a :

$$q_k = q_{k-1} + \beta[k] I_k \quad (35)$$

où  $I_k$  n'est autre que le vecteur de taille  $N_F$  dont la seule composante non nulle, de rang  $k$ , vaut 1;  $\hat{q}_k$  est l'estimée de  $q_k$ . La propriété de découplage va jouer, mais à chaque récurrence de l'algorithme : détection et estimation au sein du canal  $k$  vont s'effectuer de manière séparée, dans l'esprit décrit par T1 et C1, sous réserve d'introduire des approximations récurrentes des vraisemblances de détection conjointe pour (30) ou marginale, voir (20) et de la vraisemblance d'estimation, donnée par (33). Les approximations récurrentes des vraisemblances de détection conjointe et marginale sont respectivement appelées vraisemblances récurrentes a posteriori MAP et du maximum de vraisemblance MV. Eu égard à la récurrence sous-jacente, la détection dans le canal  $k$  ne remet pas en cause celles émanant des canaux précédents. Plus précisément  $\hat{q}_k$  concatène l'estimée  $\beta[k]$  à  $\hat{q}_{k-1}$ , ce qui s'écrit, en accord avec (35) :

$$\hat{q}_k = \hat{q}_{k-1} + \beta[k] I_k \quad (36)$$

#### 3.2.2.2. Approximation récurrente de la vraisemblance d'estimation par filtrage de Kalman

Remarquons d'emblée, d'après la propriété de découplage, que l'estimation se réalise toujours conditionnellement à la détection. En conséquence, il est équivalent, d'estimer le « vecteur signal »  $s$  ou le « vecteur amplitude », à proprement parler :  $a$ , contenant les  $\xi[k], 0 \leq k \leq N_F - 1$ , c'est pourquoi il n'a été et il ne sera seulement question que de  $s$  et non de  $a$ . Conditionnellement à  $q$ , c'est-à-dire somme toute à la détection, toutes les lois étant conjecturées gaussiennes, l'approximation récurrente de la vraisemblance d'estimation s'obtient de manière optimale par un filtrage de Kalman, [8]. Sa mise en œuvre repose sur une reformulation de (10) à partir d'une équation d'état et d'une équation d'observation, donc du choix d'un vecteur d'état  $x$  contenant  $s$ . La réécriture en question se fonde sur une représentation d'état MA dégénérée qui consiste à introduire un vecteur d'état invariant, en reportant la dynamique sur la réponse du filtre. La forme MA dégénérée est décrite par :

$$\text{Un vecteur d'état constant : } x \quad (37)$$

Une équation d'observation relative au canal fréquentiel  $k$  :

$$\Pi_w[k] = o_{wk}^T x + b[k] \quad (38)$$

$$\text{où : } x \triangleq [0 \dots 0 s[0] s[1] \dots s[N_F - 1]]^T \quad (39)$$

$$\text{et : } o_{wk} \triangleq [0 \dots 0 o_w[L-1] o_w[L-2] \dots o_w[0] 0 \dots 0]^T \quad (40)$$

Les vecteurs  $x$  et  $\sigma_{wk}$  sont tous deux de taille  $N_F + L - 1$ ;  $L - 1$  zéros précédent  $s[0]$  dans  $x$  et  $\sigma_w[0]$  occupent le rang  $k + L$  dans  $\sigma_{wk}$ , ceci pour :  $0 \leq k \leq N_F - 1$ . On suppose le système stationnaire, c'est-à-dire l'ondelette invariante. La dynamique consiste à écrire :

$$\sigma_{wk+1} = D \sigma_{wk} \quad (41)$$

où  $D$  est une matrice carrée de décalage à  $N_F + L - 1$  lignes et colonnes, dont tous les termes sont nuls, sauf ceux de la diagonale située en-dessous de la diagonale principale, tous égaux à 1. Si l'on appelle  $d_{ij}$  le terme situé à l'intersection de la ligne de rang  $i$  et de la colonne de rang  $j$ , on a :

$$d_{ij} = \delta[i - j - 1]$$

où  $\delta[n]$  désigne la séquence de Kronecker. D'après la structure générale d'un filtre de Kalman d'estimation [8],  $x$  peut donc être calculé de façon récurrente selon les relations de mise à jour suivantes :

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k-1/k-1} + g_k (\Pi_w[k] - \sigma_{wk}^T \hat{x}_{k-1/k-1}) \quad (42)$$

$$\varepsilon_k = \sigma_{wk}^T P_{k-1/k-1} \sigma_{wk} + \sigma_b^2 \quad (43)$$

$$g_k = P_{k-1/k-1} \sigma_{wk} \varepsilon_k^{-1} \quad (44)$$

$$P_{k/k} = P_{k-1/k-1} + g_k g_k^T \varepsilon_k \quad (45)$$

$$\sigma_{wk+1} = D \sigma_{wk}$$

avec les conditions initiales :

$$\hat{x}_{-1/-1} = 0 \quad (46)$$

$$P_{-1/-1} = \sigma^2 I \quad (47)$$

$$\sigma_w = [\sigma_w[L-1] \ \sigma_w[L-2] \ \dots \ \sigma_w[0] \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (48)$$

*Remarque R3.*

A la différence de [16], un filtre de Kalman d'estimation et non de prédiction a été utilisé ici. De même, les initialisations sont distinctes de celles suggérées dans [16], car ici le canal zéro existe et doit faire l'objet d'une détection-estimation à part entière.

### 3.2.2.3. Approximations récurrentes des vraisemblances de détection conjointe MAP et marginale MV

La détection par MAP revient à approximer la vraisemblance conjointe :

$$f(p_w, s | q) f(q)$$

Compte tenu de (36) la détection MAP dans le canal  $k$ , i.e., l'estimation de  $\beta[k]$ , consiste à maximiser par rapport à  $\beta[k]$ , la vraisemblance :

$$\mathcal{V}_{MAP}(\beta[k], m) \triangleq f(\hat{s}_{k-1/k-1}, p_w^{k+m} | \beta[k] \hat{q}_{k-1}) f(\beta[k] \hat{q}_{k-1}) \quad (49)$$

$m$  entier positif ou nul caractérise un lissage éventuel qui augmente la fiabilité de la détection, dans la mesure où lorsque

$m$  est non nul, la prise de décision s'appuie sur un ensemble d'échantillons du périodogramme issus, non seulement des canaux précédents ou égaux à  $k$ , mais aussi des  $m$  suivants. La quantité  $\hat{s}_{k-1/k-1}$  émane de  $\hat{q}_{k-1}$ , ainsi que de la sortie précédente du filtre de Kaiman, à savoir :  $\hat{x}_{k-1/k-1}$ . Le détecteur par  $MV$  construit une approximation récurrente du critère marginal :

$$f(p_w | q) f(q)$$

sous forme d'une recherche, toujours par rapport à  $\beta[k]$ , des maxima de la vraisemblance :

$$\mathcal{V}_{MV}(\beta[k], m) \triangleq f(p_w^{k+m} | \beta[k] \hat{q}_{k-1}) f(\beta[k] \hat{q}_{k-1}) \quad (50)$$

Ceci écarte du problème les amplitudes des événements. Les expressions des vraisemblances (49) et (50) sont semblables : celle du détecteur  $MV$  comporte un terme de plus par rapport au détecteur  $MAP$ , qui représente la matrice de covariance du vecteur d'état. Cela permet d'interpréter ce détecteur comme un test adaptatif sur le vecteur pseudo-innovation, puisque cette matrice est mise à jour à chaque récurrence et ne peut atteindre une valeur asymptotique en raison de la non-stationnarité du processus à restaurer. Cette méthode récurrente est très attrayante par son faible volume de calcul et son implantation aisée. Les deux stratégies de détection récurrente,  $MAP$  ou  $MV$ , présentent néanmoins l'inconvénient majeur de ne pas remettre en cause les décisions prises dans le passé, voir (36). Dans ces conditions, une accumulation de décisions erronées peut rapidement provoquer des instabilités. Cette principale limitation peut être palliée cependant par une approche de maximisation itérative des critères, en excluant tout traitement en ligne des données.

### 3.2.3. EXPULSE Itératif EXIT

#### 3.2.3.1. Considérations générales

S'affranchir partiellement des travers des algorithmes récurrents revient à fonder le processus de détection-estimation sur l'ensemble de données le plus complet possible, c'est-à-dire en utilisant le vecteur  $p_w$  dans son intégralité, plutôt que quelques-unes de ses composantes. Les traitements consomment alors les données par blocs et deviennent itératifs. En ce qui concerne l'estimation, cela se limite à appliquer la formule (23), une fois la détection accomplie. En ce qui concerne la détection, l'identité (34) de la propriété de découplage conduit à de nouvelles vraisemblances de détection conjointe  $\mathcal{X}_C(q)$  et marginale  $\mathcal{X}_M(q)$ , après : détermination du logarithme népérien in, suppression de tous les termes ne dépendant pas de  $q$ , écriture explicite des exponentielles  $g(\cdot)$  des différentes gaussiennes, voir (24), et prise en compte de la relation :

$$f(q) = \lambda^Q (1 - \lambda)^{N_F - Q} \quad (51)$$

On obtient finalement :

$$\mathcal{X}_C(q) = -p_w^T \Gamma^{-1} p_w - Q \left\{ \ln(2\pi\sigma^2) + 2 \ln \left( \frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \right\} \quad (52)$$

équivalente à (30) pour la stratégie conjointe et :

$$\mathcal{X}_M(q) = -p_w^T \Gamma^{-1} p_w - 2Q \ln \left( \frac{1-\lambda}{\lambda} \right) - \ln(\det(\Gamma)) \quad (53)$$

équivalente à (20) pour la stratégie marginale. Un résultat analogue à l'expression (52) est donné dans [16], mais issu d'une approche fondée sur des calculs algébriques. La propriété de découplage évite, par conséquent, ces développements. Que l'on envisage les stratégies de détection conjointe ou marginale, la recherche des maxima par rapport à  $q$  de  $\mathcal{X}_C(q)$  ou  $\mathcal{X}_M(q)$  conduirait à calculer chacune de ces grandeurs pour  $2^{N_F}$  valeurs possibles du vecteur  $q$ , ce qui s'avère complètement rédhibitoire. Le paragraphe suivant détaille une solution de coût calculatoire plus faible.

#### 3.2.3.2. Étapes fondamentales de l'algorithme EXPULSE itératif EXIT

De façon à éviter toute ambiguïté, emportons-nous de préciser que les conventions d'écriture présentées maintenant concernent uniquement l'*algorithme itératif* et donc ne sont utilisables qu'au sein du § 3.232. A cet effet,  $q_0$  désigne un vecteur de Bernoulli « pivot » (il s'agit tout simplement d'un vecteur d'*initialisation*) et  $q_k$  un vecteur ne différant du vecteur  $q_0$  que par la composante de rang  $k$ . Plus généralement, toute grandeur, matrice, vecteur, scalaire, affublée de l'indice zéro, sera représentative du vecteur-pivot, cependant que la même quantité portant l'indice  $k$  émanera de  $q_k$ . On appelle *voisinage d'un vecteur-pivot*  $\mathcal{U}(q_0)$  l'ensemble des vecteurs de Bernoulli se déduisant du vecteur-pivot par modification d'au plus une de ses composantes. Le vecteur  $q_k$  appartient donc à  $\mathcal{U}(q_0)$ . Un vecteur-pivot étant fixé, on retient le vecteur qui maximise les vraisemblances de détection (*conjointe* ou *marginale*) à l'intérieur du voisinage  $\mathcal{U}(q_0)$ . Le vecteur choisi devient à son tour vecteur-pivot et l'opération se renouvelle, etc. Le parcours d'une itération de l'algorithme, i.e., le choix d'un vecteur dans le voisinage d'un pivot n'est pas trop fastidieux si l'on sait calculer les vraisemblances de tous les vecteurs d'un voisinage à partir de la vraisemblance du pivot. Pour ce faire, on considère les entités suivantes :

$$A \triangleq O_w^T \Gamma^{-1} O_w \quad (54)$$

$$\rho_k \triangleq \sigma^{-2} \varepsilon_k^{-1} + I_k^T A_0 I_k \quad (55)$$

$$z \triangleq O_w^T \Gamma^{-1} p_w \quad (56)$$

D'après (56) et (23), on note que  $z$  est relié à l'estimateur du vecteur signal  $s$  par la relation :

$$\hat{s} = Rz \quad (57)$$

où  $R$  désigne, en continuité avec nos conventions, la matrice de covariance de  $s$  conditionnellement à  $q$ .  $\varepsilon_k$  vaut  $\pm 1$  selon la différence existante entre la composante de rang  $k$  de  $q_k$  et celle du vecteur-pivot. On a dans ces conditions :

$$R_k = R_0 + \sigma^2 \varepsilon_k I_k I_k^T \quad (58)$$

$$\Gamma_k = \Gamma_0 + \sigma^2 \varepsilon_k O_w I_k I_k^T O_w^T \quad (59)$$

Eu égard à la similitude des vraisemblances (52) et (53), on introduit la vraisemblance générique  $\mathcal{X}_Y(q)$  dont l'indice  $Y$  est égal à  $C$  ou  $M$  qui revêt la forme :

$$\mathcal{X}_Y(q) = -p_w^T \Gamma^{-1} p_w + \mathcal{W}_Y(q) \quad (60)$$

où  $\mathcal{W}_Y(q)$  est un terme complémentaire dont l'identification ne pose aucune difficulté à partir de (60), (52) et (53). Le lemme d'inversion matricielle, [8], appliquée à (59), la prise en charge des relations (54, 55, 56, 58, 60) conduisent aux étapes constitutives d'EXPULSE itératif EXIT :

$$c_k \triangleq A_0 I_k \quad \text{Exit 1}$$

$$\rho_k \triangleq \sigma^{-2} \varepsilon_k^{-1} + I_k^T c_k \quad \text{Exit 2}$$

$$z_k = z_0 - c_k \rho_k^{-1} (I_k^T z_0) \quad \text{Exit 3}$$

$$A_k = A_0 - c_k \rho_k^{-1} c_k^T \quad \text{Exit 4}$$

$$\mathcal{X}_Y(q_k) = \mathcal{X}_Y(q_0) + z_0^T I_k \rho_k^{-1} I_k^T z_0 + \mathcal{W}_Y(q_k) - \mathcal{W}_Y(q_0) \quad \text{Exit 5}$$

La mise à jour de  $\mathcal{W}_C(q_k)$  est immédiate à partir de (53); celle de  $\mathcal{W}_M(q_k)$  s'avère plus délicate : elle repose sur l'identité :

$$\det(T_k) = \det(\Gamma_0) \sigma^2 \varepsilon_k \rho_k = \det(\Gamma_0) (1 + \sigma^2 \varepsilon_k \rho_k) \quad \text{Exit 6}$$

où  $\rho'_k = I_k^T c_k$

La relation Exit 6 est démontrée dans l'annexe A1.

## 4. Simulations

L'objectif des présentes simulations est double. Il s'agit tout d'abord de mettre en exergue le comportement d'EXPULSE itératif EXIT, au fur et à mesure que le rapport signal sur bruit se dégrade, de façon à repérer un seuil empirique de « décrochement » de l'algorithme, dans un cadre de travail bien défini, comparable au seuil bien connu des algorithmes fondés sur la décomposition en valeurs singulières, MUSIC, la Norme minimale etc, [8]. La seconde motivation de ce paragraphe est de rendre compte du fonctionnement d'EXPULSE récurrent EXPRE. Les résultats des simulations relatives à EXIT figurent sur les planches 1 à 9. Les données se composent de 2 sinus noyés dans un bruit blanc gaussien additif. Les couples (fréquence-réduite, puissance) des 2 raias sont les suivants : (46/256,  $\sqrt{2}$ ) et (47/256, 1). 64 échantillons temporels sont disponibles; il y a donc, au sens de la remarque R1, 64 canaux de résolution de Fourier notés :  $q/64, 0 \leq q \leq 63$ . Cela signifie qu'aucune des deux raias n'est située sur un canal de résolution de Fourier. Le cercle trigonométrique est échantillonner sur 256 canaux fréquentiels, toujours au sens de R1, tant pour la fonction discriminante

pseudo-spectrale de MUSIC que pour EXIT. Chaque planche représente : 1) le périodogramme non lissé, calculé sur les 64 échantillons temporels multipliés par une fenêtre rectangulaire qui sert de point de départ à EXIT, 2) MUSIC dont la fonction discriminante résulte d'un échantillonnage fréquentiel sur 256 points, 3) EXIT. Le rapport signal sur bruit est défini par :  $10 \log_{10}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 / \sigma_B^2)$  où  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  sont les puissances des 2 raies et  $\sigma_B^2$  la puissance du bruit additif. Entre les planches 1 et 9 le RSB varie de 20 à -1 dB. On note le bon comportement d'EXIT qui sépare correctement les raies jusqu'à -0.25 dB, alors que MUSIC décroche autour de 3 dB, ce qui correspond d'ailleurs au seuil habituel [10]. La planche 10 fait état du comportement moins satisfaisant de la version récurrente EXPRE, qui présente néanmoins l'intérêt évident, il a été construit pour cela, de fournir une analyse au gré du balayage des différents canaux fréquentiels, ce qui s'avère crucial voire stratégique dans les contextes Radar ou Sonar par exemple. Testé dans les mêmes conditions de travail qu'EXIT, mêmes sinusoïdes, etc, et pour 3 valeurs du RSB : 20, 7, 2 dB, EXPRE « décroche » autour de 7 dB, voir planche 10.

#### Indications concernant la calibration des courbes.

La puissance moyenne de la fenêtre rectangulaire utilisée vaut 1, ce qui permet théoriquement d'évaluer la puissance des sinusoïdes par calcul de l'aire sous le pic qui leur correspond dans le périodogramme [8]. D'autre part, il est rappelé que les valeurs de la fonction discriminante déterminée lors de la mise en œuvre de l'algorithme MUSIC n'ont pas d'interprétation particulière en relation avec les amplitudes des raies inconnues [8] : il s'agit seulement d'une fonction de localisation des fréquences; l'estimation des amplitudes repose ensuite sur une approche par moindres carrés, à partir du modèle (1); cette fonction ne requiert donc aucune calibration. Le graphe relatif à EXPULSE pour finir, restitue des impulsions aux fréquences estimées dont les amplitudes sont compatibles avec les hypothèses : puissances des raies égales à 1 et  $\sqrt{2}$ .

## 5. Conclusion

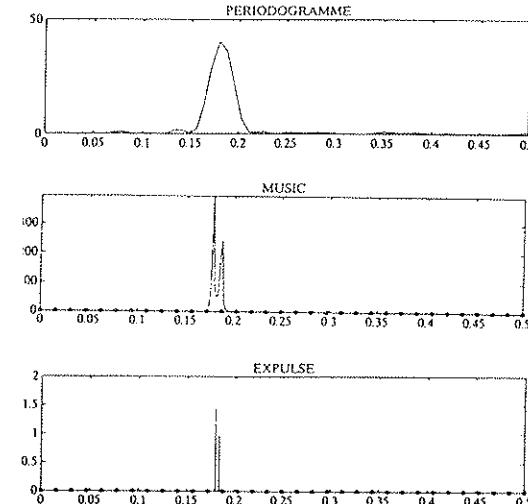
La méthode EXPULSE introduit de nouveaux principes en analyse paramétrique de sinusoïdes : les informations a priori indispensables à l'atteinte d'une haute résolution, sans augmenter considérablement le nombre d'échantillons mesurés, sont directement introduites dans l'espace-fréquence. En présence de sinusoïdes, le périodogramme est modélisé comme un opérateur de convolution bruité agissant sur la densité spectrale estimée, considérée comme un processus stochastique Bernoulli-gaussien. Cette démarche apparaît comme le pendant du *prolongement temporel* d'un signal. Elle se qualifie de *comblement fréquentiel*, puisqu'elle est mise en application dans l'espace conjugué de

l'espace-temps par transformée de Fourier. Les canaux fréquentiels où le processus de Bernoulli prend la valeur 1 sont candidats à l'accueil des raies inconnues, les amplitudes se trouvent contenues dans la composante gaussienne. EXPULSE réalise donc *conjointement la détection* du processus de Bernoulli et l'*estimation* de la partie gaussienne par déconvolution du périodogramme. A cet égard, il pallie la principale limitation de l'analyse spectrale à haute résolution traditionnelle : la faible robustesse vis à vis d'une méconnaissance de la dimension de l'espace signal.

La déconvolution a lieu dans des conditions particulièrement favorables dans la mesure où l'ondelette, issue de la *calibration* du périodogramme est parfaitement connue. La propriété de *découplage* établie à l'aide d'*arguments probabilistes directs* scinde l'optimalité globale en deux tâches complémentaires et séquentielles de détection et d'estimation. Inspirées des algorithmes utilisés en sismique, les versions *récurrentes* EXPRE et *itératives* EXIT d'EXPULSE exhibent des comportements distincts. Fondé sur un traitement par bloc des données, EXIT présente naturellement de meilleures performances qu'EXPRESS. Le seuil de décrochement d'EXIT, en dessous duquel la séparation de 2 raies n'est plus possible est de 0 dB. A titre indicatif, celui de MUSIC joute 5 dB. EXPRE, destiné à la consommation en ligne des canaux fréquentiels présente un intérêt important en Radar-Sonar. Sur un plan pratique et à la différence de MUSIC, de la Norme minimale, de Matrix-Pencil et de Bresler, l'algorithme EXPULSE respecte strictement la *structure* des dispositifs classiques *opérationnels* d'analyse spectrale (*appareils de mesure*) et spatiale (*Radar-Sonar*) [21][22] fondés sur le périodogramme, en se mettant en œuvre en aval de ce dernier. Il doit donc être considéré comme une option supplémentaire à « insérer » afin d'améliorer la résolution lorsque le nombre d'échantillons temporels, en analyse spectrale, et le nombre de capteurs, en traitement d'antenne, se sont avérés somme toute, a posteriori, insuffisants [23]. Une version d'EXIT adaptée aux fluctuations de la loi de répartition des raies, selon les bandes de fréquence du périodogramme, fondée sur une régularisation par un processus Bernoulli-gaussien non uniforme, asservi à une statistique de Fermi-Dirac, a d'ores et déjà été développée [8]; robustesse et régime transitoire de l'algorithme s'en trouvent considérablement améliorés. Pour finir, EXIT a été appliqué avec succès à l'estimation de fréquences instantanées en étendant les idées du présent article au spectrogramme [24].

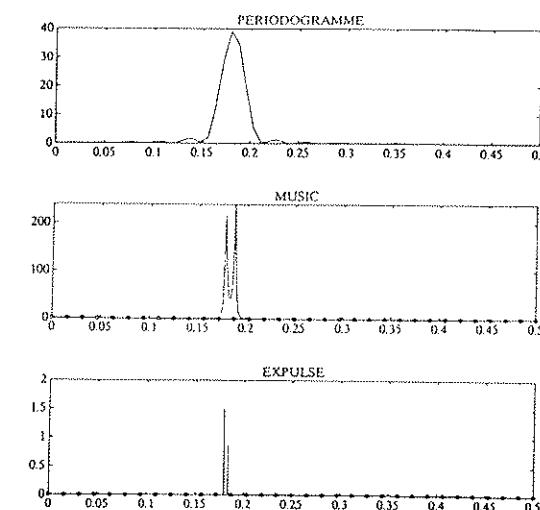
Pour se rapprocher du théorème (3), déconvoler le périodogramme lissé serait plus judicieux. D'autre part, la même idée d'ajout d'information dans l'espace fréquence pourrait être appliquée à la déconvolution de la transformée de Fourier des données plutôt que celle du périodogramme. L'information phase se trouve maintenue dans cet espace de représentation, ce qui n'est pas le cas pour le périodogramme ! Des travaux ont été entrepris dans ce sens là.

Planche 1. – RSB = 20 dB. 2 raies : (position, puissance) = (46/256,  $\sqrt{2}$ ) et (47/256, 1) aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier. Nombre d'échantillons temporels : N = 64. Canaux de résolution de Fourier : q/64, 0 ≤ q ≤ 63. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE itératif EXIT) : k/256, 0 ≤ k ≤ 255.



Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 2. – RSB = 10 dB. 2 raies : (position, puissance) = (46/256,  $\sqrt{2}$ ) et (47/256, 1) aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier. Nombre d'échantillons temporels : N = 64. Canaux de résolution de Fourier : q/64, 0 ≤ q ≤ 63. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE itératif EXIT) : k/256, 0 ≤ k ≤ 255.

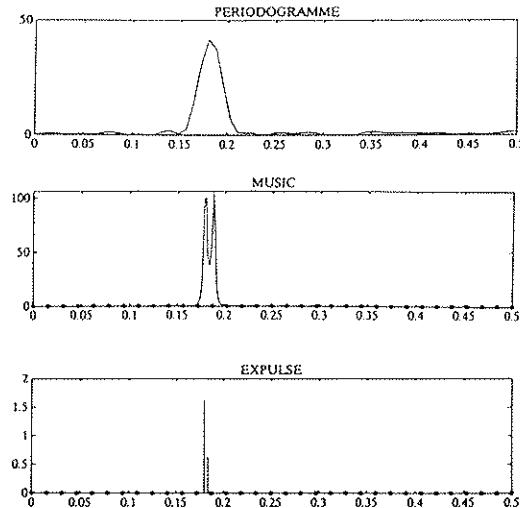


Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

# R<sub>e</sub>cherches

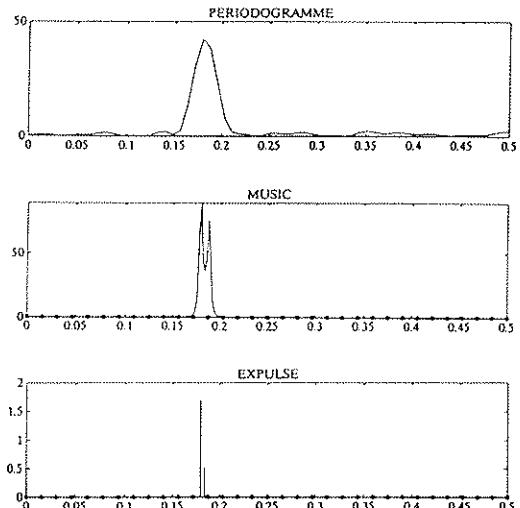
Une méthode d'analyse de sinusoïdes complexes

Planche 3. – RSB = 7 dB. 2 raies : (position, puissance) = (46/256,  $\sqrt{2}$ ) et (47/256, 1) aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier.  
Nombre d'échantillons temporels : N = 64. Canaux de résolution de Fourier : q/64, 0 ≤ q ≤ 63. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) : k/256, 0 ≤ k ≤ 255.



Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 4. – RSB = 5 dB. 2 raies : (position, puissance) = (46/256,  $\sqrt{2}$ ) et (47/256, 1) aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier.  
Nombre d'échantillons temporels : N = 64. Canaux de résolution de Fourier : q/64, 0 ≤ q ≤ 63. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) : k/256, 0 ≤ k ≤ 255.

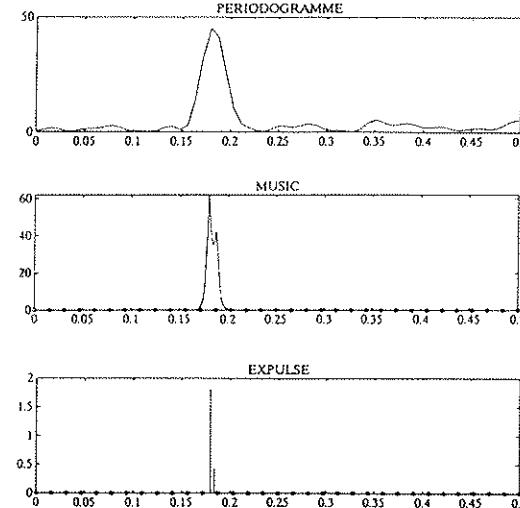


Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

# R<sub>e</sub>cherches

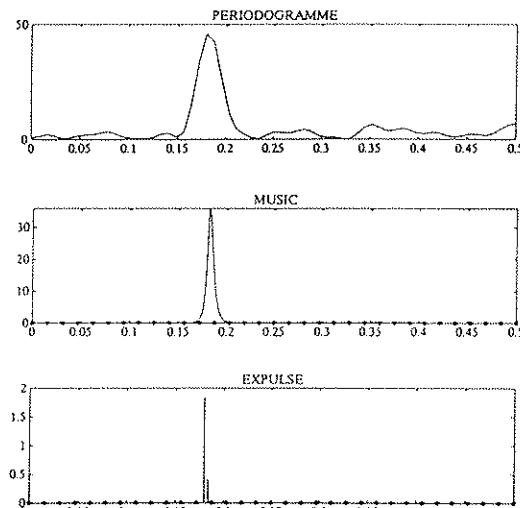
Une méthode d'analyse de sinusoïdes complexes

Planche 5. – RSB = 2 dB. 2 raies : (position, puissance) = (46/256,  $\sqrt{2}$ ) et (47/256, 1) aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier.  
Nombre d'échantillons temporels : N = 64. Canaux de résolution de Fourier : q/64, 0 ≤ q ≤ 63. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) : k/256, 0 ≤ k ≤ 255.



