Rappels sur la théorie des ensembles

Master Bio Informatique 1ère année

Patricia Serrano Alvarado

lina UNIVERSITÉ DE NANTES

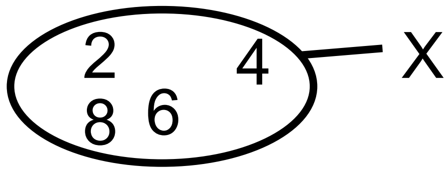
Merci à Emmanuel Desmontils

Définitions fondamentales

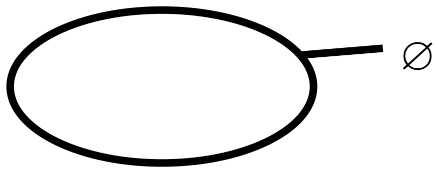
- Ensemble : collection non ordonnée d'objets différents.
  Soit X un ensemble et p un objet :
  - $p \in X$: signifie que l'objet p est un élément de l'ensemble X, i.e., p appartient à X
  - $p \notin X$: signifie que l'objet p n'est pas un élément de l'ensemble X, i.e., p n'appartient pas à X
- {1,4} = {4,1}
  - Les éléments peuvent être présentés dans un ordre arbitraire.
- Un ensemble ne peut pas contenir deux éléments égaux
  - ~~{1,4,1}~~
    Les éléments 1 et 1 ne sont pas distincts. Ils représentent le même élément.

Définir et représenter un ensemble

- Définir un ensemble
  - Par extension, énumération exhaustive des éléments
    - X={2,4,6,8}
  - Par caractérisation (compréhension, intension) :
    - X={p | pair(p) et 0 < p < 10}
- Représentation graphique d'un ensemble
  - Diagram de Venn

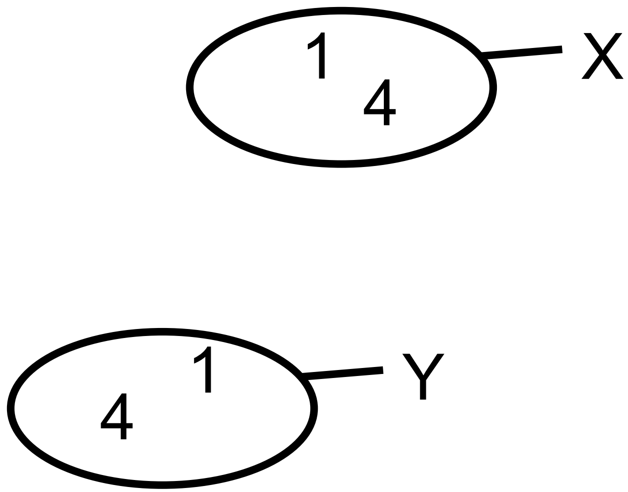


- Ensemble vide
  - Ensemble ne contenant pas d'éléments
  - {} = ∅
  - Attention, {0} ≠ {}



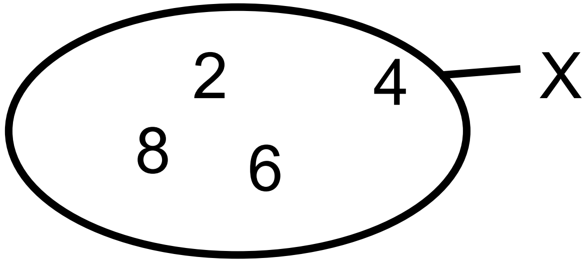
Égalité

- Égalité de deux ensembles :
  - deux ensembles X et Y sont égaux si et seulement si
    - chaque élément de X est aussi un élément de Y
    - ET que chaque élément de Y est aussi un élément de X
  - X=Y
  - $\forall x \in X$ alors $x \in Y$
    et $\forall y \in Y$ alors $y \in X$



