Simulation

Le dernier exercice est difficile. Il n'est à traiter que si tout le reste a été bien fait.

Exercice 1 — Quand Duplicator gagne

1. Étant donnés un NBA $\mathcal{A}$ et $\star \in \{di, de, f\}$, soit (π, π') le couple d'exécutions obtenu lors d'une partie du jeu $G^{\star}_{\mathcal{A}}(q, q')$ gagnée par Duplicator. Montrer que si π est acceptante, alors π' l'est aussi.

2. Soit $\mathcal{A}$ un NBA et q, q' deux états de cet automate. Pour $\star \in \{di, de, f\}$, montrer que si $q \preceq_{\star} q'$ alors $\mathcal{L}_{\omega}(\mathcal{A}_q) \subseteq \mathcal{L}_{\omega}(\mathcal{A}_{q'})$, où $\mathcal{A}_p$ est le NBA ayant la même structure que $\mathcal{A}$ et pour seul état initial p.

Exercice 2 — Les relations de simulation sont des pré-ordres

Montrer que pour $\star \in \{o, di, de, f\}$, la relation $\preceq_{\star}$ est réflexive et transitive.

Exercice 3 — Comparaisons entre les relations de simulation

1. Montrer que $\preceq_{di} \subseteq \preceq_{de} \subseteq \preceq_{f} \subseteq \preceq_{o}$.

2. Pour $\star, * \in \{o, di, de, f\}$ donner, quand c'est possible, un automate $\mathcal{A}$ et deux états q, q' tels que $q \preceq_{\star} q'$ mais $q \not\preceq_{*} q'$.

Lemme 1. *Étant donnés un NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, F)$ et deux états $q, q' \in Q$, on a :*

$$q \preceq_{di} q' \quad \Leftrightarrow \quad (q \in F \Leftrightarrow q' \in F) \wedge (\forall \sigma \in \Sigma, \forall p \in \delta(q, \sigma), \exists p' \in \delta(q', \sigma), p \preceq_{di} p')$$

Exercice 4 — Réduction de l'espace d'états

Montrer que $\mathcal{L}_{\omega}(\mathcal{A}/\approx_{di}) = \mathcal{L}_{\omega}(\mathcal{A})$

`Exercice 5` `Preuve du Lemme 1`

On considère l'opérateur $\mathcal{O} : Q \times Q \to Q \times Q$ sur les relations entre états d'un NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, F)$ défini de la manière suivante : $\forall q, q' \in Q, \forall \triangleleft \in Q \times Q, q\mathcal{O}(\triangleleft)q'$ si et seulement si (1) $q \in F \Leftrightarrow q' \in F$ et (2) $\forall \sigma \in \Sigma, \forall p \in \delta(q, \sigma), \exists p' \in \delta(q', \sigma), p \triangleleft p'$.

1. Montrer que $\mathcal{O}$ admet des points fixes.

2. Est-ce que $\preceq_{di}$ est un point fixe de $\mathcal{O}$?

3. Prouver le lemme 1.

4. Justifier l'unicité des plus grand et plus petit points fixes de $\mathcal{O}$.

5. Que dire de $\preceq_{di}$?

6. Proposer un algorithme permettant de construire $\preceq_{di}$.