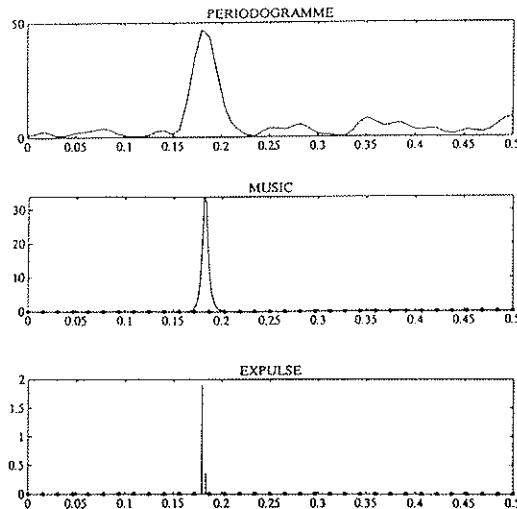
Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 6. – RSB = 1 dB. 2 raies : (position, puissance) = (46/256,  $\sqrt{2}$ ) et (47/256, 1) aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier.  
Nombre d'échantillons temporels : N = 64. Canaux de résolution de Fourier : q/64, 0 ≤ q ≤ 63. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) : k/256, 0 ≤ k ≤ 255.



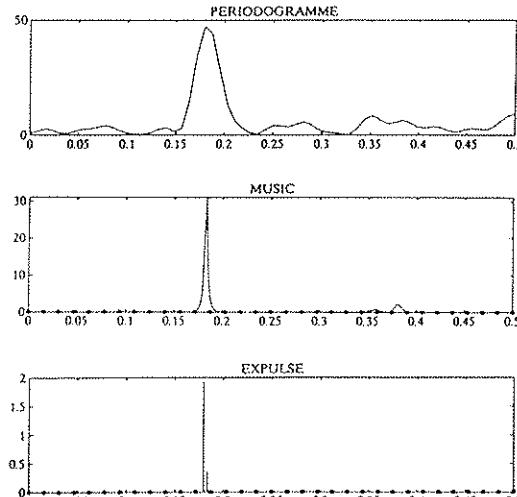
Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 7. – RSB = 0 dB, 2 raies : (position, puissance) =  $(46/256, \sqrt{2})$  et  $(47/256, 1)$  aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier.  
 Nombre d'échantillons temporels : N = 64. Canaux de résolution de Fourier :  $q/64, 0 \leq q \leq 63$ . Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) :  $k/256, 0 \leq k \leq 255$ .



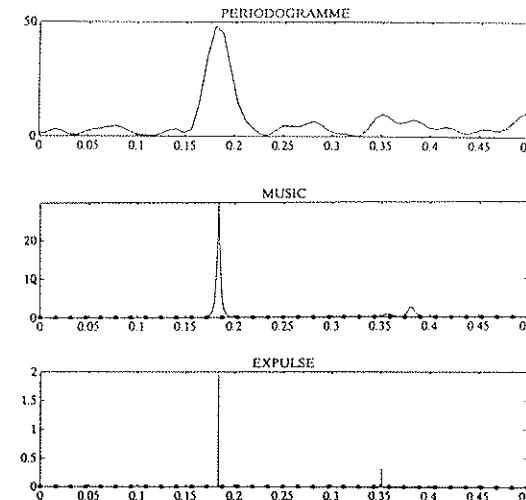
Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 8. – RSB = 0.25 dB, 2 raies : (position, puissance) =  $(46/256, \sqrt{2})$  et  $(47/256, 1)$  aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier.  
 Nombre d'échantillons temporels : N = 64. Canaux de résolution de Fourier :  $q/64, 0 \leq q \leq 63$ . Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) :  $k/256, 0 \leq k \leq 255$ .



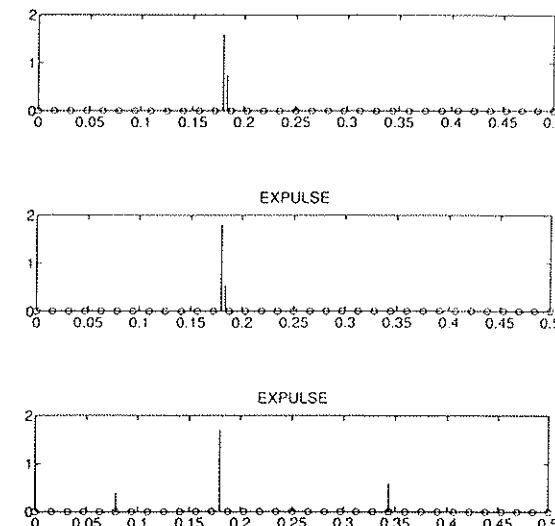
Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 9. – RSB = -1 dB, 2 raies : (position, puissance) =  $(46/256, \sqrt{2})$  et  $(47/256, 1)$  aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier.  
 Nombre d'échantillons temporels : N = 64. Canaux de résolution de Fourier :  $q/64, 0 \leq q \leq 63$ . Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) :  $k/256, 0 \leq k \leq 255$ .



Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 10. – Expulse recurrent : Expre. 2 raies : (position, puissance) =  $(46/256, \sqrt{2})$  et  $(47/256, 1)$  de haut en bas le RSB vaut : 20 dB, 7dB, 2dB  
 Nombre d'échantillons temporels : N = 64. Canaux de résolution de Fourier :  $q/64, 0 \leq q \leq 63$ . Canaux fréquentiels :  $k/256, 0 \leq k \leq 255$ .



Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.O. SCHMIDT, A Signal Subspace Approach to Multiple Emitter Location and Spectral estimation, *Ph. D. Dissertation*, Stanford University, 1981.
- [2] R. KUMARESAN, « On the zeros of the linear prediction error filter for deterministic signals », *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-32, 1983, pp. 217-220.
- [3] Y. HUA, « Matrix pencil method and its performance », *Proc. of ICASSP-88*, April 1988.
- [4] Y. BRESLER, « Exact maximum Likelihood Estimation of Superimposed Exponential Signals in Noise », *Int. Conf. Acoust. Speech Signal Proc.*, Tampa, Fla., 1985, pp. 1824-1827.
- [5] C. VAN TREES, *Detection, Estimation and Modulation Theory*, Wiley, Part I, New York, 1968.
- [6] B. LEVINE, *Fondements de la Radiotéchnique Statistique*, *Éditions de Moscou*, Tome 2, 1973.
- [7] B. PICINBONO, *Random Signals and Systems*, Prentice Hall, 1993.
- [8] P. DUVAUT, *Traitemet du Signal : Concepts et Applications*, Editions Hermès, Paris, deuxième édition, juin 1994.
- [9] M. AKAIKE, « A new look at Statistical Model Identification », *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-19, December 1974, pp. 716-723.
- [10] S. KAY, *Modern Spectral estimation Theory and Applications*, Prentice Hall, New York, 1987.
- [11] HERO and KIM, « Simultaneous Detection and Classification Under a False Alarm constraint », *Proc. of ICASSP*, Albuquerque, 1990, pp. 2759-2762.
- [12] MIDDLETON and AL, « Simultaneous Detection and estimation under Multiple Hypotheses », *IEEE trans. on Inf. Theory*, September 1972, Vol. IT-18, N°5, pp. 607-614.
- [13] G. DEMOMENT, « Déconvolution de Signaux », *Rapport Interne L2S 20/84 et Notes de Cours 3086/85*, École Supérieure d'Électricité, 1985.
- [14] P.D. WELCH, « The use of Fast Fourier Transform for Estimation of the Power Spectra : method based on Time Averaging over Short Modified Periodograms », *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, June 1967, Vol. AU-15, pp. 70-73.
- [15] J. KORMYLO and J. MENDEL, « Maximum Likelihood Detection and Estimation of Bernoulli-Gaussian Processes », *IEEE Trans. on Information Theory*, May 1982, IT-28, N°3, pp. 482-488.
- [16] Y. GOUSSARD, Déconvolution de processus aléatoires non-gaussiens par maximisation de vraisemblances. *Thèse de Doctorat*, Université d'Orsay, 1989.
- [17] Y. GOUSSARD et G. DEMOMENT, « Détection-estimation récursive rapide de séquences Bernoulli-gaussiennes », *Revue Traitement du Signal*, 1987, Vol. 4, N°5, pp. 377-388.
- [18] Y. GOUSSARD, G. DEMOMENT et J. IDIER, « A new algorithm for iterative deconvolution of sparse spike trains », *Proc. of ICASSP*, 1990, pp. 1547-1550.
- [19] P. BREMAUD, *Introduction aux Probabilités*, Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [20] J.C. RADIX, *Filtrage et Lissage Statistiques Optimaux Linéaires*, Cepadues Editions, Paris, 1984.
- [21] F. le CHEVALIER, *Principes de Traitement des Signaux Radar et Sonar*, Masson, Paris, 1989.
- [22] M. BOUVET, « Tendances en traitements Sonar », *Revue Traitement du Signal*, 1993, Vol. 10, N°2, pp. 139-151.
- [23] P. DUVAUT, E. DOLIGEZ, D. GARREAU, « Amélioration de la résolution d'une antenne par déconvolution de la fonction d'ambiguïté », *Rapport interne THOMSON-DEM*, Société KURTOSIS pour THOMSON-DEM, juin 1994.
- [24] P. DUVAUT, D. DUBLANCHET, C. JORAND, « Méthodes Bayésiennes dans le plan temps-fréquence », *rapport interne ETIS*, septembre 1994.

## 6. Annexes

### A.I. DÉMONSTRATION DU RÉSULTAT EXIT 6

Exit 6 s'obtient en notant dans un premier temps et à partir de (59) que :

$$\Gamma_k = \Gamma_0(I + \Gamma_0^{-1}ww^T) \quad (\text{A.1})$$

sous réserve que  $\Gamma_0$  soit inversible et où :

$$w = \sigma \sqrt{\varepsilon_k} O_w I_k \quad (\text{A.2})$$

On remarque ensuite que la matrice  $\Gamma_0^{-1}ww^T$  est de rang 1, de valeur propre non nulle :  $w^T \Gamma_0^{-1}w$  car :

$$(\Gamma_0^{-1}ww^T)^2 = (w^T \Gamma_0^{-1}w) \Gamma_0^{-1}ww^T \quad (\text{A.3})$$

La dernière étape qui conduit à exit 6 tient compte du fait que le déterminant d'une matrice diagonalisable est égal au produit de ses valeurs propres.

### LES AUTEURS

#### Patrick DUVAUT



Ancien élève de l'ENS de Cachan, agrégé de Sciences Physiques en 1981, Docteur en Sciences de la Faculté d'Orsay en 1987. Habilité à diriger des Recherches en 1991, Patrick DUVAUT est professeur des Universités à l'ENSEA. Il est responsable du DEA TTS de Cergy et co-responsable de l'équipe ETIS. Ses principaux thèmes de recherche concernent les statistiques d'ordre élevé, les méthodes bayésiennes appliquées à l'analyse spectrale, le Traitement d'Antenne, le filtrage non linéaire et l'estimation de fréquences instantanées.

Animateur du Conseil Scientifique de la société Kurtosis, il co-dirige la collection TS des éditions Hermès.

#### Frédéric DUBLANCHET



Frédéric Dublanchet est diplômé de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses Applications (ENSEA), spécialité Analyse et Traitement du Signal, promotion 1992. Après validation en 1993 du DEA Automatique et Traitement du Signal de l'Université de Paris-Sud, il prépare actuellement une thèse de doctorat sur la contribution des approches bayésiennes inverses à l'analyse spectrale et au traitement d'antenne.

Manuscrit reçu le 12 janvier 1994.

## CHAPITRE V

# ESTIMATION PAR MODÈLE BERNOULLI-GAUSSIEN ÉTENDU

C E CHAPITRE est consacré à l'extension des principes de la déconvolution Bernoulli-Gaussienne aux problèmes de l'estimation spectrale et de la goniométrie en TA. Il sera abordé dans le contexte de l'analyse spectrale de raies pures, bien que les développements qui suivent se transposent sans difficulté au problème de la localisation de sources, en vertu de l'analogie établie dans le chapitre I. Compte tenu des dernières remarques du chapitre IV, l'exploitation du modèle BG, *discret* par sa composante de Bernoulli, exige une étape de discrétisation ou quantification de l'espace des solutions continues. Celle-ci sera envisagée, ainsi qu'un prolongement analytique du modèle d'observation au voisinage de l'espace discrétisé dans le but de restituer une solution dans un *continuum*, et par conséquent de lever le principal inconvénient du processus de Bernoulli qui positionne toute raie cherchée sur un ensemble discret. Il n'en demeure pas moins que la nature discrète de ce modèle constitue un avantage d'un point de vue formel et algorithmique, dont nous tirons parti : elle permet de transformer le problème de recherche de raies en un problème d'exploration combinatoire et d'utiliser, à cet effet, les techniques efficaces développées dans le cadre de la déconvolution d'impulsions. À la différence du chapitre précédent fondé sur la périodogramme, les développements sont ici proposés sur la base de représentations *exhaustives* des observations.

## 1 Représentations équivalentes des données

Dans ce paragraphe, nous envisageons deux représentations strictement équivalentes des données observées. La représentation temporelle est la plus naturelle. La représentation duale dans l'espace de Fourier présente, quant à elle, l'avantage de mettre clairement en évidence l'analogie structurelle du problème avec celui de la déconvolution d'impulsions. En effet, le modèle qui lui est associé s'interprète comme un produit de convolution du spectre impulsionnel des raies complexes par une fonction spectrale connue, repré-

tative de la distorsion des mesures. Le choix de l'une ou l'autre représentation dépendra de la structure des modèles associées à chacune d'elles, selon les besoins ou les exigences de la mise en œuvre algorithmique.

### 1.1 Représentation temporelle

On dispose de  $N$  données temporelles  $y[n]$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  issues de la superposition d'un nombre inconnu  $P$  de sinusoïdes complexes corrompues par un bruit  $b[n]$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  blanc gaussien complexe circulaire, de moyenne nulle, de variance  $\sigma_b^2$  et indépendant des sinusoïdes :

$$y[n] = \sum_{p=1}^P A_p e^{j2\pi\nu_p n} + b[n], \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (\text{V.1})$$

où  $A_p \triangleq a_p e^{j\phi_p}$  désigne l'amplitude complexe associée à la  $p$ -ième sinusoïde. Cette équation d'observation correspond à la relation (I.15) dans laquelle le pas d'échantillonnage est normalisé à l'unité. Les fréquences réduites  $\nu_p$  sont en outre supposées toutes différentes et équiréparties dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Nous écrirons encore la représentation temporelle des observations sous la forme :

$$y[n] = \sum_{p=1}^P A_p e_n(\nu_p) + b[n], \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (\text{V.2})$$

en posant  $e_n(\nu) \triangleq e^{j2\pi\nu n}$ . (V.3)

Cette fonction complexe de la variable réelle  $\nu$  est périodique de période unité.

### 1.2 Représentation fréquentielle

Une représentation strictement équivalente des données temporelles est générée par leur transformée de Fourier discrète (TFD) normalisée<sup>1</sup>, qui est une transformation linéaire et unitaire. Par suite, ses  $N$  coefficients s'expriment selon :

$$\tilde{y}[n] = \sum_{p=1}^P A_p h\left(\frac{n}{N} - \nu_p\right) + \tilde{b}[n], \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (\text{V.4})$$

$$h(\nu) \triangleq e^{-j\pi\nu(N-1)} \sqrt{N} \frac{\operatorname{sinc}(\pi N \nu)}{\operatorname{sinc}(\pi \nu)} \quad (\text{V.5})$$

où  $\operatorname{sinc}(.)$  désigne la fonction sinus cardinal. La relation ci-dessus est aisément obtenue à partir de la définition de la TFD normalisée et de l'équation (V.1). Le bruit  $\tilde{b}$ , TFD de

1. La transformée de Fourier discrète normalisée de la séquence temporelle  $Y[n]$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  est donnée par :  $\tilde{y}[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$  avec  $k = 0, \dots, N-1$

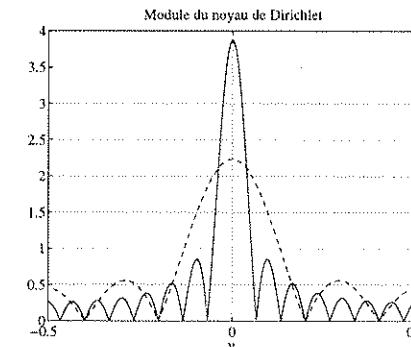


FIG. V.1 - La figure représente le module du noyau de Dirichlet pour  $N = 5$  (en trait discontinu) et  $N = 15$  (en trait plein), tracé sur une période. Le noyau s'annule en les multiples de  $1/N$ , excepté à l'origine.

$b$ , est blanc gaussien complexe circulaire  $\mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$  et indépendant de la partie utile du signal. Enfin, la fonction  $h(\nu)$  s'identifie au noyau de Dirichlet. Celui-ci possède un lobe central dont la largeur à  $-3$  dB limite la résolution spectrale à l'ordre de l'inverse du nombre de données, soit  $1/N$ . Ce n'est autre que le sinus cardinal habituel "périodisé" et de période unité (voir figure V.1).

Les deux représentations (V.2) et (V.4) sont linéaires par rapport aux amplitudes complexes mais non linéaires en fréquence. Le problème, d'égale difficulté dans les deux espaces, s'énonce ainsi : sur la base des  $N$  données (V.2) ou de leur TFD normalisée (V.4), il s'agit d'identifier

- (i) la variable discrète  $P$ ;
- (ii) les  $P$  triplets  $\{\nu_p, a_p, \phi_p\}$  caractérisant chaque sinusoïde.

Il se résoud de la même façon dans les deux espaces. Les seules différences qui peuvent éventuellement apparaître sont d'ordre calculatoire et peuvent conduire à privilégier un espace de résolution par rapport à l'autre, en fonction des aspects de mise en œuvre.

## 2 Discrétisation de l'espace des solutions

La solution fréquentielle  $\nu \triangleq \{\nu_1, \dots, \nu_P\}$  doit être estimée dans un espace  $\mathcal{E}$  continu, borné, de dimension  $P$  :  $\mathcal{E} \triangleq [0, 1]^P$ . D'après les chapitres précédents, la méconnaissance de cette dimension constitue une difficulté majeure du problème. Aussi, nous proposons

de discréteriser cet espace sur une grille  $\mathcal{G}$  de  $N_F$  fréquences discrètes régulièrement espacées sur  $[0, 1]$  depuis l'origine :

$$[0, 1]^P \xrightarrow{\text{discréterisation}} \mathcal{G}^P \triangleq \left\{ 0, \dots, \frac{k}{N_F}, \dots, 1 - \frac{1}{N_F} \right\}^P.$$

Franchir la résolution de Fourier suggère un pas de discréterisation plus fin que  $1/N$ . On choisit alors  $N_F = \alpha N$  avec  $\alpha$  entier  $> 1$ . La grille de fréquences discrètes peut donc être arbitrairement fine, dans des proportions dictées par la valeur de  $\alpha$ . Cette quantification a pour première conséquence d'imposer la contrainte  $P \leq N_F$  et de limiter la recherche des raies à l'ensemble  $\mathcal{G}$  de cardinal fini. Son principal intérêt est de transformer la nature du problème de l'estimation fréquentielle qui devient, en première approximation, celui de l'*exploration* de cet ensemble.

## 2.1 Approximation d'ordre zéro

En effet, considérons le cas où toute fréquence  $\nu_p$  du signal coïncide exactement avec une des fréquences discrètes de la grille :

$$\forall p = 1, \dots, P : \exists k_p \in \{0, \dots, N_F - 1\} / \nu_p = \frac{k_p}{N_F}. \quad (\text{V.6})$$

**Modèle temporel** Sous cette hypothèse, l'équation (V.2) s'écrit :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N_F-1} e_n \left( \frac{k}{N_F} \right) s[k] + b[n], \forall n = 0, \dots, N - 1 \quad (\text{V.7})$$

avec

$$s[k] = \begin{cases} A_p & \text{si } k = k_p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{V.8})$$

**Modèle fréquentiel** De même, l'équation (V.4) devient :

$$\tilde{y}[n] = \sum_{k=0}^{N_F-1} h \left( \frac{n}{N} - \frac{k}{N_F} \right) s[k] + \tilde{b}[n], \forall n = 0, \dots, N - 1 \quad (\text{V.9})$$

où la séquence  $s$  de longueur  $N_F$  est également définie par (V.8). Notons que cette dernière relation s'interprète, à un terme de bruit près, comme un produit de convolution circulaire « généralisé », caractéristique qui tend à rapprocher, au moins dans la structure convolutionnelle de ce modèle, le problème de l'analyse spectrale de celui de la déconvolution.

Au regard des écritures (V.7) et (V.9), il est clair qu'estimer les fréquences  $\{\nu_1, \dots, \nu_P\}$  est équivalent à *localiser* les composantes non nulles de la séquence creuse  $s$ . Néanmoins,

## 2. Discréterisation de l'espace des solutions

l'hypothèse (V.6) qui sous-tend les relations ci-dessus est sujette à caution dans la mesure où la probabilité de l'événement « toutes les fréquences  $\nu_p$  coïncident avec des fréquences discrètes issues de la grille  $\mathcal{G}$  » est nulle. Il est alors naturel d'encadrer la solution  $\nu$  aussi étroitement que possible, ce qui suggère une discréterisation suffisamment fine, fonction du niveau de résolution désiré. Or intuitivement, choisir un ordre  $\alpha$  très élevé a pour conséquence d'augmenter la dimension du problème dans des proportions incompatibles avec une charge de calcul raisonnable. Ce choix n'est donc pas des plus judicieux et il est nécessaire d'envisager une alternative.

### 2.2 Approximation linéaire d'ordre 1

Pour une valeur donnée de  $\alpha$ , il est possible d'obtenir un second niveau d'approximation, fondé sur la remarque suivante : toute fréquence réduite peut être recherchée sous la forme composite

$$\nu_p = \frac{k_p}{N_F} - \delta\nu_p \quad (\text{V.10})$$

où

- $\frac{k_p}{N_F}$  est la fréquence discrète de la grille  $\mathcal{G}$  la *plus proche* de  $\nu_p$  ;

- $\delta\nu_p$  désigne une dérive fréquentielle, symbolisant l'erreur d'approximation : c'est une variable *continue* dont la valeur absolue doit, par définition, rester inférieure au demi-pas de discréterisation, c'est-à-dire  $|\delta\nu_p| < \frac{1}{2N_F}$ .

**Modèle temporel** Partant de (V.10) et (V.2), un pas de discréterisation suffisamment fin autorise un développement limité au premier ordre de la fonction  $e_n(\cdot)$  au voisinage des fréquences discrètes les plus proches. Ce procédé permet alors de reporter la contribution des dérives fréquentielles de façon *linéaire* sur une séquence  $r$  :

$$y[n] \simeq \sum_{k=0}^{N_F-1} e_n \left( \frac{k}{N_F} \right) s[k] + f_n \left( \frac{k}{N_F} \right) r[k] + b[n] \quad (\text{V.11})$$

$$f_n(\nu) \triangleq -\frac{d}{d\nu} e_n(\nu) = -j2\pi n e_n(\nu) \quad (\text{V.12})$$

Les séquences  $r$  et  $s$  sont creuses. En cohérence avec (V.12), leurs composantes non nulles coïncident et sont liées aux dérives fréquentielles selon :

$$r[k_p] = \delta\nu_p s[k_p] \triangleq \delta\nu_p A_p, \quad \forall p = 1, \dots, P. \quad (\text{V.13})$$

**Modèle fréquentiel** De la même façon, un développement limité d'ordre 1 du noyau de Dirichlet au voisinage des fréquences discrètes de la grille  $\mathcal{G}$  permet de reporter la contribution des dérives fréquentielles linéairement sur la même séquence  $\mathbf{r}$ :

$$\tilde{y}[n] \simeq \sum_{k=0}^{N_F-1} h\left(\frac{n}{N} - \frac{k}{N_F}\right) s[k] + g\left(\frac{n}{N} - \frac{k}{N_F}\right) r[k] + \tilde{b}[n] \quad (\text{V.14})$$

$$g(\nu) \triangleq \frac{dh}{d\nu}(\nu) \quad (\text{V.15})$$

où  $s$  et  $r$  sont définies par (V.8) et (V.13).

Sous cette approximation linéaire des modèles temporel et fréquentiel, le problème de l'estimation de l'ensemble  $\boldsymbol{\nu}$  requiert :

1. la **localisation** des composantes non nulles des séquences  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{s}$ ;
2. la détermination des dérives fréquentielles qui repose sur l'**estimation** de ces composantes.

Il s'agit exactement de la démarche méthodologique définie en (III.7). Enfin, la validité d'une telle approximation est évidemment liée à l'ordre de discréttisation  $\alpha$ . A titre indicatif, en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange<sup>2</sup> à l'ordre deux, on montre sans difficulté, dans un cas comme dans l'autre, que l'erreur maximale commise varie en module en  $1/\alpha^2$ .

Le modèle approché (V.14) ainsi obtenu est linéaire par rapport à l'*ensemble de tous les paramètres* cherchés, contenus dans les vecteurs  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{r}$ . Associée à la discréttisation de l'espace des solutions, la linéarisation de l'équation d'observation (V.4) au voisinage de la grille discrète laisse donc l'opportunité d'estimer toute fréquence dans l'intervalle continu  $[0, 1]$ .

### 2.3 Structure des opérateurs à arguments discrets

Les écritures matricielles des relations (V.11) et (V.14) prennent la forme d'un système linéaire par rapport à l'inconnue  $\mathbf{x} = [\mathbf{s}' \mid \mathbf{r}']'$  du problème :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b} \text{ (modèle temporel)} \quad (\text{V.16})$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{b}} \text{ (modèle fréquentiel).} \quad (\text{V.17})$$

Les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}$  sont des opérateurs dont les arguments, fréquences de la grille  $\mathcal{G}$ , sont *discrets*. Leurs propriétés structurelles sont maintenant examinées.

2. Inégalité de Taylor-Lagrange du second ordre: si une fonction  $u(x)$  est deux fois continûment différentiable, alors  $|u(x + \delta x) - u(x) - \delta x \frac{du}{dx}(x)| \leq M_2 \frac{|\delta x|^2}{2}$  où  $M_2 = \sup_x \left| \frac{d^2 u}{dx^2}(x) \right|$

**Modèle temporel**  $\mathbf{A}$  est une matrice partitionnée :  $\mathbf{A} = [\mathbf{E} \mid \mathbf{F}]$ . Les sous-matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  sont de mêmes dimensions ( $N \times N_F$ ) ; leurs termes génériques respectifs se déduisent explicitement des noyaux  $e_n(\nu)$  et  $f_n(\nu)$  :

$$\mathbf{E}_{nk} = e^{j2\pi \frac{nk}{N_F}} \text{ et } \mathbf{F}_{nk} = -j2\pi n e^{j2\pi \frac{nk}{N_F}}$$

où  $n$  ( $0 \leq n \leq N-1$ ) et  $k$  ( $0 \leq k \leq N_F-1$ ) sont respectivement les indices de ligne et colonne. La matrice  $\mathbf{E}$  présente une structure de Vandermonde ; c'est en outre un opérateur de transformée de Fourier inverse. Elle est définie par  $N$  coefficients. La matrice  $\mathbf{F}$  s'exprime en fonction de  $\mathbf{E}$  selon

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} \odot \mathbf{E} \text{ avec } \mathbf{N} \triangleq -j2\pi \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ N-1 & N-1 & \cdots & N-1 \end{bmatrix}$$

où  $\odot$  désigne le produit de Hadamard<sup>3</sup>; au signe près,  $\mathbf{F}$  s'interprète comme un opérateur de dérivée de transformée de Fourier inverse. Remarquons d'autre part que la matrice  $\mathbf{N}$  n'est autre que le produit du vecteur-colonne  $\mathbf{n} \triangleq [0, 1, \dots, N-1]'$  par le vecteur-ligne  $\mathbf{1}'$  de dimension  $N_F$  dont toutes les composantes valent 1 :  $\mathbf{N} = \mathbf{n}\mathbf{1}'$ .

