 loig.jezequel@irisa.fr

Pot-pourri

Ce TD revient sur les différentes notions abordées depuis le début du semestre.

Exercice 1 **Exemple de simulation**

On travaillera sur les figures données en fin d'énoncé. Ces figures représentent un automate $\mathcal{A}$ (avec deux composantes connexes) et la structure de l'arène correspondant au jeu $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}(q_0, q'_0)$.

1. Justifier que q'_0 ne simule q_0 pour aucune simulation vue en cours.

2. À partir de maintenant on supprime la transition bouclant sur l'état q_1 et étiquetée par a. Mettre à jour l'arène. Justifier que $q_0 \preceq_{di} q'_0$.

3. On considère maintenant que l'état q_1 est acceptant. Justifier que $q_0 \npreceq_{di} q'_0$. Justifier que $q_0 \preceq_{de} q'_0$.

4. On ajoute trois états q_2, q_3, q'_3 à $\mathcal{A}$, tels que : q_2 est acceptant, il y a une transition de q_0 à q_2 étiquetée par b, il y a une transition de q'_0 à q'_3 étiquetée par b, on peut aller de q_2 à q_3 par n'importe quelle lettre, on peut boucler sur q_3 et q'_3 par n'importe quelle lettre. Mettre à jour l'arène. Justifier que $q_0 \npreceq_{de} q'_0$. Justifier que $q_0 \preceq_f q'_0$.

5. On ajoute finalement un dernier état q'_4, une transition de q'_0 à q'_4 étiquetée par a et une transition bouclant sur q'_4 étiquetée par b. Mettre à jour l'arène. Cela change-t'il les relations entre q_0 et q'_0 ?

Exercice 2 **Réduction de l'espace d'états (*)**

Lemme 1. *Étant donnés un NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, F)$ et deux états $q, q' \in Q$, on a :*

$$q \preceq_{di} q' \quad \Leftrightarrow \quad (q \in F \Leftrightarrow q' \in F) \wedge (\forall \sigma \in \Sigma, \forall p \in \delta(q,\sigma), \exists p' \in \delta(q',\sigma), p \preceq_{di} p')$$

1. Montrer que $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}/\approx_{di}) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$.

2. Montrer que $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}/\approx_f) \neq \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$ en général.

Exercice 3 **Retour sur le TD2**

Faire les exercices 5 et 8 du TD2.

Exercice 4 **Retour sur le TD3**

Faire l'exercice 4 du TD3.

Exercice 5 **Preuve du Lemme 1 (***)**

On considère l'opérateur $\mathcal{O} : Q \times Q \to Q \times Q$ sur les relations entre états d'un NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, F)$ défini de la manière suivante : $\forall q, q' \in Q, \forall \triangleleft \in Q \times Q, q\mathcal{O}(\triangleleft)q'$ si et seulement si (1) $q \in F \Leftrightarrow q' \in F$ et (2) $\forall \sigma \in \Sigma, \forall p \in \delta(q, \sigma), \exists p' \in \delta(q', \sigma), p \triangleleft p'$.

1. Montrer que $\mathcal{O}$ admet des points fixes.

2. Est-ce que $\preceq_{di}$ est un point fixe de $\mathcal{O}$?

3. Prouver le lemme 1.

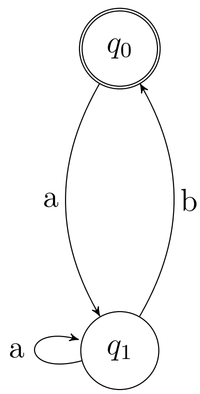
4. Justifier l'unicité des plus grand et plus petit points fixes de $\mathcal{O}$.

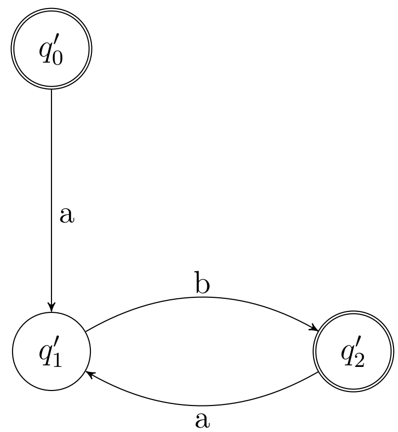
5. Que dire de $\preceq_{di}$?

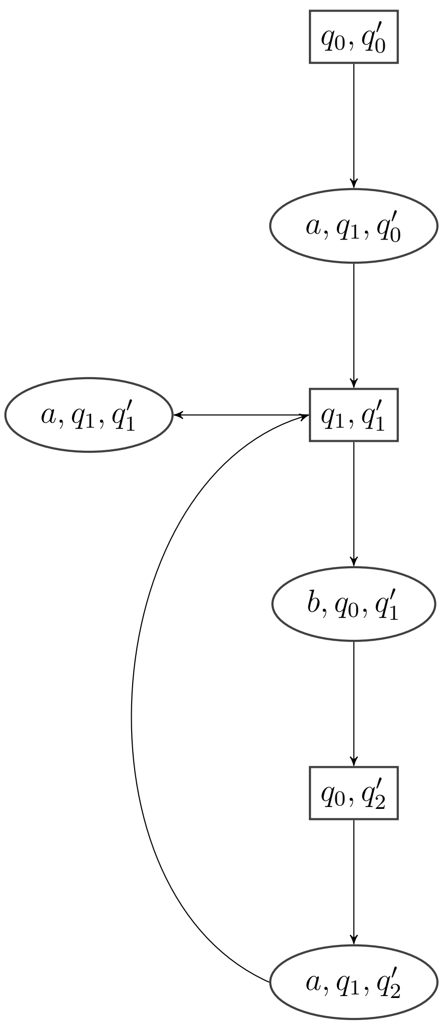
6. Proposer un algorithme permettant de construire $\preceq_{di}$.

Exercice 6 **Meilleure réduction de l'espace d'états (***)**

1. Montrer que $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}/\approx_{de}) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$.


q_0
a
b
a
q_1


q'_0
a
b
q'_1
q'_2
a


q_0, q'_0
a, q_1, q'_0
a, q_1, q'_1
q_1, q'_1
b, q_0, q'_1
q_0, q'_2
a, q_1, q'_2