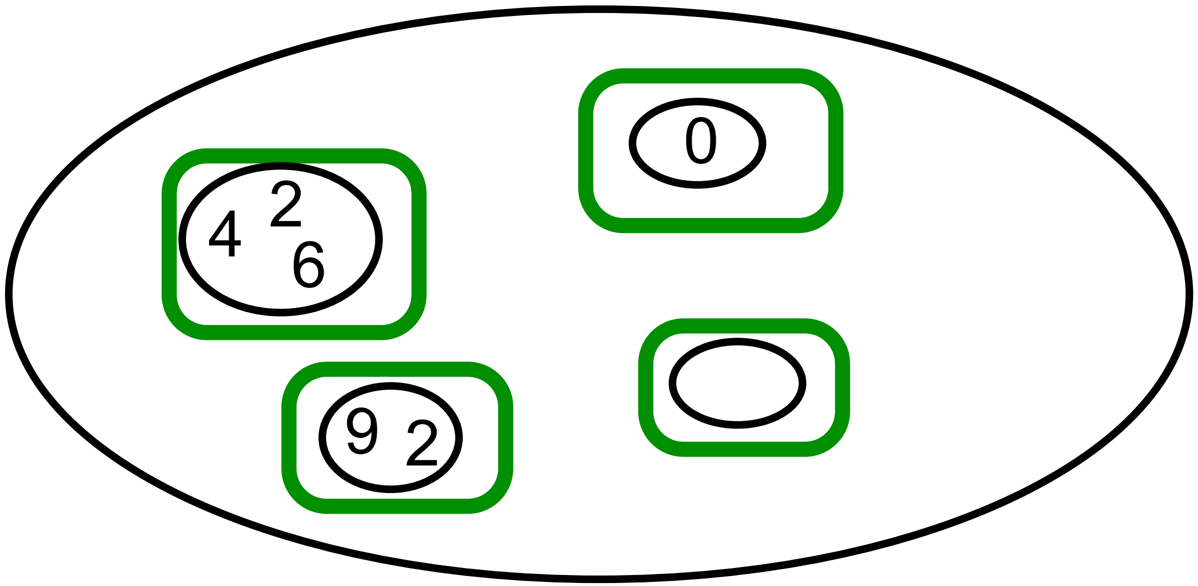
Cardinalité

- Cardinalité d'un ensemble :
  - Le nombre d'éléments de l'ensemble



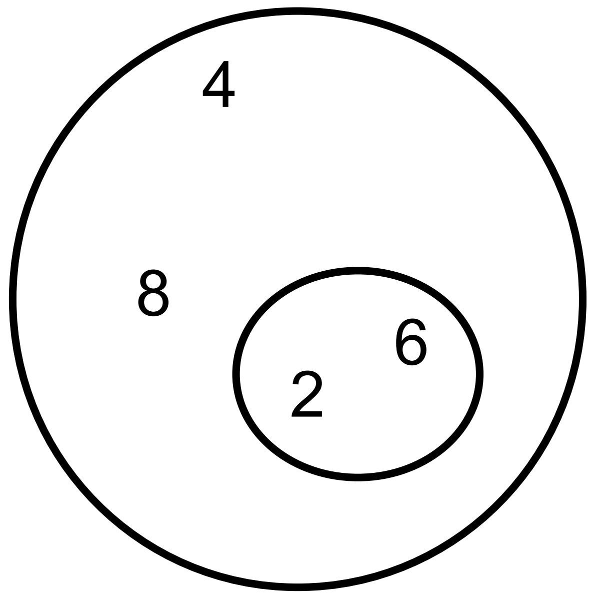
- Cardinalité(X) = Card(X) = |X| = 4

- Card({{4,2,6},{0},{},{9,2}}) = 4



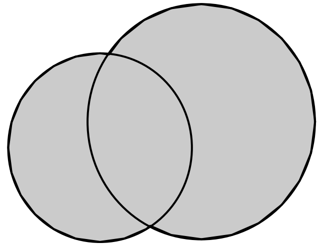
Sous-ensemble et inclusion

- Un ensemble Y est inclut dans un ensemble X si chaque élément de Y est aussi un élément de X.
  - $Y \subseteq X$
  - $Y \subseteq X$ et $Y \neq X \Leftrightarrow Y \subseteq X$
    - Y est appelé aussi *sous-ensemble propre* de X
  - $Y \subseteq X$ et $X \subseteq Y \Rightarrow X = Y$
  - X est parfois appelé ensemble universel
- $\{2,6\} \subset \{4,6,8,2\}$
- $\forall\ X, \varnothing \subseteq X$