**Modèle fréquentiel** Dans le cas de la représentation fréquentielle, la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  est également partitionnée  $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{H} \mid \mathbf{G}]$ . Les sous-matrices  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{G}$  sont de tailles identiques ( $N \times \alpha N$ ) ; leurs termes génériques respectifs se déduisent des noyaux  $h$  et  $g$ . Ces deux matrices présentent une structure remarquable: ce sont des matrices circulantes-bloc. Ainsi, la matrice  $\mathbf{H}$  se met sous la forme

$$\mathbf{H} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0^t & \mathbf{h}_{N-1}^t & \cdots & \mathbf{h}_1^t \\ \mathbf{h}_1^t & \mathbf{h}_0^t & \cdots & \mathbf{h}_2^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}_{N-1}^t & \mathbf{h}_{N-2}^t & \cdots & \mathbf{h}_0^t \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \mathbf{h}_n \triangleq \left[ h\left(\frac{n}{N}\right) \, h\left(\frac{n}{N} - \frac{1}{\alpha N}\right) \cdots h\left(\frac{n}{N} - \frac{\alpha-1}{\alpha N}\right) \right]^t$$

est un vecteur de taille  $\alpha$  pour tout  $n = 0, \dots, N-1$ . Chaque bloc de taille ( $N \times \alpha$ ) se déduit du précédent par une permutation circulaire. La matrice  $\mathbf{G}$  se met sous une forme strictement identique. Cette structure circulante-bloc résulte de la périodicité du noyau de Dirichlet. Les matrices  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{G}$  sont donc entièrement définies par leurs  $\alpha$  premières colonnes.

3. Produit de Hadamard de deux matrices mêmes dimensions:  $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})_{nk} \triangleq \mathbf{A}_{nk} \mathbf{B}_{nk}$ . C'est un produit commutatif et associatif.

Enfin, les matrices de  $\mathbf{A}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}$  se déduisent l'une de l'autre par une simple transformée de Fourier : les colonnes de  $\mathbf{H}$  ne se sont autres que les TFD normalisées des colonnes de  $\mathbf{E}$ , de même pour  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{F}$  au signe près. La TFD normalisée établit donc une relation de dualité complète entre les deux modèles.

Pour des raisons de simplicité de propos, nous raisonnons désormais sur le modèle temporel (V.16). Les différences qui pourront apparaître quant à la manipulation de l'un ou l'autre des modèles seront mentionnées à chaque fois qu'il sera nécessaire.

### 3 Construction d'une solution bayésienne

#### 3.1 Nécessité d'une solution régularisée

La restauration de  $\mathbf{x}$  à partir des données  $\mathbf{y}$  constitue un problème inverse linéaire (cf. chapitre III). L'inversion de la relation (V.16) n'est pas sans poser de problèmes d'unicité et de stabilité numérique, caractéristique d'un problème mal-conditionné.

En effet, le système (V.16) est surdéterminé : l'unicité de la solution est par conséquent loin d'être garantie. Une approche classique pour aborder ce type de problème est la décomposition tronquée en valeurs singulières de l'opérateur matriciel  $\mathbf{A}$ , dont le but est de construire une solution unique en projetant les observations sur un espace jugé « significatif ».

Partant des propriétés structurelles de l'opérateur matriciel  $\mathbf{A}$ , il est possible d'évaluer analytiquement son spectre de valeurs singulières. Le cas est suffisamment rare pour être souligné ; les calculs sont renvoyés dans l'annexe A. En se référant à la figure V.2, il apparaît alors que le spectre de  $\mathbf{A}$  comporte  $(2\alpha - 1)N$  valeurs singulières nulles : celles-ci expriment le surdimensionnement du système. L'espace propre qui leur est associé, c'est-à-dire le noyau de  $\mathbf{A}$ , ne contient aucune information sur les données observées. On peut alors envisager la solution « inverse généralisée » qui consiste à projeter les observations sur l'espace propre associé aux valeurs singulières non nulles de  $\mathbf{A}$ .

Néanmoins, le rapport entre les valeurs singulières extrêmes différentes de zéro, qui vaut ici  $\sqrt{1 + 4\pi^2(N - 1)^2}$ , rend la solution « inverse généralisée » numériquement instable : celle-ci est donc sujette à caution. On constate d'ailleurs le phénomène suivant : le conditionnement de  $\mathbf{A}$  empire avec un nombre de données plus élevé, c'est-à-dire que l'augmentation du nombre de données ne permet pas de stabiliser la solution « inverse généralisée ». Par conséquent, si l'unicité de cette solution est garantie, sa stabilité numérique n'est en revanche pas assurée. Elle n'est donc pas acceptable. Pour obtenir une solution stable, le problème doit impérativement être régularisé, par exemple en sélectionnant une classe de solutions admissibles : nous proposons la classe des solutions

#### 3. Construction d'une solution bayésienne

impulsionnelles décrite par une famille de processus composites Bernoulli-Gaussien.

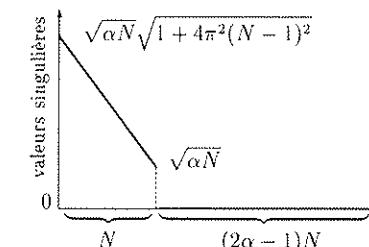


FIG. V.2 - Spectre des valeurs singulières de l'opérateur matriciel  $\mathbf{A}$ . Celui de  $\tilde{\mathbf{A}}$  est rigoureusement identique en vertu de la dualité qui existe entre les deux opérateurs. Propriété remarquable : le rapport entre les valeurs singulières extrêmes différentes de zéro ne dépend que du nombre de données observées ; il est indépendant de l'ordre de discrétisation  $\alpha$ . Ce spectre illustre le caractère mal-conditionné du problème inverse.

#### 3.2 Modélisation BG étendue

D'après le § III 2.2, la discrétisation de l'espace des solutions transforme le problème de l'estimation spectrale en celui de la localisation des composantes non nulles des vecteurs  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{r}$ . Le processus de Bernoulli s'avère par conséquent parfaitement adapté à cette situation : son rôle est de décrire la position de ces composantes non nulles dans les séquences  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{r}$ . S'inscrivant dans un cadre bayésien, la régularisation proposée exige la spécification des distributions de probabilité de toutes les quantités mises en jeu dans le modèle d'observation approché (V.16).

Par hypothèse, le bruit  $\mathbf{b}$  est supposé blanc gaussien complexe circulaire  $\mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$  et indépendant de  $\mathbf{x}$ . D'autre part, la solution  $\mathbf{x}$  est « probabilisée » : considérée comme la réalisation d'un processus Bernoulli-Gaussien complexe, elle est recherchée sous la forme composée  $(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ . Les lois attribuées à chacune de ces grandeurs sont explicitées ci-dessous.

- Les fréquences discrètes où la séquence de Bernoulli  $\mathbf{q}$  de paramètre  $\lambda$  prend la valeur 1 sont, à une dérive fréquentielle près, des raies potentielles :

$$\forall k = 0, \dots, N_F - 1 : \begin{cases} \Pr(\mathbf{q}[k] = 1) = \lambda \\ \Pr(\mathbf{q}[k] = 0) = 1 - \lambda. \end{cases}$$

La densité  $\lambda$  s'interprète comme la probabilité moyenne d'occurrence d'une raie par pas de discrétisation de la grille fréquentielle  $\mathcal{G}$ .

- Le processus gaussien complexe  $s$  modélise l'amplitude complexe des raies. Il est défini conditionnellement à  $q$  selon :

$$(s[k] | q[k] = q) \sim \mathcal{N}(0, q\sigma^2).$$

- Il reste à définir la distribution jointe du couple  $(s, r | q)$ . D'après nos hypothèses, les vecteurs  $s$  et  $r$  sont colinéaires : ils sont asservis à la même séquence de Bernoulli  $q$  et leurs composantes sont liées par la relation (V.13). Conditionnellement à  $q$ , les dérives fréquentielles sont considérées comme des variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, indépendantes des amplitudes complexes et uniformément distribuées sur l'intervalle  $[-\frac{1}{2N_F}, +\frac{1}{2N_F}]$ . Par conséquent, la variable conditionnée  $(r[k] | q[k] = q)$  s'exprime comme le produit de deux variables aléatoires dont l'une est gaussienne complexe circulaire et l'autre réelle uniforme. Sous les hypothèses que nous venons de formuler, on montre que  $(r[k] | q[k] = q)$  et  $(s[k] | q[k] = q)$ , bien que colinéaires – donc « interdépendantes » – sont décorrélées. La colinéarité de  $s$  et  $r$  ne transparaît donc pas à l'ordre deux. En outre, la densité marginale de  $(r[k] | q[k] = q)$  prend la forme d'une expression intégrale dite « intégrale exponentielle » [ABRAMOWITZ & STEGUN 1972, p. 228] :

$$\begin{cases} p_{r[k] | q[k]=q}(r) = \frac{N_F^2}{\pi\sigma^2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \exp\left\{-\frac{4N_F^2[\Re(r)]^2}{\sigma^2} t\right\} dt \\ \quad \cdot \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \exp\left\{-\frac{4N_F^2[\Im(r)]^2}{\sigma^2} t\right\} dt \\ p_{r[k] | q[k]=0}(r) = \delta(r). \end{cases} \quad (\text{V.18})$$

Ces deux derniers résultats sont démontrés dans l'annexe B. La forme analytique (V.18) n'est évidemment pas simple à manipuler. C'est pourquoi, compte tenu de l'approximation du modèle d'observation, il est préférable, à ce stade de la régularisation, de limiter la description statistique de cette variable à ses deux premiers moments. En d'autres termes, on lui substitue une loi normale complexe circulaire de même moyenne et même variance (voir annexe B) :

$$(r[k] | q[k] = q) \sim \mathcal{N}\left(0, q \frac{\sigma^2}{12N_F^2}\right)$$

de façon à conserver un environnement globalement gaussien. Sous cette approximation et compte tenu de la décorrélation des séquences  $s$  et  $r$ , la loi du couple  $(s, r | q)$  est approchée par la gaussienne centrée et de covariance

$$\Gamma(q) = \begin{bmatrix} \sigma^2 \text{diag}\{q\} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{12N_F^2} \text{diag}\{q\} \end{bmatrix}. \quad (\text{V.19})$$

Le modèle *a priori* BG complexe ainsi défini est complètement caractérisé par le processus blanc  $(s, r, q)$  et les lois de probabilité de chacun de ses éléments. D'autre

### 3. Construction d'une solution bayésienne

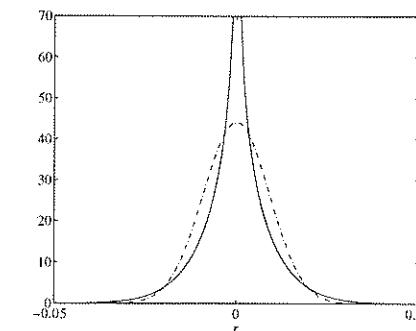


FIG. V.3 - Sur cette figure sont superposées la loi « intégrale exponentielle » (en trait plein) et son approximation gaussienne la plus proche (en trait discontinu). Par commodité, le tracé est restreint à la droite réelle ; il correspond aux valeurs  $N_F = 64$  et  $\sigma^2 = 1$ . La densité de l'intégrale exponentielle est infinie à l'origine.

part, la donnée des deux hyperparamètres  $(\lambda, \sigma^2)$  suffit à énoncer le problème dans un cadre bayésien. Dans [DUBLANCHET et coll. 1995], nous avons proposé un second niveau de régularisation fondé sur une analogie avec la physique statistique. Il permet d'asservir la densité du processus de Bernoulli à une statistique de Fermi-Dirac. En revanche, il introduit des paramètres supplémentaires dont le réglage demeure empirique. De toute façon, ce second niveau de régularisation sort du contexte bayésien. Il ne sera donc pas considéré ici.

Dans la suite, tous les hyperparamètres  $\mathcal{H} \triangleq (\lambda, \sigma^2, \sigma_b^2)$  sont supposés connus ou préalablement estimés. Par souci de clarté, la dépendance des fonctions de vraisemblance relativement à  $\mathcal{H}$  sera implicite. Dans le chapitre suivant, nous proposons une technique consacrée à l'estimation des hyperparamètres, très simple à mettre en œuvre.

### 3.3 Détection-localisation et estimation

L'application de la démarche méthologique évoquée au § III 4 pour la restauration du processus BG conduit aux deux tâches séquentielles suivantes.

- La détection-localisation, c'est-à-dire l'estimation de la séquence de Bernoulli  $q$ , par optimisation de la vraisemblance marginale *a posteriori* de  $q$  :

$$\hat{q} = \arg \max p(q | y) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \arg \max p(y | q) \Pr(q) \quad (\text{V.20})$$

avec, par définition :

$$\Pr(q) = \lambda^p (1 - \lambda)^{N_F - p} \quad (\text{V.21})$$

où  $p$  désigne le nombre de composantes non nulles de la séquence  $\mathbf{q}$ . Compte tenu de la normalité du bruit  $\mathbf{b}$ , de celle des variables  $(\mathbf{s}|\mathbf{q})$  et  $(\mathbf{r}|\mathbf{q})$  et de la linéarité du modèle (V.16),  $(\mathbf{y}|\mathbf{q})$  suit une loi normale complexe circulaire, de moyenne nulle et de covariance donnée par

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}\Gamma(\mathbf{q})\mathbf{A}^\dagger + \sigma_b^2 \mathbf{I}_N \quad (\text{V.22})$$

où  $\Gamma(\mathbf{q})$  est définie par (V.19). La loi de  $(\mathbf{y}|\mathbf{q})$  s'écrit par conséquent :

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{q}) = \frac{1}{\pi^N |\mathbf{B}(\mathbf{q})|} \exp \left\{ -\mathbf{y}^\dagger \mathbf{B}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{y} \right\} \quad (\text{V.23})$$

Il sera préférable, afin d'alléger les calculs, de considérer l'expression logarithmique de la vraisemblance *a posteriori*  $p(\mathbf{q}|\mathbf{y})$  qui, d'après (V.20), (V.21) et (V.23), prend la forme :

$$\mathcal{C}(\mathbf{q}) = -\mathbf{y}^\dagger \mathbf{B}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{y} - \ln |\mathbf{B}(\mathbf{q})| + p \ln \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad (\text{V.24})$$

obtenue après élimination des termes constants. La maximisation de ce critère est examinée dans le paragraphe suivant. Cette première étape fournit un estimateur du nombre de raies en dénombrant les réalisations positives de la séquence de Bernoulli estimée  $\hat{\mathbf{q}}$ . Elle fournit également une estimation des fréquences discrètes les plus proches des raies recherchées.

- A l'étape de détection-localisation succède l'estimation MAP des dérives fréquentielles et des amplitudes complexes afférentes aux fréquences discrètes de la grille  $\mathcal{G}$  localisées par la séquence estimée  $\hat{\mathbf{q}}$ . La solution est explicite en raison de l'environnement linéaire gaussien (cf. §III 4):

$$\hat{\mathbf{x}} = \Gamma(\hat{\mathbf{q}})\mathbf{A}^\dagger \mathbf{B}(\hat{\mathbf{q}})^{-1} \mathbf{y}. \quad (\text{V.25})$$

Les  $\hat{P} \triangleq \sum_k \hat{\mathbf{q}}[k]$  composantes non nulles de chacune des partitions  $\hat{\mathbf{s}}$  et  $\hat{\mathbf{r}}$ , sélectionnées par  $\hat{\mathcal{Q}}_1 = \{\hat{k}_p, p = 1, \dots, \hat{P}\}$ , permettent alors d'estimer les  $\hat{P}$  dérives fréquentielles au sens des moindres carrés selon (voir la relation (V.13)) :

$$\widehat{\delta\nu_p} = \frac{\hat{\mathbf{s}}^\dagger[\hat{k}_p] \hat{\mathbf{r}}[\hat{k}_p]}{|\hat{\mathbf{s}}[\hat{k}_p]|^2}. \quad (\text{V.26})$$

Au terme de cette procédure, on obtient les estimées de tous les paramètres :

$$\hat{P} \triangleq \sum_k \hat{\mathbf{q}}[k] \quad (\text{V.27})$$

$$\widehat{\nu_p} = \frac{\hat{k}_p}{N_F} - \widehat{\delta\nu_p}, \forall p = 1, \dots, \hat{P} \quad (\text{V.28})$$

$$\widehat{A}_p = \hat{\mathbf{s}}[\hat{k}_p], \forall p = 1, \dots, \hat{P}. \quad (\text{V.29})$$

## 4 Mise en œuvre : l'algorithme SMLR

Le problème maintenant posé est celui de la maximisation du critère de localisation donné par (V.24) sur l'ensemble fini des  $2^{N_F}$  configurations possibles de la séquence de Bernoulli  $\mathbf{q}$ . Il s'agit d'un problème d'exploration combinatoire. On ne connaît aucune méthode exacte de recherche de la solution autre que l'exploration exhaustive des  $2^{N_F}$  séquences. Or la nécessité d'une analyse haute résolution et celle de minimiser l'erreur relative à l'approximation linéaire du modèle conduisent à choisir des valeurs élevées de  $N_F$ . De telles valeurs rendent inaccessible une mise en œuvre optimale et il est indispensable de recourir à des techniques de maximisation palliatives qui n'explorent qu'une partie des configurations possibles. L'efficacité de la méthode est alors fonction de la proportion de séquences explorées et de la stratégie d'exploration choisie.

### 4.1 Principes

La technique d'exploration retenue repose une notion de *séquences voisines*. Elle consiste à maximiser le critère de localisation en évoluant de séquence voisine en séquence voisine. Trois principaux facteurs influent sur le comportement et l'efficacité pratique d'une telle procédure : (i) la définition du voisinage; (ii) la stratégie adoptée pour parcourir le voisinage de la séquence courante et sélectionner la nouvelle séquence; (iii) l'existence de formules numériquement peu coûteuses liant les valeurs des critères de deux séquences voisines. D'un point de vue pratique, une telle procédure ne produit de résultats fiables que si elle est bien conditionnée, c'est-à-dire si, pour toute séquence initiale, il existe une suite (nécessairement finie car  $\mathbf{q}$  ne peut prendre qu'un nombre fini de configurations) de séquences voisines les unes des autres, dont les critères forment une suite croissante, et qui converge vers une solution proche de celle qui correspond au maximum global du critère.

Si l'on choisit pour voisinage de la séquence courante  $\mathbf{q}_0$  l'ensemble  $\mathcal{V}(\mathbf{q}_0)$  des  $N_F$  séquences  $\mathbf{q}_k$ ,  $k = 1, \dots, N_F$ , qui en diffèrent par au plus un échantillon :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}_0) = \{\mathbf{q}_k / \mathbf{q}_k[k] = 1 - \mathbf{q}_0[k] \text{ et } \mathbf{q}_k[i] = \mathbf{q}_0[i] \forall i \neq k\}$$

et si l'on sélectionne la nouvelle séquence comme celle qui maximise le critère sur la totalité du voisinage de la séquence courante, on aboutit aux techniques de type SMLR (Single Most Likely Replacement) initialement proposées par KORMYLO et MENDEL [KORMYLO & MENDEL 1982, MENDEL 1983]. Une telle procédure s'arrête automatiquement quand aucune séquence du voisinage n'améliore le critère, après un nombre nécessairement fini d'itérations. Notons qu'il existe essentiellement deux versions plus récentes [GOUSSARD et coll. 1990, IDIER & GOUSSARD 1993][CHAMPAGNAT et coll. 1996] de l'algorithme SMLR, qui diffèrent l'une de l'autre par les quantités auxiliaires utilisées. Ces

versions présentent les avantages d'être simples et de se prêter à des mises en œuvre numériquement efficaces. Elles réalisent un compromis intéressant entre une faible complexité numérique et l'obtention de résultats significatifs. Nous proposons ici une adaptation de la première version [GOUSSARD et coll. 1990, IDIER & GOUSSARD 1993] à notre problème. La seconde sera présentée dans le chapitre VI.

## 4.2 L'algorithme

Les équations de l'algorithme SMLR sont détaillées ci-après. Dans la suite, toute quantité indiquée par  $k$  est relative à la séquence  $\mathbf{q}_k$ ; les quantités non indiquées se rapportent à une séquence générique  $\mathbf{q}$  quelconque. Il s'agit d'établir la relation qui lie les valeurs du critère (V.24)  $\mathcal{C}(\mathbf{q}_0)$  et  $\mathcal{C}(\mathbf{q}_k)$  relatives à deux séquences voisines  $\mathbf{q}_0$  et  $\mathbf{q}_k$ , au sens du voisinage défini ci-dessus. A cet effet, deux quantités auxiliaires sont introduites :

$$\mathbf{D} \triangleq \mathbf{A}^\dagger \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{u} \triangleq \mathbf{A}^\dagger \mathbf{B}^{-1} \mathbf{y}.$$

On définit également les quantités suivantes :

- le scalaire  $\varepsilon_k$  qui vaut +1 ou -1 selon respectivement que 1 est ajouté ou enlevé de la séquence courante  $\mathbf{q}_0$  au site  $k$ .
- le vecteur  $\mathbf{v}_k$  de taille  $N_F$  dont toutes les composantes sont nulles sauf la  $k$ -ième qui vaut 1.

D'après (V.22), la matrice de covariance  $\mathbf{B}_k$  se déduit de  $\mathbf{B}_0$  selon :

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{B}_0 + \varepsilon_k \mathbf{A} \mathbf{V}_k \boldsymbol{\Pi} \mathbf{V}_k^t \mathbf{A}^\dagger \quad (\text{V.30})$$

avec :

$$\mathbf{V}_k \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{v}_k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Pi} \triangleq \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{12N_F^2} \end{bmatrix}$$

En appliquant le lemme d'inversion matricielle (D.1) à (V.30), il vient :

$$\mathbf{B}_k^{-1} = \mathbf{B}_0^{-1} - \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V}_k \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{V}_k^t \mathbf{A}^\dagger \mathbf{B}_0^{-1} \quad (\text{V.31})$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_k \triangleq \varepsilon_k \boldsymbol{\Pi}^{-1} + \mathbf{V}_k^t \mathbf{A}_0 \mathbf{V}_k. \quad (\text{V.32})$$

On en déduit immédiatement les formules de mise à jour du premier terme  $\mathbf{y}^\dagger \mathbf{B}^{-1} \mathbf{y}$  du critère et des quantités auxiliaires  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{y}^\dagger \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\dagger \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{V}_k \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{V}_k^t \mathbf{u}_0 \quad (\text{V.33})$$

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{D}_0 - \mathbf{D}_0 \mathbf{V}_k \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{V}_k^t \mathbf{D}_0 \quad (\text{V.34})$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0 - \mathbf{D}_0 \mathbf{V}_k \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{V}_k^t \mathbf{u}_0. \quad (\text{V.35})$$

## 4. Mise en œuvre : l'algorithme SMLR

Il reste maintenant à établir l'équation de mise à jour du critère complet, ce qui nécessite une relation entre les déterminants de  $\mathbf{B}_k^{-1}$  et  $\mathbf{B}_0^{-1}$ . Pour ce faire, on fait appel au résultat suivant, dont une démonstration peut être trouvée dans [LASCAUX & THEODOR 1987]

**Théorème 1** Soient deux matrices carrées  $(n \times n)$   $\mathbf{M}_0$  et  $\mathbf{M}_1$  liées par une relation du type :  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_0 + \mathbf{T} \mathbf{S}^\dagger$  où  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{S}$  sont de tailles respectives  $(n \times m)$  et  $(m \times m)$  avec  $m \leq n$ .

Alors si  $\mathbf{M}_0$  est inversible, leurs déterminants vérifient  $|\mathbf{M}_1| = |\mathbf{M}_0| |\mathbf{I} + \mathbf{S}^\dagger \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{T}|$ .

L'application de ce résultat à (V.30) conduit à :

$$|\mathbf{B}_k| = |\mathbf{B}_0| |\boldsymbol{\Sigma}_k| \frac{\sigma^4}{12N_F^2} \quad (\text{V.36})$$

d'où l'on déduit, en utilisant (V.33), la formule de mise à jour du critère de localisation selon :

$$\mathcal{C}(\mathbf{q}_k) = \mathcal{C}(\mathbf{q}_0) + \mathbf{u}_0^\dagger \mathbf{V}_k \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{V}_k^t \mathbf{u}_0 - \ln \left( \frac{\sigma^4}{12N_F^2} |\boldsymbol{\Sigma}_k| \right) + \varepsilon_k \ln \frac{\lambda}{1-\lambda}. \quad (\text{V.37})$$

Notons que l'estimation (V.25) est un sous-produit de l'algorithme :  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{q}}) \hat{\mathbf{u}}$ . Enfin, ce procédé de maximisation sous-optimale garantit seulement la convergence vers un optimum local qui est néanmoins satisfaisant dans de nombreuses situations pratiques.

**Initialisation et complexité de mise en œuvre** L'algorithme est initialisé par la séquence nulle car aucun argument autre que calculatoire ne favorise *a priori* l'une des  $2^{N_F}$  séquences possibles, sauf la séquence nulle pour laquelle le calcul du critère est immédiat :  $\mathcal{C}(\mathbf{q}_0 = 0) = -\mathbf{y}^\dagger \mathbf{y} / \sigma_b^2 - N \ln(\sigma_b^2)$ . Elle évite la recherche d'une solution initiale satisfaisante comme dans la technique de maximisation par projections alternées [ZISKIND & WAX 1988]. La phase d'initialisation requiert le calcul de  $\sigma_b^{-2} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$  et  $\sigma_b^{-2} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}$ , dont le coût peut être réduit en exploitant la structure remarquable de l'opérateur  $\mathbf{A}$ . Les propriétés qui suivent sont démontrées dans l'annexe A.2.

- La quantité  $\mathbf{E}^\dagger \mathbf{y}$  n'est autre que la TFD du signal évaluée en les  $N_F$  fréquences discrètes de la grille  $\mathcal{G}$ . De plus,  $\mathbf{F}^\dagger \mathbf{y}$  se déduit de la TFD du produit de Hadamard  $\mathbf{n} \odot \mathbf{y}$ . Si  $N_F$  est une puissance de deux, alors on peut utiliser les algorithmes de transformée de Fourier rapide pour calculer  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}$ .
- D'autre part, on montre que  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$  (cf. (A.10)), de dimension  $(N_F \times N_F)$ , est une matrice *bloc-circulaire et hermitienne*. L'espace mémoire nécessaire à son stockage est dans ce cas réduit de  $\mathcal{O}(4N_F^2)$  à  $\mathcal{O}(3N_F)$ . Le calcul des trois colonnes qui la

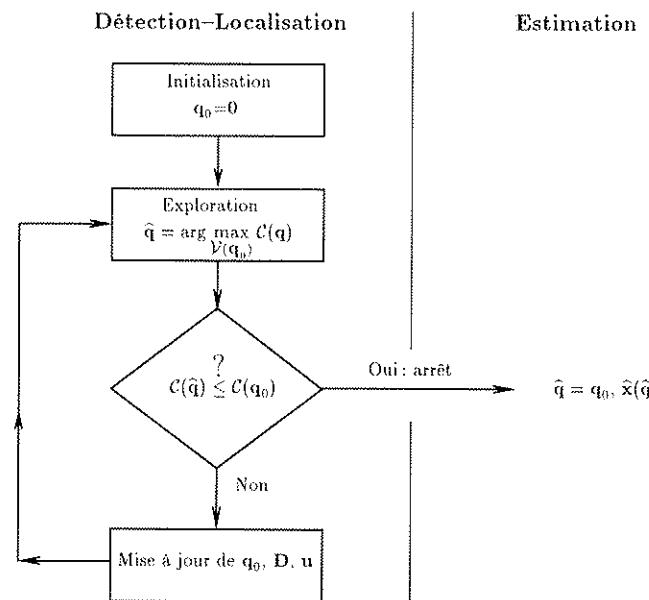


FIG. V.4 - Principes de l'algorithme SMLR et de la méthode.

définissent entièrement peut être effectué par transformée de Fourier. La charge de calcul correspondante à la matrice  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$  est en  $\mathcal{O}(3NN_F)$  et peut être encore réduite en utilisant la TF rapide.

Enfin, le modèle fréquentiel (V.17) jouit exactement des mêmes propriétés.

On remarque que la phase d'initialisation effectuée, seules les quantités auxiliaires  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{u}$  résument les états nécessaires au fonctionnement de l'algorithme et propagent l'information contenue dans les données puisque la matrice  $\mathbf{A}$  et les observations  $\mathbf{y}$  n'interviennent plus directement dans les équations de l'algorithme. L'étape numériquement la plus coûteuse reste la mise à jour de  $\mathbf{D}$ , cette dernière étant de l'ordre de  $\mathcal{O}(4N_F^2)$  multiplications complexes. Malheureusement, les propriétés de circularité de  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$  ne se propagent pas à  $\mathbf{D}$  et celle-ci ne présente aucune structure remarquable (excepté son caractère hermitien) susceptible d'être exploitée afin de réduire le coût de sa mise à jour. L'exploration du voisinage entier, quant à elle, a une complexité plus faible de l'ordre de  $\mathcal{O}(N_F)$  multiplications complexes. On remarquera pour finir que les expressions telles que  $\mathbf{D}_0 \mathbf{V}_k$  et  $\mathbf{V}_k^\dagger \mathbf{u}_0$  ne nécessitent aucune opération numérique.

## 5. Résultats de simulations

Pour conclure, la structure de l'algorithme SMLR ne permet pas de privilégier *a priori* l'une des deux représentations car celles-ci permettent de réaliser sensiblement les mêmes économies de calcul et d'encombrement mémoire. Notons simplement que la représentation temporelle est la plus naturelle et de surcroit évite le calcul de la transformée de Fourier des données et du noyau de Dirichlet.

## 5 Résultats de simulations

Quelques résultats de simulations sont maintenant présentés. Ils sont réalisés sur des données synthétiques, issues d'un exemple emprunté à [KAY & MARPLE 1981, p. 436] et [BRESLER & MACOVSKI 1986], souvent considéré comme référence. Le signal, composé de 25 échantillons, est constitué de deux raies pures espacées d'une demi-résolution de Fourier, de sorte que toute méthode exclusivement fondée sur la transformée de Fourier (périodogramme, corrélogramme) ne peut les séparer :

$$\begin{aligned} y[n] &= \exp(j2\pi\nu_1 n) + \exp(j2\pi\nu_2 n + j\pi/4) + b[n], \quad n = 0, \dots, 24. \\ \nu_1 &= 0,50 \\ \nu_2 &= 0,52. \end{aligned}$$

Le bruit additif  $b[n]$  est stationnaire, blanc gaussien complexe circulaire, de moyenne nulle et de variance  $\sigma_b^2$ . Pour être comparée, la méthode présentée dans ce chapitre doit être mise en concurrence d'une part, avec les techniques consacrées uniquement à l'estimation du nombre de raies et d'autre part, avec les méthodes de localisation HR qui fonctionnent à nombre de raies fixé *a priori*. Parmi les estimateurs de référence, nous avons retenu :

- les critères classiques AIC et MDL pour la *détection* ;
- la méthode de type « sous-espace » ESPRIT et la technique du maximum de vraisemblance déterministe (MVD) pour l'aspect *localisation* (voir chapitre II).

Les performances de détection et de localisation sont évaluées en fonction du rapport signal-à-bruit, défini par  $RSB = 10 \log_{10}(1/\sigma_b^2)$  en dB. Pour les méthodes ESPRIT et MVD, le nombre de raies est fixé à deux, la vraie valeur. Pour l'approche proposée dans ce chapitre, les hyperparamètres ne sont pas estimés mais fixés aux valeurs suivantes :  $\lambda = 0.05$ ,  $\sigma^2 = 1$  et la variance du bruit  $\sigma_b^2$  correspond à la valeur théorique donnée par chaque RSB. Quant au paramètre de discrétilisation, il est choisi à quatre :  $\alpha = 4$ . Dans la suite, cette technique est référencée par BG (pour Bernoulli-Gaussien).

Après un moyennage sur mille réalisations indépendantes, les performances de détection sont évaluées comme la probabilité de détecter exactement deux raies. Sur la

figure V.5, elles sont comparées aux résultats fournis par les critères AIC et MDL. Le seuil de décrochement en dessous duquel les méthodes fournissent moins de 50% de détections correctes se situe aux environs de 0 dB pour la technique BG et entre 6 et 7 dB pour les critères classiques AIC et MDL. En particulier, dans la zone de 2 à 4 dB, la méthode BG fournit 80% de détections correctes contre moins de 20% pour AIC et MDL. Au regard de ces quelques résultats, l'amélioration obtenue par la méthode BG comparativement à l'existant est manifeste.

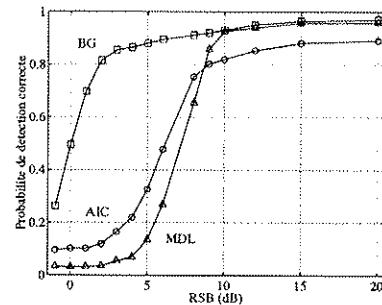


FIG. V.5 - Taux de détection correcte évalué sur 1000 réalisations pour chaque valeur du rapport signal-à-bruit.

L'erreur quadratique moyenne (EQM) qui inclut biais et variance d'estimation<sup>4</sup> est utilisée comme critère d'appréciation de la qualité de localisation des raies sur l'axe spectral. Pour la méthode BG, elle est évaluée conditionnellement aux détections correctes. La fréquence la plus faible est systématiquement attribuée à  $\nu_1$ , la plus élevée à  $\nu_2$ . Les résultats obtenus par les trois estimateurs sont reportés sur la figure V.6 pour la fréquence  $\nu_2$ . Les résultats obtenus pour la fréquence  $\nu_1$  sont similaires. Comme l'approche MVD, la méthode BG entre dans la classe des estimateurs fondés sur le principe du maximum de vraisemblance ; leurs meilleures performances comparées à celles qui sont obtenues par la technique ESPRIT se justifient par le caractère local des estimateurs de type « sous-espaces » (cf. § II 4.1). Les meilleurs résultats exhibés par la méthode du MVD comparativement à BG ne surprennent pas : en effet, l'approche MVD maximise une vraisemblance *exacte* tandis que la méthode BG repose sur une vraisemblance *approchée*.

Eufin, mentionnons qu'en moyenne, l'algorithme SLMR converge en trois itérations, ce qui correspond à un temps de calcul environ quinze fois plus élevé que celui de la méthode ESPRIT, et trois fois plus grand que celui qui est nécessaire au critère du MVD, maximisé par l'algorithme IQML [8]. Ces ordres de grandeur sont toutefois à

4. L'erreur ou distance quadratique est définie par :  $EQ \triangleq \text{biais}^2 + \text{variance}$ .

## 6. Conclusion et perspectives

relier à la faible valeur du pas de discréétisation fréquentiel  $\alpha$ , c'est-à-dire directement à la densité du voisinage associé à chaque solution courante.

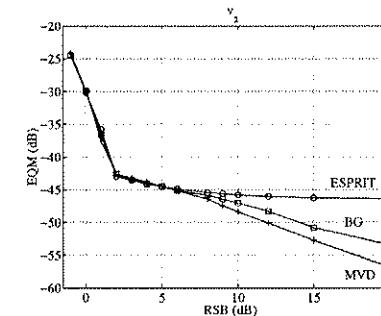


FIG. V.6 - Performances de localisation pour la fréquence  $\nu_2$  obtenues par les méthodes ESPRIT, MVD et BG. Les résultats pour la fréquence  $\nu_1$  sont similaires.

## 6 Conclusion et perspectives

Nous avons montré l'intérêt d'une approche bayésienne conjuguée à une modélisation impulsionnelle. Après une discréétisation très fine de l'espace des solutions et l'introduction dans ce même espace des informations *a priori* indispensables à l'atteinte d'une haute résolution, la méthode tire un bon parti d'une modélisation Bernoulli-Gaussienne du spectre de raies à restaurer. Les statistiques du problème autorisent l'écriture explicite et l'optimisation analytique de vraisemblances *a posteriori*, inspirées des algorithmes utilisés en sismique. L'optimalité globale est scindée en deux tâches complémentaires et séquentielles de détection-localisation et d'estimation. Somme toute, il s'avère à l'usage qu'une discréétisation trop fine nourrit un phénomène de dédoublement des raies. Cette pathologie est de nature algorithmique. L'inconvénient propre au modèle de Bernoulli qui positionne toute raie cherchée sur un ensemble fini de fréquences discrètes est partiellement levé – de façon satisfaisante en pratique – par un prolongement local du modèle d'observation, obtenu par développement limité entre deux fréquences de la grille discrète.

Néanmoins, l'estimation de la dérive fréquentielle relève de la phase d'estimation et non de la détection-localisation. En outre, les diverses approximations effectuées (linéarisation du modèle, approximation gaussienne de la loi jointe  $p(\mathbf{s}, \mathbf{r} | \mathbf{q})$ , le non respect de la colinéarité de  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{r}$  lors de leur estimation) ne donnent pas entière satisfaction d'un point de vue formel. Remédier complètement à ces inconvénients nécessite, sur un plan

théorique, un changement de modèle: le passage au modèle *continu* Poisson-Gaussien est envisagé dans le chapitre qui suit.

## CHAPITRE VI

# ESTIMATION PAR MODÈLE POISSON-GAUSSIEN

## Préambule

LE PRÉSENT chapitre propose une généralisation des développements précédents à la régularisation Poisson-Gaussienne. Il est abordé dans le contexte spécifique de la goniométrie haute résolution.

A la différence de son homologue Bernoulli-Gaussien, un processus Poisson-Gaussien est continu par rapport à ses deux composantes; son avantage par rapport au premier est de représenter un nombre variable de sources sur un *continuum* angulaire. Après la définition de la vraisemblance *a priori* d'un tel processus, l'application de la démarche méthodologique du chapitre III conduit à localiser les sources en maximisant la vraisemblance *a posteriori* des angles d'arrivées. En termes algorithmiques, le problème posé est par conséquent celui de l'optimisation d'un critère de localisation par rapport aux composantes du vecteur des positions angulaires, mais *également* par rapport à sa dimension. Il s'agit d'un problème algorithmique complexe qui consiste à rechercher le *minimum minimorum* d'une suite de critères, qui de surcroît sont non convexes, multimodaux et comportent des vallées étroites. Une telle difficulté n'apparaît pas avec un modèle BG dans la mesure où ce problème est réduit à l'exploration combinatoire d'un espace de cardinal fini, la séquence de Bernoulli admettant un nombre limité de configurations possibles.

La stratégie adoptée est la suivante. L'optimisation est dans un premier temps restreinte à l'exploration d'une grille angulaire utilisant l'algorithme SMLR. Elle permet, dans le cas PG, d'évoluer dans la suite des critères et de sélectionner celui qui est localement optimal. Cette étape constitue le premier maillon d'un traitement itératif. Elle fixe temporairement la dimension de la solution, fournit une solution discrète qui initialise un second module d'optimisation (descente de gradient) sur un espace *continu de dimension fixée*. Le principe de l'algorithme consiste à itérer ces deux modules jusqu'à convergence vers un optimum local. L'ensemble de la procédure inclut l'estimation des hyperpara-

mètres à partir de la maximisation d'une vraisemblance généralisée. Les résultats obtenus par cette version finalisée sont d'une qualité remarquable comparativement à ceux fournis par les approches traditionnelles, notamment à faible nombre de données. Cette extension Poisson-Gaussienne a fait l'objet d'une rédaction autonome sous la forme d'une publication<sup>1</sup>. Afin d'en préserver l'intégrité, nous avons choisi de la restituer dans son intégralité, en incluant ses propres résultats de simulation et références bibliographiques.

## Direction-of-Arrival and Frequency Estimation using Poisson-Gaussian Deconvolution

Frédéric Dublanchet, Jérôme Idier and Patrick Duvaut

### Abstract

*We address the problem of identification of sinusoidal components from observed data, which is fundamental for array signal processing and spectral line decomposition. Joint detection and estimation are proposed in a unified Bayesian framework, so that no preliminary estimate of the number of signals is required. All unknown quantities are estimated from a unique regularized "stochastic" likelihood function, including the number of sources and statistical parameters. The impulsive solution is modeled as a continuous Poisson-Gaussian process. Such a prior model generalizes a class of discrete compound processes previously introduced in the field of seismic deconvolution. A powerful iterative technique is proposed to maximize the posterior likelihood. It performs alternate maximization over continuous and discrete sets, respectively based on gradient descent and on Single Most Likely Replacement. The method does not suffer from the usual algebraic constraints of other high resolution techniques, and the possibly remaining identifiability problems are automatically raised according to maximal parsimony. On the other hand, simulation results show that the method behaves particularly well for small data sets, even for a single experiment.*

## 1 Introduction

Evaluation of directions of arrival (DOA's) for array signal processing and spectral line decomposition share a common problem of identifying sinusoidal components. This problem can be commonly presented as a three-fold issue:

<sup>1</sup> F. Dublanchet, J. Idier and P. Duvaut, "Direction-of-Arrival and Frequency Estimation using Poisson-Gaussian Deconvolution", *Rapport interne LSS # GPI-96/01* soumis à la revue *IEEE Trans. Signal Processing*.

- a) A *detection* step, i.e., finding the number of sinusoidal components;
- b) A *localization* step, i.e., finding the frequency of each component;
- c) An *estimation* step, i.e., estimating the amplitude of each component,

Each of the three aspects has been receiving considerable attention for many years. As regards localization and estimation, the oldest approaches are beamforming techniques, which provide limited resolution. The two last decades have witnessed the impressive development of "modern" methods, which can be divided into two classes. Methods of the first class are based on parametric model identification [1]. The second class gathers the so-called "high resolution" methods [1, 2, 3, 4], either based upon eigendecomposition of the data covariance matrix (such as ESPRIT [5], MUSIC [6, 7]), or upon maximum likelihood estimation [8, 9, 2].

All these approaches provide more or less acceptable localization performance. However they bring only a partial answer in many real situations, because the true number of components is seldom available *a priori*. To make up for the deficiency, an estimated number is usually inferred first, according to the detection step. Various detection methods have been proposed [10, 11, 12, 13, 6]. The most commonly used are Akaike's information criterion (AIC) [10] and Rissanen's minimum description length (MDL) [11]. Both are based on information theoretic arguments which substitute a hopefully reliable estimate of the sample covariance matrix for the true quantity. MDL criterion is asymptotically consistent when the number of snapshots tends to infinity, but both criteria globally suffer from a lack of robustness, especially in the realistic conditions of a finite and possibly small number of samples [14, 15]. In addition, algebraic constraints limit AIC and MDL to a number of *resolvable* sources smaller than the number of available sensors.

From a methodological point of view, one may wonder why detection and localization have always been coped as two separate issues. From intuitive considerations, trying to evaluate the number of components before locating them may rather seem an inefficient division. For sake of overall efficiency, our aim is to propose a challenging approach, designed as a unique and coherent localization procedure, and to bring out the expected improvement in terms of global performance.

Our inspiration actually originates from the field of seismic deconvolution, where the structure of stratified media is analysed from echosounding signals [16]. A similar inverse problem is also encountered in several areas such as non-destructive evaluation and medical imaging. It basically amounts to estimating sparse spike trains from scanned echoes [17]. This issue is indeed not very different from estimating DOA's from noisy data. The seismic wavelet echoed from a reflector at a given depth plays a comparable role to the steering vector of the array in the direction of a given source. Yet, both pro-

blems are addressed using rather different terminology and methodology. In particular, finding the number of separate echoes is usually not splitted from localization in seismic data processing. On the other hand, the ill-posed character of seismic deconvolution is acknowledged and most modern deconvolution techniques resort to regularization tools. The spiky nature of the unknown signal is the basic prior information which is taken into account. More specifically, Mendel and coworkers introduced a Bayesian approach based on a discrete Bernoulli-Gaussian (BG) prior model [18, 19].

A BG process  $(Q, X)$  is a white compound model for discrete pulse trains. The unobserved part  $Q$  controls the occurrence of a pulse. It is an independent identically distributed binary process with parameter  $\lambda_b = \Pr(Q_n = 1)$ . The partially observed part  $X$  represents the sparse series of amplitudes of the pulse process. Conditionally to  $Q$ , it is a white zero-mean Gaussian process with variances  $Qr_x$ , where  $r_x$  is the mean energy of pulses. Efficient algorithmic strategies have been developed for BG deconvolution [20, 21, 22, 17, 23]. We have recently adapted the BG methodology to the analysis of superimposed complex sinusoids embedded in additive Gaussian noise [24, 25]. This preliminary work gives rise to interesting results compared to those obtained with classical methods. However, it is intrinsically limited by the discrete nature of the Bernoulli part, which compels the detected frequencies to belong to a predefined grid. In order to overcome this restriction, the present paper proposes an original extension to a continuous Poisson-Gaussian (PG) prior model. To our knowledge, the work of Kwakernaak is the unique precursor in the field of PG deconvolution [26]. However, it does not bring satisfactory answers to several extents, as we will examine later.

Compared to preexisting methods for estimating DOA's, the PG approach leads to a penalized version of the well-known "stochastic" maximum likelihood (SML) method. If it were constrained to a given number of sources, it would only boil down to a simplified version of the standard SML estimator [2, 3, 4], for which the signal amplitude correlation matrix would be proportional to identity. In fact, it should rather be viewed as a generalized version of SML that allows to tackle an unconstrained number of sources. Whereas usual SML are expected to degenerate towards a meaningless maximal number of sources, it will be shown that the new PG version does theoretically provide a finite set of sources as the most likely one.

The paper is organized as follows. In Section 2, the signal model is formulated and the problem is formally stated. Section 3 is devoted to the essential construction of the prior likelihood of a PG process and to the resulting form of Bayesian estimation. Section 4 is devoted to the analysis of the derived localization criterion and to the algorithmic principles of its optimization. The problem of hyperparameter estimation is coped in Section 6 in order to build a fully unsupervised detection-estimation method. Simulation results are discussed in Section 7. Finally, concluding remarks and perspectives are given

in Section 8.

## 2 Problem statement

In the whole paper, we consider the basic case of a uniform linear array (ULA) consisting of  $N$  omnidirectional sensors with unity gain at temporal frequency  $\nu$ . In particular, such a situation formally corresponds to the problem of spectral analysis when the signal consists of superimposed complex exponentials. Let  $p$  narrow-band planewaves, centered at frequency  $\nu$ , impinge on the array from distinct locations. Using complex signal representation, the array output complex envelope vector  $\mathbf{y}(t)$  observed at time  $t$  can be expressed as:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t). \quad (\text{VI.1})$$

Matrix  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$  ( $N \times p$ ) represents the transfer function of the system source-array calculated at the carrier frequency  $\nu$  and  $\boldsymbol{\theta}$  denotes the set of  $p$  source positions with respect to (w.r.t) the known sensor geometry and some arbitrary chosen reference sensor (here the first one). For the sake of simplicity, we will assume that all sensors are within a two-dimensional plane and that all sources are in the far-field (which allows the planewave model for the wavefronts) and within the same plane as the array. Thus, only  $p$  parameters represent the  $p$  directions of arrival:  $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_p\}$ . The column of matrix  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$  that corresponds to a given angle  $\theta_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) is the normalized so-called "steering vector" of the array in the direction  $\theta_i$  and is expressed as:

$$\mathbf{a}(\theta_i) = \frac{1}{\sqrt{N}} [1, \dots, \exp(-j\phi_{n,i}), \dots, \exp(-j\phi_{N-1,i})]^t,$$

with

$$\phi_{ni} = \frac{2\pi\nu d}{c} n \sin \theta_i,$$

where, in usual notations,  $d$  is the spacing between two consecutive sensors and  $c$  is the propagation speed of the wavefronts. Superscript  $t$  stands for transpose.

A crucial assumption is that the array is calibrated. Consider that  $\mathbf{y}(t)$  is properly sampled and measured over  $K$  separate observation intervals so that  $K$  "snapshots"  $\{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^K$  are available. The additive noise  $\mathbf{n}(t)$  is supposed to be a white stationary, complex-valued circular Gaussian process with zero mean and variance  $\sigma_n^2$ , independent from the signal amplitude vector  $\mathbf{x}(t)$  and independent from snapshot to snapshot. Furthermore, let us consider that the observed angular space is between  $\theta_{\min}$  and  $\theta_{\max}$  so that  $\boldsymbol{\theta} \in \Delta^p \subset \mathbb{R}^p$  with  $\Delta \triangleq [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ , and let  $\delta \triangleq \theta_{\max} - \theta_{\min}$ . In the following,  $\mathbf{x}$  denotes the whole set of amplitudes  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K)$  and likewise,  $\mathbf{y}$  stands for all collected snapshots  $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_K)$ . From the white Gaussian statistics of the noise it is straightforward

to deduce that the ordinary likelihood function of the observations reads:

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = (\pi \sigma_n^2)^{-NK} e^{-\sum_{k=1}^K \| \mathbf{y}_k - \mathbf{A} \mathbf{x}_k \|^2 / \sigma_n^2} \quad (\text{VI.2})$$

The estimation step, which is the last part of the global problem, consists in estimating the source amplitudes  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^K$  for each snapshot. Since the observation model (VI.1) is linear in  $\mathbf{x}(t)$ , second-order estimation of  $\mathbf{x}$  reduces to a mere least squares fit, once an estimate of  $\boldsymbol{\theta}$  is available. This is the simplest and minor part of the problem, while detection and localization are the major concern of the paper.

According to a global detection-localization approach,  $\boldsymbol{\theta}$  has to be estimated in a continuous space of *unknown dimension p*. From both methodological and algorithmic viewpoints, this compound structure may be considered as the main intricacy. Let us first consider the methodological aspects of the problem.

### 3 Poisson-Gaussian estimation

Our approach is fully developed in a Bayesian framework. First of all, it requires prior specification of models for the unknown quantities  $\mathbf{x}$  and  $\boldsymbol{\theta}$ , in accordance with structural knowledge and qualitative information. In this respect, the well-known SML approach may be viewed as “half-Bayesian”, since it attaches a probabilistic model to  $\mathbf{x}$  but not to  $\boldsymbol{\theta}$ . As a counterpart to the Gaussian model for  $\mathbf{x}$ , our aim is to provide a probabilistic model also for  $\boldsymbol{\theta}$ , which would be consistent with the expected impulsive structure of the solution.

#### 3.1 Poisson model for $\boldsymbol{\theta}$

For lack of prior knowledge of the distribution of sources over the angular domain  $\Delta$ , a Poisson process with uniform intensity  $\lambda$  over  $\Delta$  seems a natural choice. Accordingly, the total number  $N(\Delta)$  of events occurring during the interval  $\Delta$  obeys the Poisson's probability law:

$$\Pr(N(\Delta) = p) = \frac{\lambda^p \delta^p}{p!} e^{-\lambda \delta}. \quad (\text{VI.3})$$

Now let us consider the problem of defining a proper prior likelihood function for any configuration  $\boldsymbol{\theta}$  of DOA's. Note that we cannot discriminate among the DOA's, in the sense that they all play the same role in the description of a given  $\boldsymbol{\theta}$ : in this respect,  $\boldsymbol{\theta}$  must be considered as a set rather than a vector. As a consequence, we obtain the following expression for the probability density of  $\boldsymbol{\theta}$ , conditionally to the presence of  $p$  sources [27]:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\theta} | N(\Delta) = p) &= p!/\delta^p \quad \text{if } p = \dim \boldsymbol{\theta} \\ &= 0 \quad \text{otherwise,} \end{aligned} \quad (\text{VI.4})$$

which is equal to the conditional Poisson density for one possible outcome, times  $p!$  for the number of equivalent outcomes up to a permutation.

So in a fairly natural way, we define the a priori likelihood of any angular sequence  $\boldsymbol{\theta}$  as the product:

$$L(\boldsymbol{\theta}, N(\Delta) = p) \triangleq f(\boldsymbol{\theta} | N(\Delta) = p) \Pr(N(\Delta) = p).$$

Provided we intrinsically assume that  $p$  is the size of  $\boldsymbol{\theta}$ , the notation can remain implicit w.r.t.  $p$  and we get:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \lambda^p e^{-\lambda \delta}. \quad (\text{VI.5})$$

Note that such a likelihood function is not a probability density function nor a probability.

#### 3.2 Gaussian model for $\mathbf{x}$

For each source located by  $\boldsymbol{\theta}$ , it is assumed an independent complex circular Gaussian vector of amplitudes with zero mean and variance  $\sigma^2$ , denoted  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . In other words, we choose a very simple structure for the covariance matrix of source amplitudes:

$$\mathbf{S} \triangleq \mathbb{E} [\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^\dagger(t) | \boldsymbol{\theta}] \quad (\text{VI.6})$$

$$= \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (\text{VI.7})$$

This is a slight difference with SML, since we prefer a simple white assumption for the amplitudes rather than estimating the covariance matrix based on averaging [2, 3, 4]. Complete estimation of  $\mathbf{S}$  as required by SML has two reported limitations, which are raised by the present form. First, it degenerates unless the number of sources is strictly less than the number of sensors. Second, positiveness of the estimated matrix  $\hat{\mathbf{S}}$  is only guaranteed for sufficiently large  $K$  [28]. Because one of our main concerns is to devise an efficient method even for small data sets (especially for the case of one snapshot only, as usually encountered in spectral analysis problem), we substituted the structured form (VI.7) for the usual approach. Anyhow, we see no obstacle to valid extensions of the proposed estimation and optimization techniques to SML-like frameworks.

#### 3.3 Supervised estimation framework

Let  $\mathcal{H} = (\lambda, \sigma^2, \sigma_n^2)$  gather the three hyperparameters. In order to provide a fully unsupervised method, estimation of hyperparameters is addressed in Section 6. For sake of clarity, we first consider that  $\mathcal{H}$  is known or previously estimated, and the dependence of the likelihood functions w.r.t. remains implicit.

Using Bayes' theorem, the prior term (VI.5) combines with the standard form of the likelihood (VI.2) to yield the posterior likelihood:

$$L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}; \mathbf{y}) = p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}) L(\boldsymbol{\theta}) / p(\mathbf{y}). \quad (\text{VI.8})$$

In [26], Kwakernaak proposed to maximize the *joint* posterior likelihood function (VI.8) w.r.t. both  $\mathbf{x}$  and  $\boldsymbol{\theta}$ , but he also reported that such a choice often leads to an overestimated number of detected pulses. Other Bayesian estimators can actually be preferred to such a joint maximum a posteriori (MAP) approach. Indeed, it is clear from later contributions related to BG deconvolution [18, 29], that a sequential estimation scheme is far more reliable, from both formal and empirical viewpoints. The sequential approach consists in integrating the amplitudes out of the localization step, quite similarly to SML compared to "deterministic" maximum likelihood. In the present framework, such a sequential approach relies on the *marginal* MAP (MMAP) solution  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  of the localization step, as the maximizer of the marginal posterior likelihood function of  $\boldsymbol{\theta}$ . From (VI.8), such a marginal likelihood function expresses as follows:

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{x}} L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}; \mathbf{y}) d\mathbf{x} \quad (\text{VI.9})$$

$$= p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) L(\boldsymbol{\theta}) / p(\mathbf{y}), \quad (\text{VI.10})$$

where

$$p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi^{NK} |\mathbf{B}|^K} e^{-\sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k^\dagger \mathbf{B}^{-1} \mathbf{y}_k} \quad (\text{VI.11})$$

is deduced from (VI.2) and  $\mathbf{B}$  is the covariance matrix of  $(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta})$ :

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \triangleq \mathbb{E} [\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^\dagger(t) | \boldsymbol{\theta}] \quad (\text{VI.12})$$

$$= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{S} \mathbf{A}^\dagger(\boldsymbol{\theta}) + \sigma_n^2 \mathbf{I}. \quad (\text{VI.13})$$

At this point, remember that SML maximizes (VI.11) [2, 3, 4], and no prior term is assumed w.r.t.  $\boldsymbol{\theta}$ . On the other hand, the Poisson prior (VI.5) only depends on the size of  $\boldsymbol{\theta}$ , which is a fixed quantity in the framework of SML. In other words, the Poisson prior likelihood introduces no distortion in the localization step compared to SML. At that stage, the only reason why the two approaches – slightly – differ is because we simply assumed  $\mathbf{S} = \sigma^2 \mathbf{I}$  with  $\sigma$  unknown, whereas no prior structure is usually assigned to the covariance matrix  $\mathbf{S}$  according to SML.

According to the MMAP approach, the localization problem boils down to the minimization of the negative log-likelihood function  $-\ln L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ . After dropping constant terms, combination of (VI.5) and (VI.11) yields the following expression of the regularized criterion:

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k^\dagger \mathbf{B}^{-1} \mathbf{y}_k + K \ln |\mathbf{B}| - p \ln \lambda. \quad (\text{VI.14})$$

The next two sections respectively address the existence and the computability of  $\hat{\boldsymbol{\theta}} \triangleq \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta})$ , when  $\boldsymbol{\theta}$  is a set of frequency components of unknown size.

As recommended in the field of BG deconvolution, the localization step is followed by MAP estimation of the associated complex amplitudes through maximization of  $L(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{x} | \mathbf{y})$  w.r.t.  $\mathbf{x}$ . Since the localization step provides an estimated dimension  $\hat{p} = \dim \hat{\boldsymbol{\theta}}$ , the estimation step reduces to a simple linear, Gaussian problem. It is straightforward to derive the following optimal estimate of source amplitudes, for each snapshot:

$$\forall k \in \{1, \dots, K\} : \hat{\mathbf{x}}_k = \sigma^2 \hat{\mathbf{A}}^\dagger \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{y}_k, \quad (\text{VI.15})$$

with  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  and  $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ .

## 4 Localization criterion analysis

Localization methods based on maximum likelihood do not cope with the evaluation of the dimension of  $\boldsymbol{\theta}$  because it is usually expected that the maximal value of the likelihood be an increasing function of the tested number of sources. Most often, the detection problem is solved beforehand, and it resorts to information theoretic criteria to penalize higher values of  $p$  [26, 12]. In the proposed Poisson approach, the penalizing part is played by the regularizing term  $L(\boldsymbol{\theta})$ , and detection is integrated into the localization step.

In order to assess the validity of our approach, a crucial prerequisite is to provide mathematical guarantees that a minimum of  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\theta})$  does actually exist. Formally, the problem consists in checking the existence of the *minimum minimorum* of a series of criteria (VI.14) defined for every possible integer values of  $p$ .