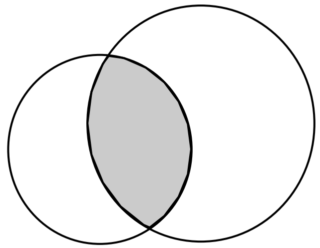


Opérations ensemblistes (1)

- **Union**
  - $Z = X \cup Y$ ssi $Z = \{z \mid z \in X \vee z \in Y\}$
  - $\{2,4,6,8\} \cup \{1,3,5,7,9\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
  - $X \cup \varnothing = X$

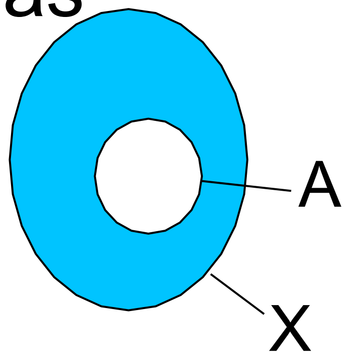


- **Intersection**
  - $Z = X \cap Y$ ssi $Z = \{z \mid z \in X \wedge z \in Y\}$
  - $\{2,4,6,8\} \cap \{1,2,3,4,5\} = \{2,4\}$
  - $X \cap \varnothing = X \cap \varnothing = \varnothing$
  - X et Y sont disjoints ssi $X \cap Y = \varnothing$
    - {1,3,5,7,9} et {2,4,6,8} sont disjoints

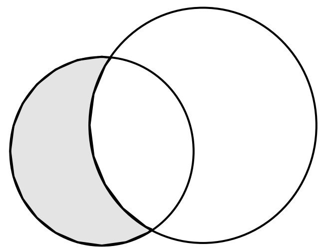


Opérations ensemblistes (2)

- **Ensemble complémentaire** : le complémentaire d'un sous-ensemble A d'un ensemble universel X est l'ensemble de tous les éléments qui ne sont pas dans A.



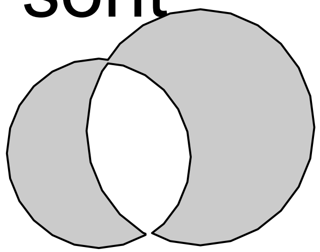
  - $C_X^A = A^c = \overline{A} = \{x \mid x \in X \wedge x \notin A\}$ avec $A \subseteq X$
  - $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $A=\{2,4,6,8\}$
    $A^c=\{1,3,5,7,9\}$
  - $X^c=\varnothing$; $\varnothing^c = \mathbf{X}$ **;** $A^{cc}=A$; $A^c \cap A = \varnothing$; $A^c \cup A = X$
- **Différence** : X\Y sont les éléments de X qui n'appartiennent pas à Y



  - $X\backslash Y = X - Y = \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$
  - $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\backslash\{1,2,3,5,7,9\}=\{4,6,8\}$

Opérations ensemblistes (3)

- **Différence symétrique** : X Δ Y comprend les éléments dans X ou dans Y mais pas ceux qui sont dans X et dans Y



  - $X \Delta Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X) = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y)$
  - $\{1,2,3,4,5,6\} \Delta \{4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3,7,8,9\}$
- **Produit cartésien (produit)** : X × Y est l'ensemble des couples (paires ordonnées) dont le premier élément appartient à X et le second à Y.
  - $X \times Y = \{ z=(x,y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$
- $X=\{1,2,6\}$, $Y=\{1,6\}$,
  $X \times Y = \{(1,1), (1,6), (2,1),(2,6),(6,1), (6,6)\}$
  - Attention $(1,6) \neq (6,1)$

Opérations ensemblistes (4)

- Ensemble des parties :
  P(X) est l'ensemble de tous les sous-ensembles de X
  - $\forall Y \subseteq X, Y \in \mathcal{P}(X)$
  - $X = \{1,3,2\}$
    $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$

Algèbre des ensembles (1)