Let us first study the behaviour of the two first terms of  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\theta})$  for growing values of  $p$ . In this respect, the following proposition gathers useful preliminary results.

### Proposition 1

(i) For any set of data  $\mathbf{y} \neq 0$ , any  $\boldsymbol{\theta} \in \Delta^p$  and any values of hyperparameter  $\mathcal{H} \in \mathbb{R}_+^{*3}$ ,  $\sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k^\dagger \mathbf{B}^{-1} \mathbf{y}_k$  is upper and lower bounded:

$$0 < \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k^\dagger \mathbf{B}^{-1} \mathbf{y}_k \leq \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k^\dagger \mathbf{y}_k. \quad (\text{VI.16})$$

(ii) In the same conditions,  $K \ln |\mathbf{B}|$  fulfills the following inequalities:

$$KN \ln \sigma_n^2 \leq K \ln |\mathbf{B}| \leq KN \ln (\sigma^2 p + \sigma_n^2). \quad (\text{VI.17})$$

*Proof:*

- (i) Inequalities (VI.16) are straightforward since  $\mathbf{B} = \sigma^2 \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger + \sigma_n^2 \mathbf{I}$  is positive definite and  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$  is positive.
- (ii) Under the model assumptions, matrix  $\mathbf{B}$  also reads

$$\mathbf{B} = \sigma^2 \sum_{i=1}^p \mathbf{a}(\theta_i) \mathbf{a}(\theta_i)^\dagger + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (\text{VI.18})$$

with  $\mathbf{a}(\theta_i)^\dagger \mathbf{a}(\theta_i) = 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$ . For any vector  $\mathbf{v}$  in  $\mathbb{C}^N$ , Schwarz inequality applied to the  $p$  Hermitian products  $\mathbf{v}^\dagger \mathbf{a}(\theta_i)$  results in:

$$\mathbf{v}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger \mathbf{v} = \sum_{i=1}^p (\mathbf{v}^\dagger \mathbf{a}(\theta_i))^2 \leq p \mathbf{v}^\dagger \mathbf{v}.$$

Hence:

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^N, \sigma_n^2 \mathbf{v}^\dagger \mathbf{v} \leq \mathbf{v}^\dagger \mathbf{B} \mathbf{v} \leq (\sigma^2 p + \sigma_n^2) \mathbf{v}^\dagger \mathbf{v}, \quad (\text{VI.19})$$

which provides (VI.17). ■

Now, the behavior of  $\mathcal{C}(\theta)$  actually depends on the value assigned to the intensity  $\lambda$  compared to unity, according to the following proposition.

#### Proposition 2

- (i) If  $\lambda \leq 1$ , there exists at least one set  $\hat{\theta}$  of finite dimension  $\hat{p}$  such that the global minimum of  $\mathcal{C}(\theta)$  is achieved at  $\mathcal{C}(\hat{\theta})$ .
- (ii) If  $\lambda > 1$ , minimization of  $\mathcal{C}(\theta)$  degenerates to an infinite number of angles.

*Proof:* Three cases are studied separately, depending on the value of  $\lambda$ .

- (i, 1)  $\lambda < 1$ : In this case, the prior term  $-p \ln \lambda$  is positive and grows with  $p$ . Using the lower bounds of (VI.16) and (VI.17), we obtain:

$$\mathcal{C}(\theta) \geq KN \ln \sigma_n^2 - p \ln \lambda. \quad (\text{VI.20})$$

On the other hand, the minimizer  $\hat{\theta}$  of  $\mathcal{C}(\theta)$  obviously satisfies  $\mathcal{C}(\hat{\theta}) \leq \mathcal{C}(\emptyset)$ , where  $\emptyset$  stands for the empty set:

$$\mathcal{C}(\emptyset) = \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k^\dagger \mathbf{y}_k / \sigma_n^2 + KN \ln \sigma_n^2. \quad (\text{VI.21})$$

#### 4. Localization criterion analysis

So applying inequality (VI.20) to  $\hat{\theta}$  implies that  $\hat{p} \leq p_{\max}$ , with

$$p_{\max} = \text{Int} \left[ -\frac{\sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k^\dagger \mathbf{y}_k}{\sigma_n^2 \ln \lambda} \right]. \quad (\text{VI.22})$$

$\text{Int}[\cdot]$  denotes the integer part operator. Hence,  $\hat{\theta}$  has necessarily a finite dimension, provided it exists.

On the other hand, for each finite value of  $p$ ,  $\Delta^p$  is a compact set and  $\mathcal{C}(\theta)$  is bounded below (according to (VI.20)). As a consequence, minimizing  $\mathcal{C}(\theta)$  in  $\Delta^p$  provides a finite value for each value of  $p$  between 0 and  $p_{\max}$ , and the global minimum exists as the *minimum minimorum* among those  $p_{\max} + 1$  finite values.

Note that the maximum number  $p_{\max}$  of resolvable sources does not only depend on the array aperture but also on hyperparameter values and thus can be greater than the number of sensors.

- (i, 2)  $\lambda = 1$ : In this middle case, the prior term no longer exists. Only the likelihood term remains. Using decomposition (VI.18), it is possible to evaluate  $|\mathbf{B}|$  iteratively as

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}_p| &= |\mathbf{B}_{p-1}| \left( 1 + \sigma^2 \mathbf{a}(\theta_p)^\dagger \mathbf{B}_{p-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_p) \right) \\ &= \sigma_n^{2N} \prod_{i=1}^p \left( 1 + \sigma^2 \mathbf{a}(\theta_i)^\dagger \mathbf{B}_{i-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_i) \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.23})$$

where subscript  $i$  in matrices  $\mathbf{B}_i$  refers to number  $i$  of sources. On the other hand, the right-hand side inequality (VI.19) implies that the maximum eigenvalue of  $\mathbf{B}_i$  is bounded by  $\sigma^2 i + \sigma_n^2$ , which yields using (VI.23) and (VI.16):

$$\mathcal{C}(\theta) \geq NK \ln \sigma_n^2 + K \sum_{i=1}^p \ln \left( 1 + \frac{1}{(i-1) + \sigma_n^2/\sigma^2} \right).$$

This inequality holds for any set  $\theta$  of finite dimension  $p \neq 0$ . Since the minimizer  $\hat{\theta}$  satisfies  $\mathcal{C}(\hat{\theta}) \leq \mathcal{C}(\emptyset)$ , the same arguments as in the previous case enable to assert the existence of at least one minimizer  $\hat{\theta}$  of  $\mathcal{C}(\theta)$  of finite dimension  $\hat{p}$ .

- (ii)  $\lambda > 1$ : In this case, the prior term  $-p \ln \lambda$  is negative and decreases with  $p$ . Using the upper bounds of (VI.16) and (VI.17), we obtain:

$$\mathcal{C}(\theta) \leq \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k^\dagger \mathbf{y}_k + KN \ln(\sigma^2 p + \sigma_n^2) - p \ln \lambda.$$

Since  $-p \ln \lambda$  is the preponderant term for growing values of  $p$ , it is clear that

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \min_{\theta, \dim \theta = p} \mathcal{C}(\theta; \mathcal{H}) = -\infty. \quad (\text{VI.24})$$

We are clearly faced with a case of degeneracy.

As long as the Poisson intensity  $\lambda$  is assumed to belong to  $(0, 1]$ , Proposition 2 is a reassuring feature as regards formal capabilities for detection. Moreover, it is a rather unexpected result, that degeneracy is avoided even in the limiting case  $\lambda = 1$ , where our approach falls in the class of unregularized SML methods. However from a practical viewpoint, the use of  $\lambda = 1$  favours false alarms, *i.e.*, the algorithm tends to overestimate the number of sources. ■

## 5 Optimization strategy

In this section, all hyperparameters are still assumed to have fixed numerical values, subject to the condition  $0 < \lambda < 1$ .

### 5.1 Overall structure

Computing  $\hat{\theta}$  as the minimizer of (VI.14) is obviously a difficult task, because of the complex dependence of  $\mathcal{C}(\theta ; \mathcal{H})$  on  $\theta$ , and also because determining the dimension of  $\theta$  is now part of the minimization problem.

In [26], Kwakernaak choosed to solve the localization problem over a discrete time grid for each value of  $p$ , and to compare the resulting likelihood values subsequently. This methodology is in fact quite similar to algorithmic structures proposed in DOA estimation problems. Save the aforementioned deficiencies of the objective function, the minimization technique adopted in [26] has two main drawbacks. First, it constrains the located events to belong to a prescribed grid. Second, solving separately as many problems as the number of plausible values of  $p$  is probably not the most efficient approach from the numerical viewpoint.

In order to overcome such deficiencies, we propose to combine suboptimal combinatorial search on a discrete grid previously developped for BG deconvolution, with a gradient minimization technique to refine the location of detected sources. The resulting structure performs alternate minimizations over *discrete* and *continuous* sets.

- (i) The combinatorial step forces newly tested sources to occur on predefined discrete set of entry points in the angular domain  $\Delta$  is based on a combinatorial exploration technique – the so-called Single Most Likely Replacement (SMLR) algorithm [18, 19], – well suited for locating discrete events on a grid. This suboptimal technique enables to perform “jumps” between criteria in a numerically efficient way, through basic variation in the current set of detected sources. Its objective is not only to

### 5. Optimization strategy

select a criterion, *i.e.*, to fix  $p$ , but also to provide relatively accurate DOA estimates on the prescribed grid.

- (ii) The second step performs local minimization out of the grid in the neighborhood of the temporarily quantified solution. The dimension  $p$  of  $\theta$  is now held fixed. The role of this second step is to let the  $p$  angles drift away from their initial positions, provided it ensures a further decrease of the criterion  $\mathcal{C}(\theta)$ . The resulting angular solution generally ends out of the grid.

The two steps are nested in a looped structure, as illustrated on Fig. VI.2. When the current solution reenter the first step, the angles which are now out of the grid are put in competition with the usual entry points of the grid. Several global iterations are generally required before convergence. The latter is reached when the combinatorial step ends up with the current solution. Of course, there is no formal guaranty that the resulting solution  $\hat{\theta}$  globally minimize  $\mathcal{C}(\theta)$ .

### 5.2 Minimization over a discrete grid

Let us consider the general form  $\mathcal{D} \triangleq (c_1, \dots, c_\ell, \dots, c_L)$  for a discrete grid composed of  $L$  points on domain  $\Delta$ . The parameter  $L$  may take arbitrary large values, greater than the number of sensors, in order to allow high resolution analysis. The proposed numerical structure is not attached to any particular form of the grid  $\mathcal{D}$ . However, without prior knowledge about the location of the DOA’s, the discrete angles will be chosen equally spaced over domain  $\Delta$ ; Now assume that we restrain the search of the minimizer of  $\mathcal{C}(\theta)$  to the set  $\mathcal{P}_\mathcal{D}$  of subsets of  $\mathcal{D}$ . In such a discrete framework, the numerical problem arises in terms of combinatorial exploration, very close to MMAP BG deconvolution. Exact optimization of  $\mathcal{C}(\theta)$  over  $\mathcal{P}_\mathcal{D}$  would require  $2^L$  evaluations of the criterion, which is clearly computationally intractable for large values of  $L$ . Instead, Single Most Likely Replacement (SMLR) only performs partial combinatorial exploration. It is an iterative structure initially introduced by Kormylo and Mendel in the field of BG seismic deconvolution [18, 19]. Each iteration only explores a set of *neighboring* sequences of the current sequence. The algorithm is stopped when no neighboring sequence is more likely than the current one, which is then chosen as the final one.

The overall numerical efficiency of SMLR strongly relies on the availability of a *core algorithm*, *i.e.*, updating equations that provide the values of  $\mathcal{C}(\theta)$  at low numerical cost for neighboring sequences. Two core algorithms based on different auxiliary quantities have been proposed recently [21, 23]. Actually, it can be shown that only the later version [23] is adaptable to the present context, along the following lines.

Let  $\theta_0$  denote the current sequence, which is supposed to belong to  $\mathcal{P}_\mathcal{D}$ . Here, the

neighborhood of  $\theta_0$  is defined as the set of  $L$  sequences  $\theta_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, L$ , that differ from  $\theta_0$  by one entry, i.e., whether  $\theta_\ell = \theta_0 \cup \{c_\ell\}$  or  $\theta_0 = \theta_\ell \setminus \{c_\ell\}$ . For sake of readability, subscript  $\ell$  (resp. 0) will refer to any quantity related to  $\theta_\ell$  (resp.  $\theta_0$ ). Let also  $a_\ell$  stand for  $a(c_\ell)$ , and the scalar  $\varepsilon_\ell$  take the value 1 (resp. -1) when  $c_\ell$  is added to (resp. removed from)  $\theta_0$ . As a straightforward variation of [23], it can be shown that the criterion is iteratively computable using the following expression:

$$C_\ell = C_0 - \rho_\ell^{-1} \sum_{k=1}^K \left| y_k^\dagger B_0^{-1} a_\ell \right|^2 + K \ln (\varepsilon_\ell \sigma^2 \rho_\ell) - \varepsilon_\ell \ln \lambda, \quad (\text{VI.25})$$

where

$$y_k^\dagger B_0^{-1} a_\ell = \sigma_u^{-2} y_k^\dagger a_\ell - \sigma_n^{-2} \sigma^2 y_k^\dagger A_0 C_0^{-1} A_0^\dagger a_\ell, \quad (\text{VI.26a})$$

$$\rho_\ell = \varepsilon_\ell \sigma^{-2} + \sigma_u^{-2} - \sigma_n^{-2} \sigma^2 a_\ell^\dagger A_0 C_0^{-1} A_0^\dagger a_\ell, \quad (\text{VI.26b})$$

are expressed in terms of the inverse of  $p \times p$  matrix

$$C \triangleq \sigma^2 A^\dagger A + \sigma_n^2 I \quad (\text{VI.27})$$

at  $\theta_0$ . The update of matrix  $C_0^{-1}$  is only needed once the optimal neighbor sequence is determined. It makes direct use of the inversion matrix lemma for block matrices [23]. All quantities  $y_k^\dagger a_\ell$  and  $y_k^\dagger A_0$  enter the  $L \times K$  matrix  $y^\dagger A(\mathcal{D})$ , which can be computed at the beginning of the procedure by discrete Fourier transform of the snapshots. In the same way,  $A_0^\dagger a_\ell$  enter the  $L \times L$  matrix  $A(\mathcal{D})^\dagger A(\mathcal{D})$ , which has an explicit form: diagonal entries equal to 1 and off-diagonal coefficient reads

$$\{A(\mathcal{D})^\dagger A(\mathcal{D})\}_{ij} = \frac{\sin(\phi_{N,j} - \phi_{N,i})}{N \sin(\phi_{1,j} - \phi_{1,i})} e^{-j(\phi_{N-1,j} - \phi_{N-1,i})}.$$

Following [23], the initial sequence is chosen as the empty set, which is the most favourable choice from the numerical viewpoint since  $C(\emptyset) = \sigma_n^2 I$ . Moreover, it avoids the search of “a good initial solution”, in contrast with many existing methods [9]. Finally, each iteration involves  $\mathcal{O}(Lp^2)$  complex operations. Convergence is reached in a finite (practically small) number of iterations since  $\theta$  spans a finite set. The basic SMLR algorithm is summarized below:

#### 1. Initialization:

Set  $\theta_0 = \emptyset$

Compute  $y^\dagger A(\mathcal{D})$  and  $C(\theta_0)$  using (VI.21)

#### 2. Iterations:

for  $\ell = 1, \dots, L$ :

Compute  $C(\theta_\ell)$  using (VI.25), (VI.26)

Select  $\hat{\theta} = \arg \min_{\theta_\ell} C(\theta_\ell)$

#### 3. Stopping test:

if  $C(\hat{\theta}) > C(\theta_0)$  then

Stop

else

Update:  $\theta_0 = \hat{\theta}$ ,  $C(\theta_0) = C(\hat{\theta})$  and  $C_0^{-1}$

return to 2

According to the overall algorithmic structure, the currently detected sources will generally drift out of  $\mathcal{D}$  once their positions have been locally optimized (see Section 5.3). Thus, we must look for an appropriate extension of the basic SMLR strategy in order to carry on the procedure. One very effective solution is to keep  $\mathcal{D}$  as the set of possible entry points, while  $\theta_0$  describes the currently removable sources. No further alteration is implied in the algorithmic structure.

### 5.3 Local Minimization

Local minimization is based upon a gradient-type algorithm

$$\theta^{(m+1)} = \theta^{(m)} - \mu^{(m)} \left. \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta^{(m)}}$$

where superscript  $(m)$  refers the  $m$ th iteration and  $\mu^{(m)}$  stands for a steplength. It is initialized by the outcome of the SMLR procedure.

The gradient function has two different formulations, according to whether  $p$  is lower or greater than  $N$ . Here we only present the case  $p \leq N$ , which corresponds to the more usual assumption. The treatment of the other case is not fundamentally different. In order to maintain low computational requirements, we wish to replace the original expression (VI.14) of criterion  $C(\theta)$  by an equivalent expression involving  $p \times p$  matrix  $C(\theta)$  rather than  $N \times N$  matrix  $B(\theta)$ . It is not difficult to obtain the following result:

$$C(\theta) = \sigma_u^{-2} \sum_{k=1}^K y_k^\dagger \left( I - \sigma^2 A C^{-1} A^\dagger \right) y_k + K \ln |C| + K(N-p) \ln \sigma_n^2 - p \ln \lambda,$$

where the dependence of matrices  $A$  and  $C$  on parameter vector  $\theta$  is understood. Since the prior term does not depend on  $\theta$ , the gradient of the complete criterion (VI.28) reduces to:

$$\frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{\sigma^2}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^K \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ y_k^\dagger A C^{-1} A^\dagger y_k \right\} + K \frac{\partial \ln |C|}{\partial \theta}. \quad (\text{VI.28})$$

For sake of clarity, let us consider the  $i$ th component of the gradient as a separate quantity. Using closed-form identities for derivatives of algebraic expressions, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left\{ \mathbf{y}_k^\dagger \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}_k \right\} = \\ 2 \Re \left\{ \mathbf{y}_k^\dagger \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_i} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}_k \right\} - \mathbf{y}_k^\dagger \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_i} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}_k, \end{aligned} \quad (\text{VI.29})$$

and

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_i} = \sigma^2 \left( \frac{\partial \mathbf{A}^\dagger}{\partial \theta_i} \mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_i} \right).$$

On the other hand, it can also be shown that

$$\frac{\partial \ln |\mathbf{C}|}{\partial \theta_i} = \text{tr} \left\{ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_i} \mathbf{C}^{-1} \right\}, \quad (\text{VI.30})$$

where  $\text{tr} \{ \cdot \}$  denotes the trace operator. The  $p$  derivative matrices

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_i} = \left[ \mathbf{0} | \cdots | \mathbf{0} | \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_i)}{\partial \theta_i} | \mathbf{0} | \cdots | \mathbf{0} \right]$$

are basic quantities in the calculation. In order to account for their sparse structure, let us gather nonzero columns and define a new  $N \times p$  matrix:

$$\mathbf{D} = \left[ \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_1)}{\partial \theta_1} | \cdots | \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_p)}{\partial \theta_p} \right]. \quad (\text{VI.31})$$

Introduction of (VI.29-VI.31) into (VI.28) finally lead to the following closed-form expression of the gradient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 2K \Re \left\{ \text{diag} \left[ \sigma^2 \mathbf{D}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^\dagger \widehat{\mathbf{R}} \left( \mathbf{I} - \sigma^2 \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^\dagger \right) \mathbf{D} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{VI.32})$$

where  $\widehat{\mathbf{R}} \triangleq \mathbf{y} \mathbf{y}^\dagger / K$  is the empirical estimate of the sample covariance matrix. The evaluation of gradient (VI.32) essentially involves the calculus of inverse matrix  $\mathbf{C}^{-1}$  and some additional matrix products, so that each iteration requires  $\mathcal{O}(p^3 + (K+N)p^2 + KNp)$  complex multiplications.

In practice, the use of a conjugate gradient method a conjugate gradient method [30, 31] is preferable to a strict steepest descent approach. In addition, the value of steplength  $\mu^{(m)}$  is chosen so as to be close to the minimum  $\mu_{\min}$  of function  $f(\mu) = \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}^{(m-1)} - \mu \mathbf{d}^{(m-1)})$ , where  $\mathbf{d}^{(m)}$  denotes the  $(n)$ th descent direction. No highly accurate computation of  $\mu_{\min}$  is actually needed, so that minimization of  $f(\mu)$  is coarsely performed using a one-dimensional minimization technique.

## 6 Estimation of hyperparameters

### 6.1 MGL approach

Up to this point, the method is said “supervised” since specification of hyperparameter values is required. In this subsection the problem of estimating the hyperparameters from the available data is addressed. For this purpose, several techniques have been designed in the related context of BG deconvolution [19, 20, 23, 32]. We have selected a generalized marginal likelihood approach [23] because it provides a good trade-off between a reliable estimate and a low computational burden. This technique consists in estimating *simultaneously*  $\boldsymbol{\theta}$  and the hyperparameters set  $\mathcal{H}$  through maximization of the Marginal Generalized Likelihood (MGL) function  $p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}; \sigma^2, \sigma_n^2) L(\boldsymbol{\theta}; \lambda)$ , which is the joint probability density of  $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$ . As a function of  $\boldsymbol{\theta}$ , it is proportional to the marginal posterior likelihood  $L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y})$ , so the MMAP estimate  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$  is also the maximizer of  $L$  w.r.t.  $\boldsymbol{\theta}$  when  $\mathcal{H}$  is held constant. Accordingly, we shall extend the notation  $\mathcal{C}$  introduced in (VI.14) to designate the negative logarithmic form of MGL:

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{H}) = \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k^\dagger \mathbf{B}^{-1} \mathbf{y}_k + K \ln |\mathbf{B}| - p \ln \lambda + \lambda \delta. \quad (\text{VI.33})$$

Minimization of  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{H})$  w.r.t.  $\boldsymbol{\theta}$  and  $\mathcal{H}$  may be suboptimally performed using the iterative two-step scheme

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_i = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}; \widehat{\mathcal{H}}_{i+1}) \quad (\text{VI.34})$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_{i+1} = \arg \min_{\mathcal{H}} \mathcal{C}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_i; \mathcal{H}) \quad (\text{VI.35})$$

often referred to as a “Block component method” [20]. The first step (VI.34) identifies with the supervised procedure. The second step (VI.35) amounts to a three dimensional optimization.

### 6.2 Estimation of parameter $\lambda$

Estimation of intensity  $\lambda$  can be achieved separately since only the prior term  $L(\boldsymbol{\theta}; \lambda)$  depends on  $\lambda$ . Then differentiating (VI.33) w.r.t.  $\lambda$  results in the following MMGL estimate:

$$\widehat{\lambda} = \frac{\widehat{p}}{\widehat{\delta}}. \quad (\text{VI.36})$$

Note that  $\lambda$  and  $\widehat{\lambda}$  are not dimensionless quantities, but rather numbers of events per angular sector. Accordingly, the numerical value of  $\widehat{\lambda}$  depends on the angular unit. On the other hand, Proposition 2 states that the behaviour of supervised estimation of  $\boldsymbol{\theta}$  becomes pathological if  $\lambda$  is strictly greater than one. This is not only a potential source

of degeneracy, but also a source of arbitrariness regarding the choice of angular unit that is not mentioned in [26], though it may partly explain the degeneracies reported by Kwakernaak. The intrinsic problem actually lies in the behaviour of the MMAP estimator itself, which depends on the value of a dimensioned quantity relatively to a constant. A drastic solution would be to replace the MMAP estimator by another Bayesian estimator. However, we found no substitute candidate that would provide the same trade-off between numerical complexity and performance. Instead, a more pragmatic approach is to ensure that  $\lambda$  is lower than one. For this purpose, we propose to choose the sampling rate  $\delta/L$  used to generate the discrete grid  $\mathcal{D}$  as the angular unit, since the value of  $L$  must be already be chosen high enough with regard to the expected number of sources and to the number  $N$  of sensors. The result is  $\hat{\lambda} = \hat{p}/L$ , which stays lower than one in practice. Overflow can be easily prevented anyway in the SMLR step, where  $\hat{p}$  is updated.

### 6.3 Estimation of parameters $\sigma^2$ and $\sigma_n^2$

We now discuss the problem of minimizing (VI.33) w.r.t. the variances  $\sigma^2$  and  $\sigma_n^2$ . As shown in [23], this may be reduced to a one-dimensional optimization problem using an appropriate change of variable, for instance  $(\sigma^2, \sigma_n^2) \rightarrow (\alpha, \sigma_n^2)$ , with  $\alpha \triangleq \sigma^2/\sigma_n^2$ . If we introduce matrix  $\mathbf{C}_\alpha \triangleq \alpha \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} + \mathbf{I}$  into (VI.14) instead of matrix  $B$ , we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\theta; \alpha, \sigma_n^2, \lambda) &= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k^\dagger \left( \mathbf{I} - \alpha \mathbf{A} \mathbf{C}_\alpha^{-1} \mathbf{A}^\dagger \right) \mathbf{y}_k \\ &\quad + K \ln |\mathbf{C}_\alpha| + KN \ln \sigma_n^2 - p \ln \lambda, \end{aligned}$$

which immediately provides

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{KN} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k^\dagger \left( \mathbf{I} - \alpha \mathbf{A} \mathbf{C}_\alpha^{-1} \mathbf{A}^\dagger \right) \mathbf{y}_k \quad (\text{VI.37})$$

and the corresponding expression of the minimum value, up to constant terms:

$$\mathcal{C}(\theta; \alpha, \hat{\sigma}_n^2, \lambda) = KN \ln \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k^\dagger \left( \mathbf{I} - \alpha \mathbf{A} \mathbf{C}_\alpha^{-1} \mathbf{A}^\dagger \right) \mathbf{y}_k + K \ln |\mathbf{C}_\alpha| - p \ln \lambda.$$

Finally one-dimensional minimization w.r.t.  $\alpha$  can be coarsely performed on a logarithmic grid.

The whole procedure converges in a small number of iterations (no more than ten in our practical experiments) and it is easy to implement.

## 7 Simulation results

Some simulation results are now presented. They first address the problem of spectral analysis when the signal consists of superimposed complex sinusoids embedded in

### 7. Simulation results

### Page 101

noise. Second, we focus more specifically on the problem of DOA estimation. Detection and estimation performances are discussed for each type of problem. The PG method is compared with AIC and MDL criteria for the detection and with the subspace-based method ESPRIT [5] and the SML method for the estimation. Note that the latter is specifically devised for multiexperiment situations. Hence it will not be used in the first part devoted to the frequency estimation problem. Only correct detection results obtained by the PG method were considered in order to compare estimation performances of all methods. The ESPRIT and SML estimators were applied with the correct given number of sources. In the time series analysis problem, the complex spectrum to be restored is modeled as a PG pulse process in the frequency domain. Consequently, previous developments also apply, simply substituting frequency for angle. Both supervised and unsupervised versions of our algorithm have been used for simulations.

### 7.1 Single experiment case: cycloidal signal analysis

Here we consider the signal often used as reference for simulation (see [1, p. 436] [8]), namely,

$$y[n] = \exp(j2\pi\nu_1 n) + \exp(j2\pi\nu_2 n + j\pi/4) + w[n]$$

for  $n = 0, \dots, 24$  with normalized frequencies  $\nu_1 = 0,50$  and  $\nu_2 = 0,52$ . The complex white noise  $w[n]$  is Gaussian and circular with zero mean and variance  $\sigma_w^2$ . The two frequencies are separated of exactly one half Fourier resolution so that a naive approach such Fourier's type techniques fails to separate them. A single experiment case is considered. First, detection performances obtained by the PG approach are compared with both AIC and MDL criteria for several signal-to-noise (SNR) values (Fig. VI.3), where SNR is defined as in [1, p. 436] [8] as  $\text{SNR} = 10 \log_{10}(1/\sigma_w^2)$ . Detections performances are examined in terms of probability of detecting  $\hat{p} = 2$ . For each SNR value, 300 independent trials were generated. The supervised version of the PG method was used with the following hyperparameter values  $\lambda = 8 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma^2 = 1$  and the ‘true’ value for  $\sigma_w^2$ . Parameter  $L$  was set to 250. Results depicted on Fig. VI.3 show an efficient detection achieved by PG and a significant improvement compared to information theoretic criteria, particularly at low SNR values. Corresponding estimation results are shown on Fig. VI.4. The lower frequency estimate is assigned to  $\nu_1$  while the upper one is assigned to  $\nu_2$ . Mean square errors (MSE) of  $\nu_2$  have been evaluated and plotted on Fig. VI.4. Results for  $\nu_1$  are similar. The PG method provides more accurate frequency estimates than ESPRIT. As demonstrated, the PG method significantly outperforms the reference methods in terms of both detection and estimation. Such results suggest that PG method should work very well in the context of as little data as a single snapshot.

## 7.2 DOA estimation problem

In all the following examples, a ULA of  $N$  omnidirectional sensors with interelement spacing equal to half a wavelength is used and data sets are generated according to the model (VI.1). The array signal-to-noise ratio is defined as the ratio of the power of each source  $\sigma_s^2$  to the power  $\sigma_n^2$  of the spatially white noise, *i.e.*,  $\text{SNR} = 10 \log_{10}(\sigma_s^2/\sigma_n^2)$  in dB.

In order to evaluate detection performances as a function of angle separation, a simulation was made in the situation of two uncorrelated sources impinging on a 4-sensors ULA from angles  $\theta_1$  and  $\theta_2$  such that  $\theta_1 = -\theta_2$ .  $K = 10$  snapshots were collected and SNR was 10 dB for each source. Angle separation  $|\theta_1 - \theta_2|$  ranges between 1 deg. and 10 deg. in 0.5 deg. increments since the case of practical interest is of closely spaced sources. Note that a separation of 10 degrees corresponds to a quarter of the Rayleigh angle resolution limit. Here, the unsupervised PG method (referred to as PG+MMGL) was used and compared with AIC and MDL criteria for detection. The relatively small number of snapshots leads to a bad estimate of sample covariance matrix and consequently yields unreliable results for both AIC and MDL (see Fig. VI.5). Estimation results of  $\theta_1$  are depicted on Figs. VI.6-VI.7. Unlike ESPRIT and SML estimators, the PG+MMGL approach appears to provide relatively accurate estimates in this context. Results for angle  $\theta_2$  are similar. Once again, the Bayesian method is proved to be well-behaved when few samples are considered, with clearly improved performances.

To examine more precisely this fact, detection performances have been evaluated as a function of the number of snapshots. For this purpose, the scenario was the same as the previous one, except that this time we fixed the angle locations to -5 and 5 degrees. The probability of correct detection is plotted on Fig. VI.8 for PG+MMGL, AIC and MDL. As expected, pretty good detection performances are obtained with the Bayesian method, particularly when a small number of snapshots is available. MDL performances are identical to the PG ones at about 80 snapshots. Corresponding estimates of the number of sources are shown on Fig. VI.9. In this respect, the PG method seems to be asymptotically (for large  $K$ ) unbiased while you can observe the well-known bias of the AIC that tends to overestimate the number of sources as well as the well-known consistency of the MDL [12]. Estimation results, examined in terms of bias and standard deviation, are respectively shown in Figs. VI.10-VI.11. This experiment demonstrates the satisfactory behavior of the Bayesian method in comparison to the ESPRIT and SML estimators as well as the asymptotic consistency of methods. As already mentioned, for the correct given source number and a diagonal source correlation matrix, the proposed method corresponds exactly to the SML estimator whose asymptotic consistency has been proved [4].

In order to evaluate the robustness of our approach with regard its assumption of

## 8. Conclusion

equipowered sources, we considered the following scenario: two sources, with SNRs of 10 dB and 13 dB impinge on a 8-sensors ULA. The sources are located at symmetric angles -3 and 3 degrees respectively, which corresponds to about one third of the Rayleigh angle resolution limit. Performances were also examined as a function of the number of snapshots. The unsupervised PG method was used with initial values precised on Fig. VI.12. Once again, the PG+MMGL approach exhibits particularly good detection performances (Fig. VI.12-Fig. VI.13) for small data sets compared to information-based criteria. However, experiment results show a transient zone during which AIC and MDL criteria have better performances than the proposed approach. This feature is due to its sensitivity w.r.t. the difference between the source powers. For large-data samples, all these methods have identical performances. Corresponding estimation bias and standard deviation are depicted on Fig. VI.14 and Fig. VI.15 respectively. The obtained results show comparable performances of SML and PG+MMGL estimators for small data sets, up to ten snapshots. They also demonstrate the slight sensitivity of PG+MMGL with regard to its assumption of equipowered sources, essentially in terms of standard deviation.

## 8 Conclusion

To conclude, our methodological contribution lies in the development of a unique localization procedure for carrying out both underlying detection and estimation problems. The method is derived within a Bayesian estimation framework. The basic idea of such an approach is to incorporate, via the Bayes' rule, some prior information of a qualitative nature. In this respect, a Poisson-Gaussian prior model has been introduced to select a class of admissible solutions. This choice is not restrictive since other ones could be made. The information required for other classical high resolution methods, *i.e.*, the number of sources, is instead of a quantitative nature. In some sense, the usual estimation of the source number has been transferred to the choice of hyperparameters. Nonetheless, it is a matter of assessing rough rather than exact values. In addition, a simple procedure devoted to their estimation has been provided. On the other hand, our algorithmic contribution is an original and powerful iterative optimization technique with performs alternate optimization over discrete and continuous sets. From an algorithmic standpoint, the proposed method does not suffer from the classical algebraic constraint related to a bound on the number of resolvable sources. In this respect, the number of sources may be greater than the number of sensors. However, the possibly remaining identifiability problems are automatically raised according to the maximal parsimony. Compared to preexisting methods, the PG method behaves particularly well for small data sets, even for a single experiment. Extension of this approach to any sensors geometry and characteristics could be achieved without any difficulty. Besides, we see no obstacle to extend those principles so as to carry out the estimation of the source cor-

relation matrix, as required for the SML approach for sufficiently large data sets. Based on a PG modeling, the resulting extension would simply lead to a regularized version of the SML method. Further developments in that way are currently studied as well as asymptotic performances.

## 9 Figures

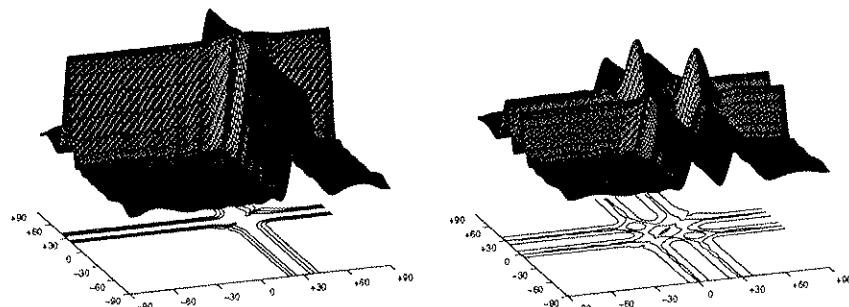


FIG. VI.1 - Both figures represent the logarithm of the likelihood function given by (VI.10) in two different contexts. A ULA of eight sensors spaced one half a wavelength apart is illuminated by two uncorrelated sources and data collected at sensor outputs consist of 20 snapshots. On left, the angle spacing of the sources (5 deg.) equals one third of the Rayleigh resolution limit: the maximum of the detection criterion is clearly less resolved than in the situation (on right) where both sources are not so closely spaced (0 and 30 deg.). Note also the symmetry of the functions w.r.t. DOAs and the presence of many local minima.

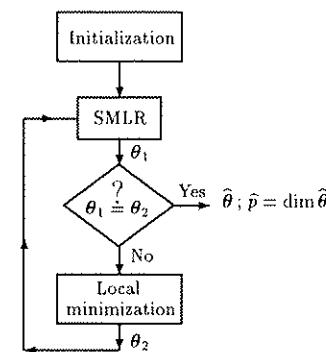


FIG. VI.2 - Iterative scheme of the algorithm.

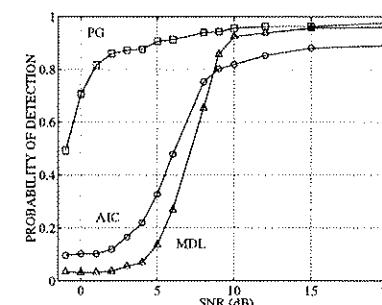


FIG. VI.3 -  $\Pr(\hat{p} = 2)$  as a function of SNR using PG, AIC and MDL.

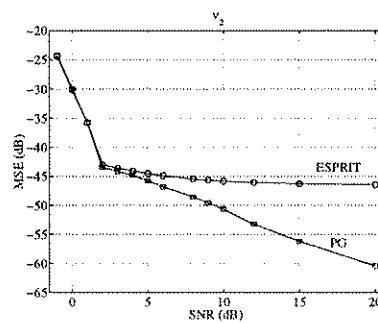


FIG. VI.4 - Estimation results corresponding to frequency  $\nu_2$  obtained with PG and ESPRIT methods. Results for  $\nu_1$  are quite similar.

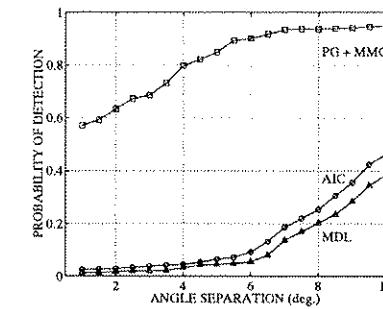


FIG. VI.5 - Probability  $\text{Pr}(\hat{p} = 2)$  versus angle separation  $|\theta_1 - \theta_2|$  with  $\theta_1 = -\theta_2$  of two noncoherent and equipowered sources, each with  $\text{SNR}=10$  dB. The array is a 4-sensors ULA. Only  $K = 10$  snapshots have been collected. Each point is obtained with the unsupervised PG method with the following initial hyperparameters values:  $\lambda^{(0)} = 0.833$ ,  $\sigma^2(0) = 1.4$  and  $\sigma_n^2(0) = 0.05$  and after averaging over 800 independent trials. For the SMLR procedure,  $L$  was set to 24.

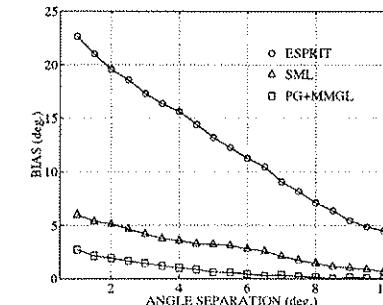


FIG. VI.6 - Estimation bias of angle  $\theta_1$  versus angle separation. These results correspond to the experiment described in Fig. VI.5.

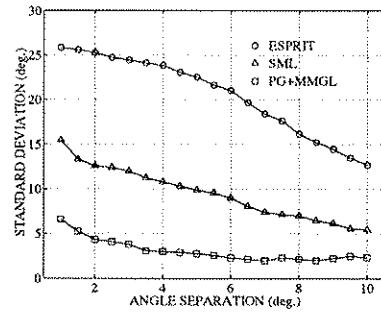


FIG. VI.7 - Estimation standard deviation of angle  $\theta_1$  versus angle separation. These results correspond to the experiment described in Fig. VI.5.

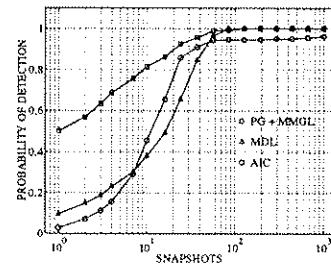


FIG. VI.8 - Probability  $\text{Pr}(\hat{p} = 2)$  versus number of snapshots. Two noncoherent sources are located at angles ( $\theta_1 = -5 \text{ deg.}$ ,  $\theta_2 = 5 \text{ deg.}$ ) with equal powers (SNR=10 dB for each source). The context is exactly the same as in Fig. VI.5 with identical initial hyperparameters.

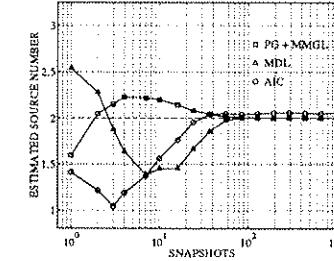


FIG. VI.9 - Averaged estimates of the number of detected sources corresponding to the simulation described in Fig. VI.8.

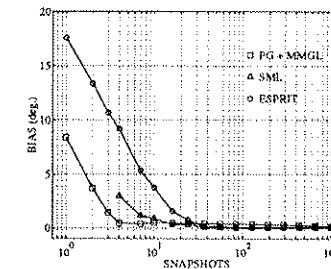


FIG. VI.10 - Estimation bias of  $\theta_1 = -5 \text{ deg.}$  versus number of snapshots. These results are related to the experiment described in Fig. VI.8. The first three points are not plotted for the SML method since obtained results were meaningless, which is due to a lack of data.

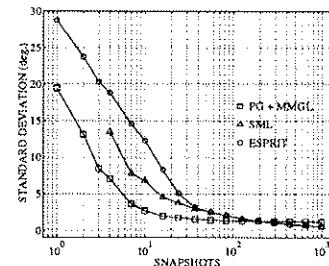


FIG. VI.11 - Estimation standard deviation of  $\theta_1 = -5$  deg. versus number of snapshots. These results are related to the experiment described in Fig. VI.8. The first three points are not plotted for the SML method since obtained results were meaningless, which is due to a lack of data.

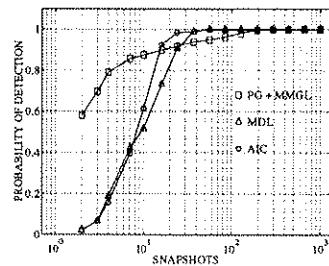


FIG. VI.12 - Probability  $\Pr(\hat{p} = 2)$  versus number of snapshots. Two sources located at angles ( $\theta_1 = -3$  deg.,  $\theta_2 = 3$  deg.) with respective SNRs 10 dB and 13 dB impinge on a 8-sensors ULA. For the PG+MMGL method, initial hyperparameters are as follows:  $\lambda^{(0)} = 0.416$ ,  $\sigma^2(0) = 1.7$  and  $\sigma_n^2(0) = 0.07$ . Each point is obtained after averaging over 800 independent trials. For the SMLR procedure,  $L$  was set to 48.

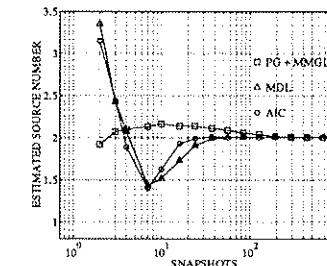


FIG. VI.13 - Averaged estimates of the number of detected sources corresponding to Fig. VI.12.

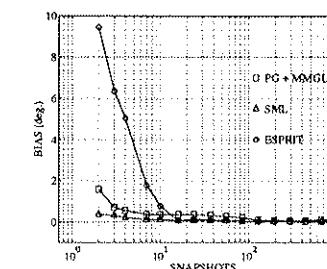


FIG. VI.14 - Mean estimation bias of  $(\theta_1 - \theta_2)/2$  versus number of snapshots. These results correspond to the experiment described in Fig. VI.12.

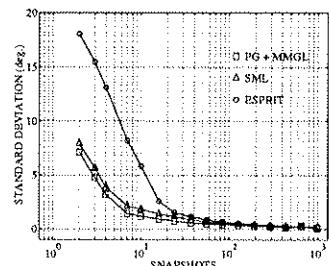


FIG. VI.15 - Mean estimation standard deviation ( $sd$ ), namely,  $(sd(\theta_1)+sd(\theta_2))/2$  versus number of snapshots. These results correspond to the experiment described in Fig. VI.12.

## 10 References

- [1] S. M. Kay and S. L. Marple, "Spectrum analysis-a modern perspective", *Proc. IEEE*, vol. 69, no. 11, pp. 1380-1419, November 1981.
- [2] A. G. Jaffer, "Maximum likelihood direction finding of stochastic sources: A separable solution", in *Proc. IEEE ICASSP*, 1988, pp. 2893-2896.
- [3] J. F. Böhme, "Estimation of spectral parameters of correlated signals in wavefields", *Signal Processing*, vol. 11, pp. 329-337, 1986.
- [4] M. Wax, "Detection and localization of multiple sources via the stochastic signals model", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. SP-39, no. 11, pp. 2450-2456, November 1991.
- [5] R. Roy and T. Kailath, "ESPRIT ~ Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques", *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-37, no. 7, pp. 984-995, July 1989.
- [6] G. Bienvenu and L. Kopp, "Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach", *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-31, pp. 1235-1248, October 1983.
- [7] R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation", *IEEE Trans. Ant. Propag.*, vol. AP-34, no. 3, pp. 281-290, Mar. 1986.
- [8] Y. Bresler and A. Macovski, "Exact maximum likelihood parameter estimation of superimposed exponential signals in noise", *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, no. 5, pp. 1081-1089, October 1986.
- [9] I. Ziskind and M. Wax, "Maximum likelihood localization of multiple sources by alternating projection", *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-36, no. 10, pp. 1553-1560, October 1988.
- [10] H. Akaike, "A New Look at the Statistical Model Identification", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-19, no. 6, pp. 716-723, December 1974.

## 10. References

- [11] J. Rissanen, "Modeling by shortest data description", *Automatica*, vol. 14, pp. 465-471, 1978.
- [12] M. Wax and T. Kailath, "Detection of signals by information theoretic criteria", *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. 33, no. 2, pp. 387-392, April 1985.
- [13] F. Tuteur and Y. Rockah, "The covariance difference method in signal detection", in *Proc. 3th ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, November 1986, pp. 120-122.
- [14] Q. T. Zhang, K. M. Wong, P. C. Yip, and J. L. Reilly, "Statistical analysis of the performance of information theoretic criteria in the detection of the number of signals in array processing", *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. 37, no. 10, pp. 1557-1567, October 1989.
- [15] H. Wang and M. Kaveh, "on the performance of signal subspace processing, Part I: Narrow-band systems", *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, no. 5, pp. 1201-1209, October 1986.
- [16] V. Arya and H. Holden, "Deconvolution of seismic data-an overview", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. GE-16, pp. 95-98, 1978.
- [17] J. Idier and Y. Goussard, "Multichannel seismic deconvolution", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. GE-31, no. 5, pp. 961-979, September 1993.
- [18] J. J. Kormylo and J. M. Mendel, "Maximum-likelihood detection and estimation of Bernoulli-Gaussian processes", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp. 482-488, 1982.
- [19] J. M. Mendel, "Optimal seismic deconvolution", *New-York: Academic*, 1983.
- [20] J. Goutsias and J. M. Mendel, "Maximum-likelihood deconvolution: An optimization theory perspective", *Geophysics*, vol. 51, pp. 1206-1220, 1986.
- [21] Y. Goussard, G. Demont, and J. Idier, "A new algorithm for iterative deconvolution of sparse spike trains", in *Proc. IEEE ICASSP*, Albuquerque, U.S.A., April 1990, pp. 1547-1550.
- [22] M. Lavielle, "Bayesian deconvolution of Bernoulli-Gaussian processes", *Signal Processing*, vol. 33, pp. 67-79, 1993.
- [23] F. Champagnat, Y. Goussard, and J. Idier, "Unsupervised deconvolution of sparse spike trains using stochastic approximation", *to appear in IEEE Trans. Signal Processing*, 1996.
- [24] P. Duvaut and F. Dublanchet, "Une méthode d'analyse de sinusoïdes complexes par déconvolution du périodogramme: Expulse", *Traitem. du Signal*, vol. 12, no. 3, pp. 239-253, September 1995.
- [25] F. Dublanchet, P. Duvaut, and J. Idier, *Complex sinusoid analysis by Bayesian deconvolution of the discrete Fourier transform*, Maximum entropy and Bayesian methods. Kluwer Academic Publ., Santa Fe, U.S.A., K. Hanson edition, 1995.

- [26] H. Kwakernaak, "Estimation of pulse heights and arrival times", *Automatica*, vol. 16, pp. 367-377, 1980.
- [27] O. Macchi, *Processus ponctuels et coïncidences*, PhD thesis, Université de Paris-Sud, Orsay, January 1972.
- [28] P. Stoica, B. Ottersten, M. Viberg, and R. L. Moses, "Maximum likelihood array processing for stochastic coherent sources", *Signal Processing*, vol. 44, no. 1, pp. 96-105, January 1996.
- [29] Y. Goussard, *Déconvolution de processus aléatoires non-gaussiens par maximisation de vraisemblances*, PhD thesis, Université de Paris-Sud, Orsay, 1989.
- [30] E. Polak, *Computational methods in optimization*, Academic Press, New York, 1971.
- [31] W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, and W. Vetterling, *Numerical recipes, the art of scientific computing*, Cambridge Univ. Press, New York, 1986.
- [32] Q. Cheng, R. Chen, and L. Ta-Hsin, "Simultaneous wavelet estimation and deconvolution of reflection seismic signals", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 34, no. 2, pp. 377-384, March 1996.

## CHAPITRE VII

### CONCLUSION & PERSPECTIVES

Ces travaux ont pour application essentielle la localisation de sources en traitement d'antenne bande-étroite et l'analyse spectrale de raies pures. Dans le cadre de cette étude, les phénomènes physiques mis en jeu répondent à un modèle semi-linéaire dont l'analogie structurelle avec les modèles convolutionnels a été mise en relief. Les problèmes étudiés sont formulés comme des problèmes inverses et abordés dans le contexte de l'estimation bayésienne. D'un point de vue méthodologique, l'estimation du nombre de sources et leur localisation sont traitées conjointement : un unique critère est formé, qui inclut la dimension variable de la solution. Une telle démarche est conceptuellement plus satisfaisante que l'approche classique, bien qu'au prix d'une charge de calcul sensiblement plus élevée, néanmoins raisonnable. Elle montre que les problèmes étudiés peuvent être résolus dans leur globalité. Les résultats obtenus sur données synthétiques en confirment le bien-fondé, en particulier dans des conditions difficiles de rapport signal-à-bruit et à faible nombre d'observations, situations dans lesquelles la méthodologie traditionnelle est mise en échec. Les seuils classiques de détection sont largement franchis tandis que les performances de localisation sont voisines de celles des méthodes fondées sur le principe du maximum de vraisemblance. A cet apport méthodologique s'ajoute une contribution algorithmique puisque nous avons montré l'intérêt des techniques d'exploration combinatoire pour optimiser les critères usuels de maximum de vraisemblance, éventuellement régularisés.

Parmi différents modèles *a priori* plus ou moins aptes à représenter le caractère impulsionnel de la solution fréquentielle ou angulaire, nous nous sommes d'abord intéressés aux processus composites Bernoulli-Gaussien et à l'estimateur du maximum *a posteriori*, marginalisé par rapport aux amplitudes des raies ou des sources, qui entre dans la classe des estimateurs du maximum de vraisemblance régularisés. Le prolongement analytique du modèle d'observation au voisinage de la grille discrète définie par le processus de Bernoulli permet de réaliser un compromis entre les avantages et inconvénients liés à la nature discrète de ce processus. L'approche qui en résulte constitue une alternative intéressante, calculatoirement peu coûteuse grâce aux techniques d'exploration combi-

natoire inspirées du domaine de la déconvolution impulsionnelle. Elle souffre néanmoins de plusieurs limitations, formelles et algorithmiques. Pallier à ces insuffisances exige, sur un plan théorique, le passage à un modèle continu.

Le modèle Poisson-Gaussien est obtenu par filiation directe de son homologue Bernoulli-Gaussien. Cette extension constitue une partie importante de ce travail. Elle requiert la définition de la vraisemblance *a priori* d'un tel processus et soulève des difficultés algorithmiques, résolues de manière satisfaisante en alternant des procédures d'optimisation sur des ensembles discrets et continus. Les progrès escomptés par rapport à la version précédente ont été confirmé par des simulations, au prix d'une charge de calcul nettement plus importante.

Evidemment, l'intérêt de telles approches ne se limite pas aux problèmes d'analyse spectrale et de traitement d'antenne. La première application qu'il est légitime de mentionner – puisqu'elle est à l'origine de cette contribution – est la déconvolution impulsionnelle et plus particulièrement la déconvolution Poisson-Gaussienne qui n'a pas, à ce jour, reçu de réponse satisfaisante. Ce problème possède de nombreuses applications dans les domaines de la géophysique, du contrôle non-destructif et du génie biomédical. La synthèse de Fourier et la tomographie sont aussi des exemples d'application envisageables.

Dans le cadre du traitement d'antenne et de l'analyse spectrale, les perspectives se séparent principalement en cinq axes :

- Dans le cadre d'une analyse bande-étroite, l'extension à une géométrie quelconque du réseau de capteurs, pourvu qu'elle soit connue, ne semble soulever aucune difficulté. De même, la prise en compte de diverses non-stationnarités du bruit de mesure (connues *a priori*) est réalisable sans remettre en cause la structure et la simplicité des algorithmes.
- L'estimation de la densité du processus de Poisson par MVG dépend du choix arbitraire d'une unité angulaire ou spectrale, caractéristique peu satisfaisante sur un plan théorique. Au prix d'une complexité calculatoire accrue, on pourrait envisager l'estimation des hyperparamètres par MV, c'est-à-dire en maximisant  $p(\mathbf{y}; \mathcal{H})$  par rapport à  $\mathcal{H}$  par un algorithme de type Expectation-Maximization ou une version stochastique [DEMPSTER et coll. 1977, CELEUX & DIEBOLT 1986].
- Plus spécifiquement au domaine du traitement d'antenne, l'étude analytique de l'estimateur du maximum de vraisemblance stochastique paraît digne d'intérêt. Elle devrait permettre de conclure à la dégénérescence ou non de cet estimateur et de révéler, le cas échéant, si celui-ci permet à lui seul d'estimer le nombre de sources ; dans le cas de sa dégénérescence, il sera régularisé. Dans les deux situations, nous

disposons de moyens algorithmiques efficaces pour optimiser ce critère. L'intérêt de cet estimateur est de fournir une estimée de la matrice de corrélation des sources.

- L'extension à la calibration d'antenne semble plus délicate : elle exige d'inclure tous les paramètres inconnus du modèle de propagation et de réception des signaux dans l'ensemble des paramètres à estimer, tels que les gains complexes des capteurs, leur couplage, l'incertitude sur leurs positions (antenne déformable), voire la géométrie complète du réseau de capteurs. Il convient de procéder progressivement. Les gains et le couplage des capteurs interviennent de manière séparable dans le modèle d'observation et, dans le cadre de l'estimation bayésienne, un modèle gaussien complexe pour décrire ces paramètres semble adapté à leur estimation. De même, un modèle gaussien peut être utilisé pour rendre compte des perturbations aléatoires de la forme de l'antenne. En revanche, l'estimation des vecteurs directionnels semble un point particulièrement délicat, en raison de leur non-stationnarité spatiale.
- Enfin, nous abordons les traitements bidimensionnels. La poursuite de trajectoires de sources mobiles dans un scénario non stationnaire requiert la prise en compte d'une information supplémentaire relative à la continuité temporelle du phénomène. Le pendant en analyse spectrale est l'analyse temps-fréquence. De même, un traitement large-bande ne peut être considéré comme une succession de traitements bande-étroite indépendants : il nécessite lui aussi d'incorporer une information *a priori* concernant la continuité du contenu spectral des sources.

## ANNEXE A

### OPÉRATEUR À ARGUMENTS DISCRETS

**L**E MODÈLE d'observation temporel, linéarisé au premier ordre autour de la grille de discréttisation  $\mathcal{G}$  se met sous la forme (voir (V.16))

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b} \quad (\text{A.1})$$

avec les quantités partitionnées  $\mathbf{A} = [\mathbf{E} \mid \mathbf{F}]$  et  $\mathbf{x} = [\mathbf{s}^t \mid \mathbf{r}^t]^t$ . Les arguments de l'opérateur  $\mathbf{A}$  sont les fréquences discrètes de la grille  $\mathcal{G}$ , uniformément réparties sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Nous rappelons en outre que  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  sont de tailles identiques ( $N \times \alpha N$ ) et qu'elles sont liées par la relation

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} \odot \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad \mathbf{N} \triangleq -j2\pi \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ N-1 & N-1 & \cdots & N-1 \end{bmatrix}.$$

Nous proposons dans cette annexe d'étudier les propriétés relatives à l'opérateur  $\mathbf{A}$ , en particulier son conditionnement ou, de manière équivalente, celui de la matrice normale du problème  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ , ainsi que les propriétés structurelles de cette dernière matrice.

#### 1 Evaluation analytique des valeurs propres de $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$

Le système (A.1) étant surdimensionné, la matrice  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$  possède au moins  $(2\alpha - 1)N$  valeurs propres (v.p.) nulles et au plus  $N$  v.p. non nulles; ces dernières sont les v.p. de la matrice conormale  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$ .

Afin d'évaluer le spectre de cette matrice, on propose de réordonner les colonnes de la matrice  $\mathbf{E}$  selon :

$$\mathbf{E}' = [\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_\alpha] \quad (\text{A.2})$$

où chaque sous-matrice  $\mathbf{E}_k$  de taille  $(N \times N)$  est construite à partir de  $\mathbf{E}$  en concaténant les colonnes d'indices  $k, k + \alpha, k + 2\alpha, \dots, k + k'\alpha, \dots, k + (N-1)\alpha$ . Pour tout  $k$  compris

entre 1 et  $\alpha$ , la matrice  $\mathbf{E}_k$  s'écrit :

$$\mathbf{E}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{j2\pi \frac{k-1}{N}} & e^{j2\pi \frac{k}{N}} & \cdots & e^{j2\pi \frac{k+N-2}{N}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ e^{j2\pi \frac{(N-1)(k-1)}{N}} & e^{j2\pi \frac{(N-1)k}{N}} & \cdots & e^{j2\pi \frac{(N-1)(k+N-2)}{N}} \end{bmatrix}.$$

On applique la même transformation à la matrice  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F}' = [\mathbf{F}_1 \ \mathbf{F}_2 \ \cdots \ \mathbf{F}_\alpha] \quad (\text{A.3})$$

avec

$$\forall k = 1, \dots, \alpha : \mathbf{F}_k = \mathbf{N} \odot \mathbf{E}_k \quad (\text{A.4})$$

où  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{E}_k$  sont définies ci-dessus.