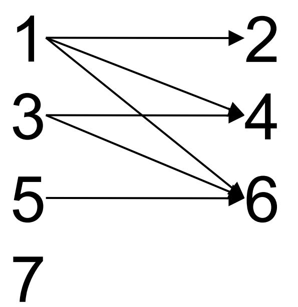
- Lois de commutativité
  - $X \cap Y = Y \cap X$
  - $X \cup Y = Y \cup X$
- Lois d'associativité
  - $X \cap Y \cap Z = (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
  - $X \cup Y \cup Z = (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$
- Lois d'identité
  - $A \cup \varnothing = A$ $\quad$ $A \cap U = A$
  - $A \cup U = U$ $\quad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
- Lois de distributivités
  - $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
  - $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
- $|X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y|$

Algèbre des ensembles (2)

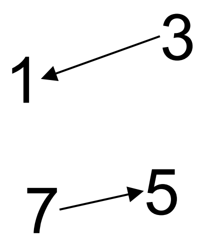
- Lois d'idempotence (équipotence)
  - $X \cap X = X$
  - $X \cup X = X$
- Lois d'absorption
  - $X \cup (X \cap Y) = X$
  - $X \cap (X \cup Y) = X$
- Lois de De Morgan
  - Soient $Z \subseteq X$ et $Y \subseteq X$
  - $(Z \cap Y)^c = Z^c \cup Y^c$
  - $(Z \cup Y)^c = Z^c \cap Y^c$
- Lois de complémentarité
  - $A \cup {\sim}A = U$ $\quad$ $A \cap {\sim}A = \varnothing$
  - ${\sim}U = \varnothing$ $\quad$ ${\sim}\varnothing = U$
  - ${\sim}({\sim}A) = A$

Notion de relation binaire (1)

- Relation binaire entre deux ensembles A et B
  - sous ensemble R du produit cartésien A×B.
  - si A=B, on dit simplement que R décrit une relation sur A.
- Exemples
  - Soient A={1,3,5,7} et B={2,4,6}
  - U={(x,y):x+y=9, x ∈ A, y ∈ B} alors U={(3,6),(5,4),(7,2)}
  - V={(x,y):x<y, x ∈ A, y ∈ B} alors V={(1,2),(1,4),(1,6),(3,4),(3,6),(5,6)}
  - W={(x,y):x=y+2, x ∈ A, y ∈ A} dans A alors W={(3,1),(7,5),(5,3)}
- Représentation graphique
  - graphe orienté
    - Digraphe si c'est sur 2 ensembles
  - sous forme de matrice booléenne
    - M[i,j]=Vrai si (i,j) ∈ R, Faux sinon



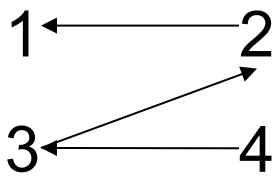
digraphe de V



graphe de W

Notion de relation binaire : exemple

- Soit une relation R sur A={1,2,3,4}
  - Graphique



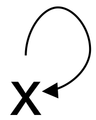
  - Par extension : R={(2,1), (3,2), (4,3)}
  - Par matrice

	1	***2***	***3***	***4***
1	F	F	F	F
2	V	F	F	F
3	F	V	F	F
4	F	F	V	F

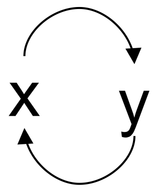
  - Par intension (caractérisation) : R={(x,y):x-y=1}

Notion de relation binaire (2)

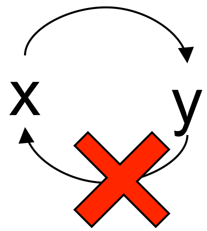
- Propriétés des relations sur un ensemble unique A
  - Réflexive
    - $\forall x$, xRx
    - (x,x) $\in$R



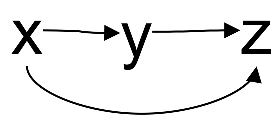
  - Symétrique
    - xRy $\Rightarrow$ yRx
    - Si (x,y) $\in$R alors (y,x) $\in$R



  - Antisymétrique
    - xRy et yRx $\Rightarrow$ x=y
    - si (x,y) $\in$R et x$\neq$y alors (y,x) $\notin$R



  - Transitive
    - xRy et yRz $\Rightarrow$ xRz
    - (x,y) $\in$R et (y,z) $\in$R alors (x,z) $\in$R