Une telle transformation, qui n'est autre qu'une permutation des colonnes de la matrice  $\mathbf{A}$ , laisse invariant le spectre de v.p. de la matrice conormale, c'est-à-dire

$$\text{sp}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger) = \text{sp}(\mathbf{A}'\mathbf{A}'^\dagger) \quad (\text{A.5})$$

avec

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{E}' \mid \mathbf{F}'] \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{A}'\mathbf{A}'^\dagger \triangleq \sum_{k=1}^{\alpha} \mathbf{E}_k \mathbf{E}_k^\dagger + \sum_{k=1}^{\alpha} \mathbf{F}_k \mathbf{F}_k^\dagger. \quad (\text{A.7})$$

• Or  $\mathbf{E}_k \mathbf{E}_k^\dagger$  est une matrice *proportionnelle à l'identité*: en effet, les termes non diagonaux sont nuls parce qu'ils sont proportionnels à la somme des  $N$  racines  $N$ -ième de l'unité et les termes diagonaux sont égaux à la norme des colonnes de  $\mathbf{E}_k$ , soit  $N$ . Ainsi,

$$\forall k = 1, \dots, \alpha : \mathbf{E}_k \mathbf{E}_k^\dagger = N \mathbf{I}_N$$

et par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \mathbf{E}_k \mathbf{E}_k^\dagger = \alpha N \mathbf{I}_N. \quad (\text{A.8})$$

• Quant aux matrices  $\mathbf{F}_k \mathbf{F}_k^\dagger$ , elles sont toutes *identiques* et *diagonales*. En effet, en partant de la définition (A.4), on montre sans difficulté: d'une part, que les termes non diagonaux de  $\mathbf{F}_k \mathbf{F}_k^\dagger$  sont nuls parce qu'ils sont proportionnels à la somme des  $N$  racines  $N$ -ième de l'unité et d'autre part, que les termes diagonaux s'expriment selon :

$$\forall k = 1, \dots, \alpha : (\mathbf{F}_k \mathbf{F}_k^\dagger)_{nn} = \sum_{i=1}^N 4\pi^2 (n-1)^2 = 4\pi^2 N(n-1)^2, \quad n = 1, \dots, N.$$

## 2. Propriétés de la matrice $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ et du vecteur $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}$

Il vient alors explicitement :

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \mathbf{F}_k \mathbf{F}_k^\dagger = \text{diag} \left\{ 0, 4\pi^2 \alpha N, \dots, 4\pi^2 (N-1)^2 \alpha N \right\}. \quad (\text{A.9})$$

• Finalement, la combinaison de (A.7), (A.8), (A.9) et (A.5) conduit à l'expression analytique du spectre de la matrice conormale :

$$\text{sp}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger) = \left\{ \alpha N, \alpha N (1+4\pi^2), \dots, \alpha N (1+4\pi^2(N-1)^2) \right\}.$$

**Conclusion** La matrice normale  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$  est constituée de  $(2\alpha-1)N$  v.p. nulles et de  $N$  v.p. non nulles telles que :

$$\text{sp}(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}) = \left\{ 0, \dots, 0, \underbrace{\alpha N, \alpha N (1+4\pi^2), \dots, \alpha N (1+4\pi^2(N-1)^2)} \right\}.$$

Les valeurs singulières de l'opérateur  $\mathbf{A}$  sont les racines carrées non négatives des v.p. de la matrice normale  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ , d'où le spectre tracé sur la figure V.2.

Enfin, notons que la même décomposition (A.2)–(A.3) et le même raisonnement s'appliquent à la matrice  $\widetilde{\mathbf{A}}$  du modèle fréquentiel en vertu de la relation de dualité qui existe entre  $\mathbf{A}$  et  $\widetilde{\mathbf{A}}$ , dualité réalisée par la TFD normalisée (on rappelle que les colonnes de  $\mathbf{A}$  et  $\widetilde{\mathbf{A}}$  sont liées par une simple TFD normalisée).

## 2 Propriétés de la matrice $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ et du vecteur $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}$

**Circularité** On propose de montrer dans cette section que la matrice normale  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$  est circulante par blocs. Par définition, elle est à symétrie hermitienne et on a :

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{E}^\dagger \mathbf{E} & \mathbf{E}^\dagger \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^\dagger \mathbf{E} & \mathbf{F}^\dagger \mathbf{F} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Chaque bloc constitutif de la matrice normale présente une structure circulante. En effet, si  $k$  et  $\ell$  désignent respectivement la ligne  $k$  ( $1 \leq k \leq N_F$ ) et la colonne  $\ell$  ( $1 \leq \ell \leq N_F$ ), alors en partant de la définition des matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$ , les termes génériques des blocs ci-dessus s'expriment selon

$$(\mathbf{E}^\dagger \mathbf{E})_{k,\ell} = \sum_{n=0}^{N-1} \exp \left\{ j2\pi n \frac{(\ell-k)}{N_F} \right\} \quad (\text{A.11})$$

$$(\mathbf{F}^\dagger \mathbf{E})_{k,\ell} = \sum_{n=0}^{N-1} -j2\pi n \exp \left\{ j2\pi n \frac{(\ell-k)}{N_F} \right\} \quad (\text{A.12})$$

$$\left(\mathbf{E}^\dagger \mathbf{F}\right)_{k,\ell} = \left(\mathbf{F}^\dagger \mathbf{E}\right)_{k,\ell}^\dagger \quad (\text{A.13})$$

$$\left(\mathbf{F}^\dagger \mathbf{F}\right)_{k,\ell} = \sum_{n=0}^{N-1} 4\pi^2 n^2 \exp\left\{j2\pi n \frac{(\ell-k)}{N_F}\right\} \quad (\text{A.14})$$

La circularité des blocs matriciels résulte du fait que chacun de ces termes ne dépend que de la différence  $(\ell - k)$  et de leur périodicité. En effet, ces deux arguments permettent d'écrire

$$\forall (k, \ell) \in \{1, \dots, N_F\}^2 : \mathbf{IB}_{k,\ell} = \mathbf{IB}_{(k+1) \text{ modulo } N_F, \ell+1}$$

relation qui permet de déduire deux colonnes adjacentes par une permutation circulaire ( $\mathbf{IB}$  désigne indifféremment un des quatre blocs).

Chaque bloc est donc défini par une seule ligne ou colonne. Comme la matrice normale est en outre hermitienne, seules 3 vecteurs de taille  $N_F$  suffisent à la définir entièrement.

**Calcul de  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}$  par TFD** Par définition :

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^\dagger \mathbf{y} \\ \mathbf{F}^\dagger \mathbf{y} \end{bmatrix}.$$

avec  $\forall k \in \{0, \dots, N_F - 1\}$  :

$$\left(\mathbf{E}^\dagger \mathbf{y}\right)_k = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \exp\left\{-j2\pi n \frac{k}{N_F}\right\} \quad (\text{A.15})$$

$$\left(\mathbf{F}^\dagger \mathbf{y}\right)_k = j2\pi \sum_{n=0}^{N-1} n y[n] \exp\left\{-j2\pi n \frac{k}{N_F}\right\}. \quad (\text{A.16})$$

Le vecteur  $\mathbf{E}^\dagger \mathbf{y}$  s'identifie à la TFD<sup>1</sup> de la séquence  $\mathbf{y}$  évaluée en les  $N_F$  fréquences discrètes  $k/N_F$ ,  $k = 0, \dots, N_F - 1$ ;  $\mathbf{E}^\dagger \mathbf{y} = \text{TFD}_{N_F}[\mathbf{y}]$ . Quant au vecteur  $\mathbf{F}^\dagger \mathbf{y}$ , on peut l'exprimer selon :  $\mathbf{F}^\dagger \mathbf{y} = 2j\pi \text{TFD}_{N_F}[\mathbf{n} \odot \mathbf{y}]$  où  $\mathbf{n} \triangleq [0, 1, \dots, N-1]^T$ .

Enfin, en exploitant la relation de dualité entre  $\mathbf{A}$  et  $\widetilde{\mathbf{A}}$ , on montre sans difficulté les identités suivantes qui résultent de la conservation du produit scalaire dans l'espace de Fourier :

$$\mathbf{E}^\dagger \mathbf{E} = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}, \mathbf{F}^\dagger \mathbf{F} = \mathbf{G}^\dagger \mathbf{G}, \mathbf{F}^\dagger \mathbf{E} = -\mathbf{G}^\dagger \mathbf{H}, \mathbf{E}^\dagger \mathbf{F} = -\mathbf{H}^\dagger \mathbf{G}, \mathbf{E}^\dagger \mathbf{y} = \mathbf{H}^\dagger \tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{F}^\dagger \mathbf{y} = -\mathbf{G}^\dagger \tilde{\mathbf{y}}.$$

Par conséquent, les deux représentations des données permettent de réaliser strictement les mêmes économies de calcul et d'encombrement mémoire. Aucune des deux représentations ne peut être privilégiée sur ces arguments structurels, sinon la représentation temporelle qui est la plus naturelle et qui évite le calcul de la transformée de Fourier des données et du noyau de Dirichlet.

1. TFD non normalisée

## ANNEXE B

### LOI « INTÉGRALE EXPONENTIELLE » & APPROXIMATION GAUSSIENNE

ON RAPPELLE que les variables  $r$ ,  $s$  et  $\delta\nu$  sont, conditionnellement aux réalisations positives de la séquence de Bernoulli, liées par la relation (cf. (V.13)) :

$$r = s \cdot \delta\nu$$

où  $s$  est gaussienne complexe circulaire, centrée et de variance  $\sigma^2$ , tandis que la loi de  $\delta\nu$ , variable réelle, est supposée uniforme sur l'intervalle centré  $I = [-\frac{1}{2N_F}, \frac{1}{2N_F}]$ . Les variables  $s$  et  $\delta\nu$  sont en outre supposées indépendantes. On s'intéresse dans un premier temps aux deux premiers moments du couple  $z \triangleq (s, r)$ , puis à la densité marginale de  $r$ . Dans la suite, on posera  $\omega \triangleq \delta\nu$  pour simplifier les notations.

### 1 Deux premiers moments de $z$

Tout d'abord,  $r$  est une variable centrée parce que  $s$  et  $\omega$  le sont. On en déduit immédiatement

$$\mathbb{E}[z] = (0, 0).$$

Le moment du second ordre de  $z$ , couple de variables complexes, est défini par la donnée de  $\mathbb{E}[zz^t]$  et  $\mathbb{E}[zz^{\dagger}]$  [PICINBONO 1991]. Le calcul de  $\mathbb{E}[zz^t]$  exige celui de  $\mathbb{E}[ss]$ ,  $\mathbb{E}[rr]$ ,  $\mathbb{E}[rs]$ . La première de ces quantités est nulle en raison de la circularité de la variable complexe  $s$ . Un rapide calcul permet de conclure à la nullité des deux autres termes compte tenu de l'indépendance de  $s$  et  $\omega$  et de leurs moyennes nulles. Cette indépendance permet de propager la circularité de  $s$  à la variable  $r$  et l'on écrit :

$$\mathbb{E}[zz^t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

$z$  est donc circulaire à l'ordre deux. Les termes non diagonaux de (B.1) expriment que  $r$  et  $s$  sont des variables décorrélées, bien que colinéaires.

Le calcul de  $E[zz^\dagger]$  requiert celui de  $E[r^*s]$ ,  $E[s^*r]$ ,  $E[s^*s]$ ,  $E[r^*r]$ . Les deux premiers termes sont nuls. En effet, compte tenu des hypothèses

$$E[r^*s] = E[s^*\omega] = E[s^*s] E[\omega] = 0,$$

de même pour son conjugué. Le troisième terme se déduit de la définition de  $s$ :  $E[s^*s] \triangleq \sigma^2$ . Quant au dernier, l'indépendance entre  $s$  et  $\omega$  permet décrire

$$E[r^*r] = E[s^*s] E[\omega^2]$$

avec

$$E[\omega^2] \triangleq N_F \int_{-\frac{1}{2N_F}}^{\frac{1}{2N_F}} \omega^2 d\omega = \frac{1}{12N_F^2}$$

On en déduit que  $z$  est centré et de covariance diagonale donnée par :

$$E[zz^\dagger] = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{12N_F^2} \end{bmatrix}.$$

## 2 Calcul de la densité marginale de la variable produit $r$

Pour simplifier les notations, on posera  $a \triangleq \frac{1}{2N_F}$ . La densité de  $r$  est définie par la loi conjointe de ses parties réelles et imaginaires, indépendantes et de même variance  $\sigma^2/2$  sous les hypothèses formulées. On écrira donc :

$$\begin{aligned} f_R(r) &= f_{X_r}(x_r) f_{Y_r}(y_r) \\ x_r &\triangleq \Re(r) \\ y_r &\triangleq \Im(r) \end{aligned} \tag{B.2}$$

**Calcul de  $f_{X_r}(x_r)$**  Par définition,  $x_r \triangleq \omega \cdot x_s$  et les densités de probabilité respectives de  $x_s$  et  $\omega$  s'écrivent :

$$f_{X_s}(x_s) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{x_s^2}{\sigma^2}\right\} \tag{B.3}$$

$$f_\Omega(\omega) = \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{[-a, +a]}(\omega) \tag{B.4}$$

Considérons le changement de variable :

$$\begin{cases} \omega &= \frac{\omega}{x_s} \\ x_s &= \frac{x_r}{\omega} \end{cases}$$

## 2. Calcul de la densité marginale de la variable produit $r$

Après calcul du jacobien relatif au changement de variable, la densité de la variable produit  $x_r$  s'exprime selon

$$f_{X_r}(x_r) = \int_{-a}^{+a} f_\Omega(\omega) f_{X_s}\left(\frac{x_r}{\omega}\right) \frac{1}{|\omega|} d\omega$$

soit encore :

$$f_{X_r}(x_r) = \frac{1}{a\sqrt{\pi\sigma^2}} \int_0^{+a} \frac{1}{\omega} \exp\left\{-\frac{x_r^2}{\sigma^2\omega^2}\right\} d\omega. \tag{B.5}$$

Ces notations sont bien sûr abusives : les deux intégrales ci-dessus sont prises au sens de Cauchy<sup>1</sup>. Posons  $y \triangleq \frac{x_r}{\sigma\omega}$ . Il vient, à partir de (B.5) :

$$f_{X_r}(x_r) = \frac{1}{a\sqrt{\pi\sigma^2}} \int_{\frac{x_r}{\sigma a}}^{+\infty} \frac{1}{y} \exp\{-y^2\} dy$$

Enfin, un dernier changement de variable  $t \triangleq y^2 \frac{\sigma^2 a^2}{x_r^2}$  mène à

$$f_{X_r}(x_r) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\sigma^2}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \exp\left\{-\frac{x_r^2}{\sigma^2 a^2} t\right\} dt$$

Finalement, en remplaçant  $a$  par  $\frac{1}{2N_F}$ , on aboutit au résultat :

$$f_{X_r}(x_r) = \frac{N_F}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \exp\left\{-\frac{4N_F^2 x_r^2}{\sigma^2} t\right\} dt.$$

Cette densité est appelée « intégrale exponentielle » [ABRAMOWITZ & STEGUN 1972, p. 228]. La loi  $f_{Y_r}(y_r)$  est identique. En vertu de (B.2), la densité de  $r \in \mathbb{C}$  s'écrit :

$$f_R(r) = \frac{N_F^2}{\pi\sigma^2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \exp\left\{-\frac{4N_F^2 |\Re(r)|^2}{\sigma^2} t\right\} dt \cdot \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \exp\left\{-\frac{4N_F^2 |\Im(r)|^2}{\sigma^2} t\right\} dt.$$

Elle est symétrique par rapport à l'origine.

---

1.  $\forall a, b > 0 \quad \int_{-b}^{+a} f(x) dx \triangleq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-b}^{-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{\epsilon'}^{+a} f(x) dx$

## ANNEXE C

### ALGORITHME SMLR POUR LES CRITÈRES DE VRAISEMBLANCE USUELS

**L**, OBJECTIF de cette annexe est de montrer que l'algorithme SMLR peut être utilisé pour optimiser les critères associées aux méthodes du maximum de vraisemblance déterministe et stochastique sur une grille angulaire. Une différence importante entre ces critères et celui que nous avons utilisé réside dans le fait que ceux-ci requiert la condition  $P \leq N - 1$  pour être valide. Il faudra donc veiller à respecter cette condition dans le corps de l'algorithme, par exemple en arrêtant la procédure dès que la séquence localement optimale contient  $N - 1$  sources.

#### 1 Relation entre les critères MVS et MVD

En premier lieu, on se propose d'établir la relation (II.23) qui lie les deux critères de vraisemblance. A cet effet, nous rappelons leurs expressions respectives :

$$H_{\text{MVS}}(\theta) = \ln |\mathbf{A}(\hat{\theta})\hat{\mathbf{S}}(\theta)\mathbf{A}^\dagger(\hat{\theta}) + \hat{\sigma}_b^2(\hat{\theta})\mathbf{I}_N| \quad (\text{C.1})$$

$$H_{\text{MVD}}(\theta) = \text{tr}\left\{P_{\mathbf{A}(\hat{\theta})}^\perp \hat{\mathbf{R}}\right\} \quad (\text{C.2})$$

avec les quantités :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^\dagger \quad (\text{C.3})$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{A}^\# \left( \hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}_b^2 \mathbf{I}_N \right) \mathbf{A}^{\#\dagger} \quad (\text{C.4})$$

$$\hat{\sigma}_b^2 = \frac{1}{N-P} \text{tr}\left\{P_{\mathbf{A}}^\perp \hat{\mathbf{R}}\right\} \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\dagger \quad (\text{C.6})$$

$$P_{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \mathbf{A}^\# \quad (\text{C.7})$$

$$P_{\mathbf{A}}^\perp = \mathbf{I} - P_{\mathbf{A}}. \quad (\text{C.8})$$

Par souci de clarté, nous avons omis la dépendance en  $\theta$  de toutes les matrices mises en jeu. Partant de (C.1) et en utilisant le résultat (D.9), le critère du MVS prend la forme :

$$H_{\text{MVS}}(\theta) = \ln \left( \hat{\sigma}_b^2 | \hat{\sigma}_b^2 \mathbf{I}_P + \hat{\mathbf{S}} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} | \right) \quad (\text{C.9})$$

$$= (N - P) \ln \hat{\sigma}_b^2 + \ln | \hat{\sigma}_b^2 \mathbf{I}_P + \hat{\mathbf{S}} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} |. \quad (\text{C.10})$$

Or d'après (C.3) et (C.6), on a :

$$\hat{\sigma}_b^2 \mathbf{I}_P + \hat{\mathbf{S}} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\dagger \hat{\mathbf{R}} \mathbf{A}.$$

On en déduit alors, en exprimant la variance du bruit (C.5) en fonction du critère MVD (C.2), la relation suivante entre les deux critères :

$$H_{\text{MVS}}(\theta) = -(N - P) \ln(N - P) + (N - P) \ln H_{\text{MVD}}(\theta) + \ln | \mathbf{A}^\dagger \hat{\mathbf{R}} \mathbf{A} | - \ln | \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} |. \quad (\text{C.11})$$

Dans la suite, nous noterons  $C^D(\theta) \triangleq H_{\text{MVD}}(\theta)$  et  $C^S(\theta) \triangleq H_{\text{MVS}}(\theta)$ .

## 2 Algorithme SMLR pour les critères MVD et MVS

Considérons la grille angulaire définie dans le chapitre VI :  $\mathcal{D} \triangleq (c_1, \dots, c_\ell, \dots, c_L)$ . Le voisinage d'une séquence initiale  $\theta_0$  est l'ensemble dont les éléments  $(\theta_\ell)_{1 \leq \ell \leq L}$  diffèrent de  $\theta_0$  uniquement par l'angle  $c_\ell$ , tel que  $\theta_\ell = \theta_0 \cup \{c_\ell\}$  ou  $\theta_\ell = \theta_0 \setminus \{c_\ell\}$ . Pour simplifier les notations, les quantités référencées par  $\ell$  sont relatives à la séquence  $\theta_\ell$  tandis que les variables non indiquées sont afférentes à une séquence générique quelconque  $\theta$ . Le scalaire  $\varepsilon_\ell$  prend la valeur  $+1$  (resp.  $-1$ ) si  $c_\ell$  est ajouté (resp. supprimé) de la séquence courante  $\theta_0$ . Enfin, on convient de poser  $\mathbf{a}_\ell \triangleq \mathbf{a}(c_\ell)$ .

L'algorithme SMLR repose sur une relation entre les valeurs des critères relatives à deux séquences voisines. Nous établissons maintenant cette relation, tout d'abord sur le critère MVD, puis sur sa version stochastique.

### 2.1 Critère du MVD

En vertu de ce qui précède, on cherche à établir une relation entre  $C_\ell^D$  et  $C_0^D$ . En introduisant la quantité auxiliaire  $\mathbf{C} \triangleq \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ , de dimension variable  $(p \times p)$ , on peut écrire

$$C^D = \text{tr } \hat{\mathbf{R}} - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}_k,$$

et en posant  $\mathcal{W}_0^{(k)} \triangleq \mathbf{y}_k \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}_k$ , la mise à jour de  $C^D$  se déduira de celle de  $\mathcal{W}$  puisque :

$$C_\ell^D - C_0^D = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\mathcal{W}_0^{(k)} - \mathcal{W}_\ell^{(k)}). \quad (\text{C.12})$$

## 2. Algorithme SMLR pour les critères MVD et MVS

Considérons le cas de l'addition d'un angle quelconque  $c_\ell$  à la séquence courante  $\theta_0$ , ce qui correspond à  $\varepsilon_\ell = +1$ . La matrice  $\mathbf{C}_\ell$  s'exprime en fonction de  $\mathbf{C}_0$  selon :

$$\mathbf{C}_\ell = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & \mathbf{A}_0^\dagger \mathbf{a}_\ell \\ \mathbf{a}_\ell^\dagger \mathbf{A}_0 & \mathbf{a}_\ell^\dagger \mathbf{a}_\ell \end{bmatrix}.$$

En remarquant que  $\mathbf{a}_\ell^\dagger \mathbf{a}_\ell = 1$  et d'autre part en utilisant le lemme d'inversion des matrices partitionnées (D.3), les inverses des deux matrices  $\mathbf{C}_\ell$  et  $\mathbf{C}_0$  sont liées par

$$\mathbf{C}_\ell^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^{-1} + \mathbf{b}_\ell \rho_\ell \mathbf{b}_\ell^\dagger & \mathbf{b}_\ell \\ \mathbf{b}_\ell^\dagger & \rho_\ell^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

$$\rho_\ell = 1 - \mathbf{a}_\ell^\dagger \mathbf{A}_0 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{A}_0^\dagger \mathbf{a}_\ell \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{b}_\ell = \rho_\ell^{-1} \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{A}_0^\dagger \mathbf{a}_\ell. \quad (\text{C.15})$$

Inversement, le cas dual de la suppression du même angle  $c_\ell$  de la séquence  $\theta_0$  se déduit du précédent. D'après (C.13), il consiste à partitionner  $\mathbf{C}_0^{-1}$  et à identifier les quantités  $\rho_\ell^{-1}$  et  $\mathbf{b}_\ell$ . Ainsi, en notant  $\mathbf{D}_0$  la matrice  $\mathbf{C}_0^{-1}$  privée de la ligne et de la colonne correspondantes à l'angle  $c_\ell$ , il vient :

$$\mathbf{C}_\ell^{-1} = \mathbf{D}_0 - \mathbf{b}_\ell \rho_\ell \mathbf{b}_\ell^\dagger. \quad (\text{C.16})$$

En utilisant la définition de  $\mathcal{W}$ , on montre sans difficulté que sa mise à jour est réalisée selon :

$$\forall k = 1, \dots, K : \mathcal{W}_0^{(k)} - \mathcal{W}_\ell^{(k)} = -\rho_\ell |\mathbf{b}_\ell^\dagger \mathbf{A}_0^\dagger \mathbf{y}_k|^2 - 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{y}_k^\dagger \mathbf{A}_0^\dagger \mathbf{b}_\ell \mathbf{a}_\ell^\dagger \mathbf{y}_k \right\} - \rho_\ell^{-1} |\mathbf{a}_\ell^\dagger \mathbf{y}_k|^2$$

où  $\rho_\ell$  et  $\mathbf{b}_\ell$  sont données par (C.14) et (C.15). De (C.12) on déduit immédiatement la relation qui permet de calculer le critère du MVD de façon itérative sur le voisinage entier d'une séquence courante.

La matrice  $\mathbf{C}$  est la seule quantité nécessaire au fonctionnement de l'algorithme SMLR. D'autre part, ce critère dégénère systématiquement vers le nombre maximal de sources s'il n'est pas régularisé. La régularisation, menée dans un cadre bayésien, consiste ici à introduire un terme supplémentaire qui vient pénaliser un nombre élevé de sources. L'algorithme SMLR sera donc appliqué au critère régularisé.

### 2.2 Critère du MVS

Par commodité, décomposons le critère MVS (C.11) selon :

$$C^S(\theta) = C^{(1)}(\theta) + C^{(2)}(\theta) + C^{(3)}(\theta) + C^{(4)}(\theta) \quad (\text{C.17})$$

$$C^{(1)}(\theta) \triangleq -(N - P) \ln(N - P) \quad (\text{C.18})$$

$$\mathcal{C}^{(2)}(\theta) \triangleq (N - P) \ln \mathcal{C}^D(\theta) \quad (\text{C.19})$$

$$\mathcal{C}^{(3)}(\theta) \triangleq \ln |\mathbf{A}^\dagger \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{A}| \quad (\text{C.20})$$

$$\mathcal{C}^{(4)}(\theta) \triangleq -\ln |\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}| \quad (\text{C.21})$$

$$P \triangleq \dim \theta \quad (\text{C.22})$$

et recherchons la mise à jour de chacun de ces termes.

**Mise à jour de  $\mathcal{C}^{(1)}$ :** Celle-ci est immédiate :

$$\mathcal{C}_t^{(1)} - \mathcal{C}_0^{(1)} = -(N - P - \varepsilon_t) \ln(N - P - \varepsilon_t) + (N - P) \ln(N - P)$$

où  $P = \dim \theta_0$ .

**Mise à jour de  $\mathcal{C}^{(2)}$ :** Cette fonction s'exprime en fonction du critère MVD et d'après le § 2.1, on sait calculer  $\Delta \mathcal{C}^D \triangleq \mathcal{C}_t^D - \mathcal{C}_0^D$ . Supposons que l'on a calculé cette différence et stocké la valeur de  $\mathcal{C}_0^D$ . Alors on peut écrire :

$$\mathcal{C}_t^{(2)} - \mathcal{C}_0^{(2)} = (N - P - \varepsilon_t) \ln(\Delta \mathcal{C}^D + \mathcal{C}_0^D) - (N - P) \ln \mathcal{C}_0^D$$

où  $P = \dim \theta_0$ . Pour l'essentiel, la mise à jour de  $\mathcal{C}^{(2)}$  se déduit de celle du critère MVD ; elle requiert néanmoins le stockage de la valeur courante de ce critère.

**Mise à jour de  $\mathcal{C}^{(3)}$ :** Nous ne traitons ici que le cas de l'addition d'un angle, la situation inverse s'en déduisant sans difficulté. Définissons  $\mathbf{B} \triangleq \mathbf{A}^\dagger \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{A}$ . L'addition d'un angle  $c_t$  se traduit par une récurrence sur  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0^\dagger \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{a}_t \\ \mathbf{a}_t^\dagger \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{A}_0 & \mathbf{a}_t^\dagger \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{a}_t \end{bmatrix}.$$

On cherche une relation entre les déterminants  $|\mathbf{B}_t|$  et  $|\mathbf{B}_0|$ . En utilisant le déterminant des matrices partitionnées (D.5), il vient :

$$|\mathbf{B}_t| = |\mathbf{B}_0| |\mathbf{a}_t^\dagger \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{a}_t - \mathbf{a}_t^\dagger \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0^\dagger \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{a}_t|$$

d'où la relation de mise à jour :

$$\mathcal{C}_t^{(3)} - \mathcal{C}_0^{(3)} = \ln |\mathbf{a}_t^\dagger \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{a}_t - \mathbf{a}_t^\dagger \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0^\dagger \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{a}_t|.$$

Elle nécessite le calcul et le stockage de l'inverse  $\mathbf{B}_0^{-1}$ . Le passage à l'itération suivante requiert également sa mise à jour. Comme pour  $\mathbf{C}_0^{-1}$  dans le § 2.1, on utilisera ici le lemme d'inversion des matrices partitionnées.

### 3. Conclusion

**Mise à jour de  $\mathcal{C}^{(4)}$ :** Cette fonction est structurellement très voisine de la précédente. La démarche est identique. On remarque d'ailleurs que  $\mathcal{C}^{(4)} = \ln |\mathbf{C}|$  où  $\mathbf{C}$  est la quantité auxiliaire définie dans le § 2.1. En ne s'intéressant qu'au cas de l'addition de l'angle  $c_t$  à la séquence courante et d'autre part en utilisant le déterminant des matrices partitionnées, il vient :

$$\mathcal{C}_t^{(4)} - \mathcal{C}_0^{(4)} = \ln |1 - \mathbf{a}_t^\dagger \mathbf{A}_0 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{A}_0^\dagger \mathbf{a}_t|.$$

Le calcul et la mise à jour de  $\mathbf{C}$  seront réalisés comme dans le § 2.1 par le lemme d'inversion des matrices partitionnées. A notre connaissance, la dégénérescence du critère MVS, qui intègre les amplitudes hors du problème de la localisation, n'est pas établie. Il n'est donc peut-être pas nécessaire de le régulariser.

## 3 Conclusion

Les relations de mise à jour ainsi établies sont l'élément essentiel nécessaire au fonctionnement de l'algorithme SMLR. Celui-ci est initialisé par la séquence vide, qui évite le calcul d'une solution initiale satisfaisante comme dans la technique des projections alternées utilisée pour la maximisation du critère MVD dans [ZISKIND & WAX 1988].

## ANNEXE D

### PROPRIÉTÉS MATRICIELLES

**N**OUS rappelons dans cette annexe quelques propriétés algébriques utilisées dans certains calculs, notamment le lemme d'inversion matricielle, celui des matrices partitionnées, quelques relations entre déterminants ainsi que certains gradients matriciels.

#### 1 Lemme d'inversion matricielle

Soient quatre matrices  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{n \times r}$ ,  $C \in \mathbb{C}^{r \times r}$ ,  $D \in \mathbb{C}^{r \times n}$ , les matrices  $A$  et  $C$  étant non singulières. Soit  $R = A + BCD$ . Si  $R$  est non singulière, son inverse existe et est donnée par:

$$R^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (\text{D.1})$$

sous réserve que la matrice entre parenthèses soit elle-même non singulière. La démonstration se fait en multipliant les deux membres à gauche par  $A + BCD$  et en faisant apparaître la matrice  $C^{-1} + DA^{-1}B$  devant son inverse.

#### 2 Lemme d'inversion des matrices partitionnées

Soit la matrice  $A$  partitionnée sous la forme

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

Si  $A$  est non singulière, son inverse est :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

$$= \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

en supposant que toutes les inverses apparaissant dans ces expressions existent. En vertu du lemme d'inversion (D.1), les éléments diagonaux peuvent aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} & A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} \\ \text{et } & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \end{aligned}$$

### 3 Déterminant des matrices partitionnées

Le déterminant de la matrice (D.2) s'exprime en fonction des blocs selon :

$$|A| = |A_{11}| |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}| \quad (\text{D.5})$$

$$= |A_{22}| |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}| \quad (\text{D.6})$$

en supposant que les matrices inverses existent.

### 4 Relations entre déterminants

- Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices carrées,  $AB$  et  $BA$  ont même polynôme caractéristique, c'est-à-dire

$$|AB - \lambda I| = |BA - \lambda I| \quad \forall \lambda. \quad (\text{D.7})$$

En prenant  $\lambda = -1$ , on aboutit à

$$|AB + I| = |BA + I|. \quad (\text{D.8})$$

- Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices rectangulaires de dimensions respectives  $(n \times m)$  et  $(m \times n)$ , la relation entre les polynômes caractéristiques est similaire :

$$|AB - \lambda I_n| = (-\lambda)^{n-m} |BA - \lambda I_m| \quad \forall \lambda.$$

La démonstration de cette identité se fait en complétant les matrices  $A$  et  $B$  par des zéros de façon à ce que les matrices résultantes soient carrées, et en appliquant le résultat (D.7) pour les matrices carrées. Pour plus de détails, consulter [IDIER 1991] ou [LASCAUX & THEODOR 1987]. En prenant  $\lambda = -1$ , on aboutit également à l'expression duale de (D.8)

$$|AB + I_n| = |BA + I_m|. \quad (\text{D.9})$$

### 5 Quelques gradients matriciels

Soient  $A(t) \in \mathbb{C}^{(n \times n)}$  un opérateur inversible et dérivable par rapport à la variable scalaire  $t$ . On a les identités suivantes :

$$\frac{d}{dt} [A(t)^{-1}] = -A(t)^{-1} \frac{dA}{dt} A(t)^{-1} \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{d}{dt} [\ln |A(t)|] = \operatorname{tr} \left\{ \frac{dA}{dt} A(t)^{-1} \right\} \quad (\text{D.11})$$

De plus amples résultats pourront être trouvés en annexe de [GOODWIN & PAYNE 1977].

## Références bibliographiques

- [ABRAMOWITZ & STEGUN 1972] M. ABRAMOWITZ & I. A. STEGUN (1972), *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York.
- [AKAIKE 1974] H. AKAIKE (1974), « A New Look at the Statistical Model Identification », *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-19**, n° 6, pages 716-723.
- [ANDERSON 1963] T. W. ANDERSON (1963), « Asymptotic theory for principal component analysis », *Annals Mathematical Statistics*, **34**, pages 122-148.
- [ARYA & HOLDEN 1978] V. ARYA & H. HOLDEN (1978), « Deconvolution of Seismic Data-An Overview », *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, **GE-16**, pages 95-98.
- [BERCHER & LARZABAL 1994] J.-F. BERCHER & P. LARZABAL (1994), « Traitement d'antenne avec adéquation de modèle », *Traitements du Signal*, **10**, n° 5, pages 349-359.
- [BIENVENU & KOPP 1980] G. BIENVENU & L. KOPP (1980), « Adaptativity to background noise spatial coherence for high resolution passive methods », *Proc. IEEE ICASSP*, pages 307-310.
- [BIENVENU & KOPP 1983] G. BIENVENU & L. KOPP (1983), « Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach », *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, **ASSP-31**, pages 1235-1248.
- [BLANC-LAPIERRE & PICINBONO 1981] A. BLANC-LAPIERRE & B. PICINBONO (1981), *Fonctions aléatoires*, Masson, Paris.
- [BÖHME 1986] J. F. BÖHME (1986), « Estimation of spectral parameters of correlated signals in wavefields », *Signal Processing*, **11**, pages 329-337.
- [BOUVET 1991] M. BOUVET (1991), *Traitements des signaux pour les systèmes SONAR*, Masson.
- [BRÉMAUD 1984] P. BRÉMAUD (1984), *Introduction aux probabilités*, Springer Verlag, Berlin.
- [BRESLER & MACOVSKI 1986] Y. BRESLER & A. MACOVSKI (1986), « Exact Maximum Likelihood Parameter Estimation of Superimposed Exponential Signals in Noise », *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, **ASSP-34**, n° 5, pages 1081-1089.

- [CAPON 1969] J. CAPON (1969), « High-resolution frequency wavenumber spectrum analysis », *Proc. IEEE*, **57**, pages 1408–1418.
- [CARDOSO 1990] J. F. CARDOSO (1990), « Localisation et identification par la quadri-covariance », *Traitements du Signal*, **7**, n° 5, pages 397–406.
- [CELEUX & DIEBOLT 1986] G. CELEUX & J. DIEBOLT (1986), « L'algorithme SEM : un algorithme d'apprentissage probabiliste pour la reconnaissance de densités », *Revue de Statistique Appliquée*, **34**, pages 35–52.
- [CHAMPAGNAT et coll. 1994] F. CHAMPAGNAT, Y. GOUSSARD & J. IDIER (1994), « Unsupervised Bernoulli-Gaussian deconvolution », Rapport technique, GPI-LSS.
- [CHAMPAGNAT et coll. 1996] F. CHAMPAGNAT, Y. GOUSSARD & J. IDIER (1996), « Unsupervised deconvolution of sparse spike trains using stochastic approximation », *to appear in IEEE Trans. Signal Processing*.
- [CHENG et coll. 1996] Q. CHENG, R. CHEN & L. TA-HSIN (1996), « Simultaneous Wavelet Estimation and Deconvolution of Reflection Seismic Signals », *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, **34**, n° 2, pages 377–384.
- [CHOI et coll. 1993] J. CHOI, I. SONG, S. KIM & S. Y. KIM (1993), « A combined determination-estimation method for direction of arrival estimation », *Signal Processing*, **30**, pages 123–131.
- [DEMOMENT 1985] G. DEMOMENT (1985), « Déconvolution des signaux », Cours de l'ESE 3086, GPI-LSS.
- [DEMOMENT 1989] G. DEMOMENT (1989), « Image Reconstruction and Restoration : Overview of Common Estimation Structure and Problems », *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, **ASSP-37**, n° 12, pages 2024–2036.
- [DEMPSTER et coll. 1977] A. DEMPSTER, N. LAIRD & D. RUBIN (1977), « Maximum Likelihood from incomplete data via the EM algorithm », *J. Roy. Statist. Soc. B*, **39**, pages 1–38.
- [DUBLANCHET et coll. 1995] F. DUBLANCHET, P. DUVAUT & J. IDIER (1995), *Complex sinusoid analysis by Bayesian deconvolution of the discrete Fourier transform, Maximum entropy and Bayesian methods*, Kluwer Academic Publ., Santa Fe, U.S.A., K. Hanson edition.
- [DUVAUT 1991] P. DUVAUT (1991), *Traitements du signal*, Hermès, Paris.
- [DUVAUT & DUBLANCHET 1995] P. DUVAUT & F. DUBLANCHET (1995), « Une méthode d'analyse de sinusoïdes complexes par déconvolution du périodogramme : EXPULSE », *Traitements du Signal*, **12**, n° 3, pages 239–253.
- [FLIELLER 1995] A. FLIELLER (1995), *Mise en œuvre des méthodes à haute résolution en traitement d'antenne : autocalibration robuste et géométrie de réseaux*, Thèse de doctorat, Université de Paris Sud, Orsay.

- [FUCHS & CHUBERRE 1994] J. FUCHS & H. CHUBERRE (1994), « A Deconvolution Approach to Source Localization », *IEEE Trans. Signal Processing*, **SP-42**, n° 6, pages 1462–1470.
- [GOODWIN & PAYNE 1977] G. C. GOODWIN & R. L. PAYNE (1977), *Dynamic system identification. Experiment design and data analysis*, Academic press.
- [GOUSSARD 1989] Y. GOUSSARD (1989), *Déconvolution de processus aléatoires non-gaussiens par maximisation de vraisemblances*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay.
- [GOUSSARD et coll. 1990] Y. GOUSSARD, G. DEMOMENT & F. MONFRONT (1990), *Maximum a posteriori detection-estimation of Bernoulli-Gaussian processes*, Mathematics in Signal Processing II, Clarendon Press, Oxford, j.g. mewhirter edition.
- [GOUSSARD et coll. 1990] Y. GOUSSARD, G. DEMOMENT & J. IDIER (1990), « A new algorithm for iterative deconvolution of sparse spike trains », dans *Proc. IEEE ICASSP*, pages 1547–1550, Albuquerque, U.S.A.
- [GOUTSIAS & MENDEL 1986] J. GOUTSIAS & J. M. MENDEL (1986), « Maximum-likelihood deconvolution : An optimization theory perspective », *Geophysics*, **51**, pages 1206–1220.
- [HARRIS 1978] F. HARRIS (1978), « On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform », *Proc. IEEE*, **66**, n° 1, pages 51–83.
- [HAYKIN 1985] S. HAYKIN (1985), *Array Signal Processing*, Prentice-Hall.
- [HAYKIN et coll. 1992] S. HAYKIN, J. REILLY, V. KEZYS & E. VERTATSCHITSCH (1992), « Some aspects of array signal processing », *IEE Proc.*, **139**, n° 1, pages 1–26.
- [HOCHWALD & NEHORAI 1996] B. HOCHWALD & A. NEHORAI (1996), « Identifiability in Array Processing Models with Vector-Sensor Applications », *IEEE Trans. Signal Processing*, **44**, n° 1, pages 83–95.
- [HUA & SARKAR 1988] Y. HUA & T. SARKAR (1988), « Matrix pencil method and its performance », *Proc. IEEE ICASSP*, pages 2476–2479.
- [IDIER 1991] J. IDIER (1991), *Imagerie des milieux stratifiés : modélisation markovienne, application à la déconvolution sismique*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay.
- [IDIER & GOUSSARD 1993] J. IDIER & Y. GOUSSARD (1993), « Multichannel seismic deconvolution », *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, **GE-31**, n° 5, pages 961–979.
- [JAFFER 1988] A. G. JAFFER (1988), « Maximum likelihood Direction finding of Stochastic Sources: A separable solution », dans *Proc. IEEE ICASSP*, pages 2893–2896, 1988.

- [JOHNSON 1982] D. H. JOHNSON (1982), « The Application of Spectral Estimation Methods to Bearing Estimation Problems », *Proc. IEEE*, **70**, n° 9, pages 1018–1028.
- [JOHNSON & DUDGEON 1993] D. H. JOHNSON & D. E. DUDGEON (1993), *Array Signal Processing – Concepts and Techniques*, Prentice Hall Signal Processing Series.
- [KAY 1988] S. M. KAY (1988), *Modern Spectral Estimation*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [KAY & MARPLE 1981] S. M. KAY & S. L. MARPLE (1981), « Spectrum Analysis–A Modern Perspective », *Proc. IEEE*, **69**, n° 11, pages 1380–1419.
- [KINSLER et coll. 1982] L. E. KINSLER *et al.* (1982), *Fundamentals of Acoustics*, John Wiley and Sons, New York, third edition.
- [KORMYLO 1979] J. KORMYLO (1979), *Maximum-likelihood seismic deconvolution*, Thèse de doctorat, University of Southern California.
- [KORMYLO & MENDEL 1982] J. J. KORMYLO & J. M. MENDEL (1982), « Maximum-likelihood detection and estimation of Bernoulli-Gaussian processes », *IEEE Trans. Inform. Theory*, **IT-28**, pages 482–488.
- [KULLBACK 1959] S. KULLBACK (1959), *Information Theory and Statistics*, Wiley, New York.
- [KUMARESAN 1983] R. KUMARESAN (1983), « On the zeros of the linear prediction error filter for deterministic signals », *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, **32**, pages 217–220.
- [KWAKERNAAK 1980] H. KWAKERNAAK (1980), « Estimation of pulse heights and arrival times », *Automatica*, **16**, pages 367–377.
- [LASCAUX & THEODOR 1987] P. LASCAUX & R. THEODOR (1987), *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, volume 2, Masson, Paris.
- [LAVIELLE 1993] M. LAVIELLE (1993), « Bayesian deconvolution of Bernoulli-Gaussian processes », *Signal Processing*, **33**, pages 67–79.
- [LE CHEVALIER 1989] F. LE CHEVALIER (1989), *Principes de Traitement des Signaux Radar et Sonar*, Masson.
- [LEVINE 1973] B. LEVINE (1973), *Fondements de la Radiotéchnique Statistique*, volume Tome 2, Editions de Moscou.
- [LIGETT 1972] W. LIGETT (1972), « Passive sonar: fitting models to multipletime series », *Proc. NATO Advanced Study Institute on Signal Processing*, pages 327–345.
- [MACCHI 1972] O. MACCHI (1972), *Processus ponctuels et coïncidences*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay.

- [MARCOS & BENIDIR 1990] S. MARCOS & M. BENIDIR (1990), « Source Bearing Estimation and Sensor Positioning With the Propagator Method », *Proc. SPIE*, pages 312–323.
- [MARCOS & MUNIER 1989] S. MARCOS & J. MUNIER (1989), « Le Propagateur et son Estimation Adaptative », *Actes du 12<sup>e</sup> Colloque GRETSI*, pages 489–492.
- [MARPLE 1987] S. L. MARPLE (1987), *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [MARSAL & MARCOS 1991] A. MARSAL & S. MARCOS (1991), « Rapprochement de la méthode du propagateur et MUSIC pour la localisation de sources », *Actes du 13<sup>e</sup> Colloque GRETSI*, pages 681–684.
- [MENDEL 1983] J. M. MENDEL (1983), « Optimal Seismic Deconvolution », *New-York: Academic*.
- [MENDEL & KORMYLO 1978] J. M. MENDEL & J. J. KORMYLO (1978), « Single-channel white-noise estimators for deconvolution », *Geophysics*, **43**, pages 102–124.
- [MICHEL et coll. 1991] O. MICHEL, P. LARZABAL & H. CLERGEOT (1991), « Critères de détection du nombre de sources corrélées pour les méthodes H.R. en traitement d'antenne », *Actes du 13<sup>e</sup> Colloque GRETSI*, pages 693–696.
- [MUNIER & DELISLE 1991] J. MUNIER & G. DELISLE (1991), « Spatial analysis using new properties of the cross-spectral matrix », *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, **39**, n° 3, pages 746–749.
- [MUNIER et coll. 1988] J. MUNIER, G. JOURDAIN & G. DELISLE (1988), « A new algorithm for the identification of distorted wavefronts », *Proc. NATO Advanced Study Institute on Underwater Acoustics*.
- [OUAMRI 1986] A. OUAMRI (1986), *Étude des performances des méthodes d'identification à haute résolution et application l'identification des échos par une antenne linéaire multicapteurs*, Thèse de doctorat, Université Paris XI, Orsay.
- [OUAMRI & CLERGEOT 1987] A. OUAMRI & H. CLERGEOT (1987), « Estimation de la matrice de covariance et méthodes d'identification à haute résolution », *Actes du 11<sup>e</sup> Colloque GRETSI*, pages 201–204.
- [PICINBONO 1991] B. PICINBONO (1991), *Éléments de probabilité*, volume 1127, Cours de SUPÉLEC, Gif-sur-Yvette.
- [PICINBONO 1993] B. PICINBONO (1993), *Random Signals and Systems*, Prentice Hall.
- [PISARENKO 1973] V. PISARENKO (1973), « The Retrieval of Harmonics From a Covariance function », *Geophysical J. the Royal Astronomical Society*, **33**, pages 347–360.
- [POLAK 1971] E. POLAK (1971), *Computational methods in optimization*, Academic Press, New York.

- [PRESS et coll. 1986] W. PRESS, B. FLANNERY, S. TEUKOLSKY & W. VETTERLING (1986), *Numerical recipes, the art of scientific computing*, Cambridge Univ. Press, New York.
- [RADIX 1984] J. C. RADIX (1984), *Filtrage et lissage statistiques optimaux linéaires*, Cepadues Editions.
- [RISSANEN 1978] J. RISSANEN (1978), « Modeling by Shortest data Description », *Automatica*, **14**, pages 465-471.
- [ROY & KAILATH 1989] R. ROY & T. KAILATH (1989), « ESPRIT - Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques », *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, **ASSP-37**, n° 7, pages 984-995.
- [ROY et coll. 1986] R. ROY, A. PAULRAJ & T. KAILATH (1986), « ESPRIT - A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise », *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, **34**, pages 1340-1342.
- [SCHMIDT 1979] R. SCHMIDT (1979), « Multiple Source Emitter and Signal Parameter Estimation », *Proc. RADC Spectral Estimation Workshop*, pages 243-258.
- [SCHMIDT 1986] R. SCHMIDT (1986), « Multiple Source Emitter and Signal Parameter Estimation », *IEEE Trans. Ant. Propag.*, **30**, pages 276-280.
- [SCHMIDT 1986] R. O. SCHMIDT (1986), « Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation », *IEEE Trans. Ant. Propag.*, **AP-34**, n° 3, pages 281-290.
- [SCHWARTZ 1978] G. SCHWARTZ (1978), « Estimating the Dimension of a Model », *The Annals of Statistics*, **6**, pages 461-464.
- [SHAN et coll. 1985] T. SHAN, M. WAX & T. KAILATH (1985), « On Spatial Smoothing for Direction-of-Arrival Estimation of Coherent Signals », *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, **33**, pages 806-811.
- [SHARMAN 1988] K. SHARMAN (1988), « Maximum likelihood estimation by simulated annealing », *Proc. IEEE ICASSP*, pages 2241-2244.
- [SHARMAN & MCCLURKIN 1989] K. SHARMAN & G. MCCLURKIN (1989), « Genetic algorithms for maximum likelihood parameter estimation », *Proc. IEEE ICASSP*, pages 2716-2719.
- [STOICA et coll. 1996] P. STOICA, B. OTTERSTEN, M. VIBERG & R. L. MOSES (1996), « Maximum likelihood array processing for stochastic coherent sources », *Signal Processing*, **44**, n° 1, pages 96-105.
- [TAS & LACOUME 1989] I. TAS & J. LACOUME (1989), « Performances des lissages spatio-fréquentiel pour l'identification de sources corrélées », *Actes du 12<sup>e</sup> Colloque GRETSI*, pages 561-564.
- [TIKHONOV & ARSENIN 1977] A. TIKHONOV & V. ARSENIN (1977), *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston, Washington DC.

- [TUFTS & KUMARESAN 1983] D. W. TUFTS & R. KUMARESAN (1983), « Estimating the angles of arrival of multiple plane waves », *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, **19**, pages 134-139.
- [TUTEUR & ROCKAH 1986] F. TUTEUR & Y. ROCKAH (1986), « The covariance difference method in signal detection », dans *Proc. 3<sup>th</sup> ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, pages 120-122, 1986.
- [VAN TREES 1968] C. VAN TREES (1968), *Detection, Estimation and Modulation Theory*, volume Part I, Wiley.
- [WANG & KAVEH 1986] H. WANG & M. KAVEH (1986), « on the performance of signal subspace processing, Part I: Narrow-band systems », *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, **ASSP-34**, n° 5, pages 1201-1209.
- [WAX 1991] M. WAX (1991), « Detection and Localization of Multiple sources via the Stochastic Signals Model », *IEEE Trans. Signal Processing*, **SP-39**, n° 11, pages 2450-2456.
- [WAX & KAILATH 1985] M. WAX & T. KAILATH (1985), « Detection of signals by information theoretic criteria », *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, **33**, n° 2, pages 387-392.
- [ZHANG et coll. 1989] Q. T. ZHANG, K. M. WONG, P. C. YIP & J. L. REILLY (1989), « Statistical analysis of the performance of information theoretic criteria in the detection of the number of signals in array processing », *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, **37**, n° 10, pages 1557-1567.
- [ZISKIND & WAX 1988] I. ZISKIND & M. WAX (1988), « Maximum likelihood localization of multiple Sources by alternating projection », *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, **ASSP-36**, n° 10, pages 1553-1560.

## Table des matières

Motivation et organisation du document	i
Principales notations utilisées	v
<b>I Formulation et modélisation du problème</b>	<b>1</b>
1 Le traitement d'antenne . . . . .	1
1.1 Particularités de chaque application . . . . .	1
1.2 Définition du problème posé . . . . .	3
2 Modélisation mathématique . . . . .	4
2.1 Milieu de propagation – Physique des ondes . . . . .	4
2.2 Champ de sources ponctuelles – Traitement bande-étroite . . . . .	5
2.3 Paramétrisation et modèle mathématique . . . . .	7
2.4 Analogie formelle avec l'estimation spectrale de raies pures . . . . .	10
3 Position du problème . . . . .	12
<b>II La méthodologie classique</b>	<b>15</b>
1 Techniques de formation de voies . . . . .	15
1.1 Formation de voies standard . . . . .	16
1.2 Formation de voies adaptative . . . . .	17
2 La méthodologie « haute résolution » . . . . .	18
3 Critères de détection . . . . .	19
3.1 Éléments théoriques . . . . .	19
3.1.1 Critère d'Akaike . . . . .	20
3.1.2 Critère de Rissanen-Schwartz . . . . .	20
3.2 Formes spécifiques en TA . . . . .	21
4 Méthodes de goniométrie haute résolution . . . . .	22
4.1 Techniques de sous-espaces . . . . .	23
4.2 Techniques de maximum de vraisemblance . . . . .	25
4.2.1 Méthode du maximum de vraisemblance « déterministe »	25
4.2.2 Méthode du maximum de vraisemblance « stochastique »	26
4.2.3 Problèmes d'optimisation . . . . .	28

5	Ambiguités d'antenne et identifiabilité . . . . .	28
6	Limitations et alternatives à la méthodologie classique . . . . .	30
6.1	Limitations . . . . .	30
6.2	Défauts méthodologiques et alternatives . . . . .	31
<b>III</b>	<b>La méthodologie bayésienne de détection-localisation</b>	<b>33</b>
1	Analogie avec la déconvolution impulsionnelle . . . . .	33
1.1	Similitudes des problèmes . . . . .	33
1.2	Problèmes inverses et régularisation . . . . .	34
2	Approche bayésienne des problèmes inverses . . . . .	37
2.1	Principes . . . . .	37
2.2	Estimateurs bayésiens . . . . .	37
3	Modèles <i>a priori</i> composites . . . . .	38
3.1	Le modèle Bernoulli-Gaussien . . . . .	39
3.2	Le modèle Poisson-Gaussien . . . . .	39
4	La démarche méthodologique . . . . .	41
4.1	Localisation d'un nombre inconnu d'impulsions . . . . .	42
4.2	Estimation des amplitudes des impulsions . . . . .	42
<b>IV</b>	<b>Application à la « déconvolution » d'un périodogramme</b>	<b>45</b>
1	Principes . . . . .	45
2	Limitations . . . . .	46
3	Alternatives et extensions . . . . .	47
<b>V</b>	<b>Estimation par modèle Bernoulli-Gaussien étendu</b>	<b>63</b>
1	Représentations équivalentes des données . . . . .	63
1.1	Représentation temporelle . . . . .	64
1.2	Représentation fréquentielle . . . . .	64
2	Discrétisation de l'espace des solutions . . . . .	65
2.1	Approximation d'ordre zéro . . . . .	66
2.2	Approximation linéaire d'ordre 1 . . . . .	67
2.3	Structure des opérateurs à arguments discrets . . . . .	68
3	Construction d'une solution bayésienne . . . . .	70
3.1	Nécessité d'une solution régularisée . . . . .	70
3.2	Modélisation BG étendue . . . . .	71
3.3	Détection-localisation et estimation . . . . .	73
4	Mise en œuvre : l'algorithme SMLR . . . . .	75
4.1	Principes . . . . .	75
4.2	L'algorithme . . . . .	76

5	Résultats de simulations . . . . .	79
6	Conclusion et perspectives . . . . .	81
<b>VI</b>	<b>Estimation par modèle Poisson-Gaussien</b>	<b>83</b>
1	Introduction . . . . .	84
2	Problem statement . . . . .	87
3	Poisson-Gaussian estimation . . . . .	88
3.1	Poisson model for $\theta$ . . . . .	88
3.2	Gaussian model for $x$ . . . . .	89
3.3	Supervised estimation framework . . . . .	89
4	Localization criterion analysis . . . . .	91
5	Optimization strategy . . . . .	94
5.1	Overall structure . . . . .	94
5.2	Minimization over a discrete grid . . . . .	95
5.3	Local Minimization . . . . .	97
6	Estimation of hyperparameters . . . . .	99
6.1	MGL approach . . . . .	99
6.2	Estimation of parameter $\lambda$ . . . . .	99
6.3	Estimation of parameters $\sigma^2$ and $\sigma_n^2$ . . . . .	100
7	Simulation results . . . . .	100
7.1	Single experiment case: cysoidal signal analysis . . . . .	101
7.2	DOA estimation problem . . . . .	102
8	Conclusion . . . . .	103
9	Figures . . . . .	104
10	References . . . . .	112
<b>VII</b>	<b>Conclusion &amp; perspectives</b>	<b>115</b>
<b>A</b>	<b>Opérateur à arguments discrets</b>	<b>119</b>
1	Evaluation analytique des valeurs propres de $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ . . . . .	119
2	Propriétés de la matrice $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ et du vecteur $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}$ . . . . .	121
<b>B</b>	<b>Loi « intégrale exponentielle » &amp; approximation gaussienne</b>	<b>123</b>
1	Deux premiers moments de $z$ . . . . .	123
2	Calcul de la densité marginale de la variable produit $r$ . . . . .	124
<b>C</b>	<b>Algorithme SMLR pour les critères de vraisemblance usuels</b>	<b>127</b>
1	Relation entre les critères MVS et MVD . . . . .	127
2	Algorithme SMLR pour les critères MVD et MVS . . . . .	128

---

2.1	Critère du MVD . . . . .	128
2.2	Critère du MVS . . . . .	129
3	Conclusion . . . . .	131
<b>D</b>	<b>Propriétés matricielles</b>	<b>133</b>
1	Lemme d'inversion matricielle . . . . .	133
2	Lemme d'inversion des matrices partitionnées . . . . .	133
3	Déterminant des matrices partitionnées . . . . .	134
4	Relations entre déterminants . . . . .	134
5	Quelques gradients matriciels . . . . .	134
	Références bibliographiques	137
	Table des matières	145