Notion de relation binaire : exemples

- La relation d'inclusion d'ensembles
  - Réfléxivité : $\forall \neq X, X \subseteq X$
  - Anti-symétrie : $Y \subseteq X$ et $X \subseteq Y \Rightarrow X = Y$
  - Transitivité : $Y \subseteq X \subseteq Z \Rightarrow Y \subseteq Z$
- La relation « est diviseur de » sur les nombres naturels
  - Réflexive : pour tout x, x est diviseur de x
  - Non symétrique : 2 divise 6 mais 6 ne divise pas 2
  - Transitive : x divise y (y=nx) et y divise z (z=my) : x divise z (z=mnx)
  - Anti-symétrique : x divise y et y divise x alors x=y
- Propriétés de la relation « différent » sur les entiers
  - non réflexive (x ≠ x est faux), symétrique (si x ≠ y alors y≠x), non transitive (x=2, y=3, z=2) et non anti-symétrique (x≠y et y≠x ne permet pas de conclure que x=y)

Notion de relation binaire (3)

- Fermeture R^* d'une relation R sur un ensemble unique A par rapport à une propriété P
    - A ne possède pas nécessairement P
  - R^* possède P
  - $R \subseteq R^*$
  - R^* est sous-ensemble de toute autre relation qui inclut R et qui possède P
- Exemple
  - Soit A={1,2,3} et R={(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3)}
      - R est non réflexive, non symétrique et non transitive
    - Réflexivité : R*={(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(2,2),(3,3)}
    - Symétrie : R*={(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(2,1),(3,2)}
    - Transitivité : R*={{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(2,1),(3,3),(2,2)}

Notion de relation binaire (4)

- Relation d'équivalence sur un ensemble A
  - Relation réflexive, symétrique et transitive
  - Abstraction de la notion d'égalité
  - exemple : xRy ssi xy>0 sur les entiers (zéro exclu)
    - les entiers de même signe

- Classe d'équivalence de x dans A par rapport à R (relation d'équivalence)
  - ensemble $E_x=\{z \in A : zRx\}$

Notion de relation binaire (5)

- Partition d'un ensemble A
  - collection de sous-ensembles non vides, disjoints dont la réunion donne A
  - $A=A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n$ avec $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$
  - les A_i sont les blocs de la partitions

Notion de relation binaire (6)

- Ordre partiel sur un ensemble A
  - Relation réflexive, antisymétrique et transitive
  - ensembles partiellement ordonnés (posets en anglais)
  - Soit R un ordre partiel sur A
    - si xRy et x $\neq$y alors x est prédécesseur de y
    - S'il n'existe pas de z entre x et y alors x est prédécesseur immédiat de y
    - x$\prec$y
  - Diagramme de Hasse
    - graphe dont les sommets sont les éléments de A
    - si x$\prec$y alors x est placé sous y et les deux sommets sont joints par un segment

Notion de relation binaire : exemples

- Exemples d'ordres partiels
  - $\leq$ sur R
  - $\subseteq$ sur les sous-ensembles
  - « est un diviseur de » sur l'ensemble des nombres naturels
  - « est un diviseur de » sur A={1,2,3,6,12,18}

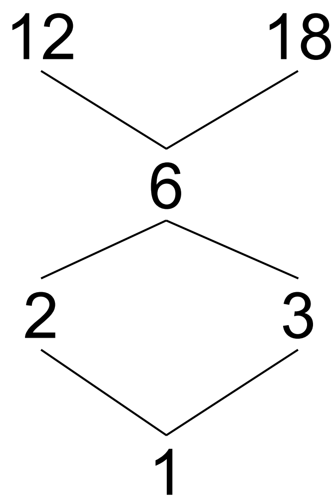


Diagramme de Hasse

Element	Prédécesseur	Prédécesseur immédiat
1		
2	1	1
3	1	
6	1,2,3	2,3
12	1,2,3,6	6
18	1,2,3,6	6

Notion de relation binaire (7)

- Ordre total
  - ordre partiel dans lequel chaque paire d'élément est en relation

- Exemples
  - ≤ sur R
  - l'ordre lexicographique habituel des mots dans un dictionnaire
  - « est un diviseur de » sur A={1,2,6,18}