 loig.jezequel@irisa.fr

co-Büchi, Rabin, Streett et Muller

Certaines questions sont précédées d'un ou plusieurs symboles * donnant une idée de leur difficulté. Il vous est demandé de faire au moins les questions sans symbole. Si vous avez le temps faites ensuite les questions * puis les questions ** et enfin ***.

`Exercice 1` `Des GNBA aux NBA : rappel`

Soit $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{q_0, q_1\}, \delta, \{\{q_1\}, \{q_2, q_3\}\})$ le GNBA tel que :

$$\begin{array}{rcl}
\delta(q_0, a) & = & \{q_2\} \\
\delta(q_0, b) = \delta(q_0, c) & = & \emptyset \\
\delta(q_1, a) & = & \{q_3\} \\
\delta(q_1, b) & = & \emptyset \\
\delta(q_1, c) & = & \{q_1\} \\
\delta(q_2, a) = \delta(q_2, c) & = & \emptyset \\
\delta(q_2, b) & = & \{q_2, q_3\} \\
\delta(q_3, a) & = & \emptyset \\
\delta(q_3, b) & = & \{q_0\} \\
\delta(q_3, c) & = & \{q_1\}
\end{array}$$

En appliquant la construction vue en cours, donner un NBA reconnaissant le même langage.

`Exercice 2`

Un automate co-Büchi (coBA) a pour condition d'acceptation un ensemble $\alpha \subseteq Q$. Une exécution est acceptée si et seulement si elle passe par α un nombre fini de fois.

1. Soit $\mathcal{A}_1 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{q_0\}, \delta, \{q_1\})$ le DBA tel que :

$$\begin{array}{rcl}
\delta(q_0, a) & = & \{q_1\} \\
\delta(q_0, b) & = & \{q_0\} \\
\delta(q_1, a) & = & \{q_0\} \\
\delta(q_1, b) & = & \{q_1\},
\end{array}$$

construire un DcoBA reconnaissant le complémentaire de $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}_1)$.

2. Soit $\mathcal{A}_2 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{q_0\}, \delta, \{q_1\})$ le DBA tel que :

$$\begin{array}{rcl} \delta(q_0, a) & = & \{q_1\} \\ \delta(q_0, b) & = & \{q_0\} \\ \delta(q_1, a) & = & \emptyset \\ \delta(q_1, b) & = & \{q_1\}, \end{array}$$

construire un DcoBA reconnaissant le complémentaire de $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}_2)$.

3. * Prouver qu'un langage $\mathcal{L}$ est reconnaissable par un DBA si et seulement si son complémentaire $\overline{\mathcal{L}}$ est reconnaissable par un DcoBA.

4. ** Montrer que ce n'est pas le cas pour les NBA. (i.e. il n'existe pas nécessairement un DcoBA – ou même un NcoBA – reconnaissant le complémentaire du langage d'un NBA.)

5. ** Étant donné un NcoBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, \alpha)$, définir un DcoBA $\mathcal{A}'$ reconnaissant le même langage que $\mathcal{A}$.
Un indice : $\mathcal{A}' = (2^Q \times 2^Q, \Sigma, \delta', (Q_0, \emptyset), 2^Q \times \{\emptyset\})$.

6. Le langage $\mathcal{L} = (A + B)^* A^\omega$ peut-il être reconnu par un NcoBA ? Pour faire la preuve on pourra utiliser les résultats des questions précédentes.

`Exercice 3` — `Rabin et Streett`

Un automate de Rabin déterministe (DRA) est un 5-uplet $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, \Omega)$ où Q, Σ, q_0 et δ sont respectivement un ensemble d'états, un alphabet, un état initial, et une relation de transition. La condition d'acceptation Ω est de la forme $\Omega = \{(E_1, F_1), \ldots, (E_n, F_n)\}$ avec $E_i, F_i \subseteq Q$ pour tout i. Une exécution est acceptée si et seulement si il existe i tel que aucun état de E_i n'apparaît infiniment souvent dans cette exécution et au moins un état de F_i apparaît infiniment souvent dans cette exécution.

Un automate de Streett déterministe (DSA) a exactement la même forme qu'un DRA, mais cette fois une exécution est acceptée si et seulement si pour tout i soit un état de E_i apparaît infiniment souvent dans l'exécution, soit aucun état de F_i n'apparaît infiniment souvent dans l'exécution.

1. Proposer un DRA $\mathcal{A}$ reconnaissant le langage $\mathcal{L} = (A + B)^* A^\omega$. Quel est le langage reconnu par $\mathcal{A}$ si on le considère comme un DSA ?

2. On considère $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, \{(L_i, U_i)\}_{i \in I})$ un DRA. Montrer que le ω-langage $\mathcal{L}_\omega(\overline{\mathcal{A}})$ reconnu par le DSA $\overline{\mathcal{A}} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, \{(L_i, U_i)\}_{i \in I})$ est le complémentaire du ω-langage $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$ reconnu par $\mathcal{A}$. En d'autres termes : $\mathcal{L}_\omega(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})}$.

3. * Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, \{(L_i, U_i)\}_{i \in I})$ un DRA. Construire un NBA de taille $|Q| + |I| \times |Q|$ reconnaissant le même langage.

Exercice 4 **Muller**

Un automate de Muller déterministe (DMA) est un 5-uplet $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, \mathcal{F})$ où Q, Σ, q_0 et δ sont respectivement un ensemble d'états, un alphabet, un état initial, et une relation de transition. La condition d'acceptation $\mathcal{F}$ est de la forme $\{F_1, \ldots F_n\}$ avec $F_i \subseteq Q$ pour tout i. Une exécution est acceptée si et seulement si il existe i tel que les états apparaissant infiniment souvent dans cette exécution sont exactement ceux de F_i.

1. Proposer un DMA reconnaissant $\mathcal{L}_1 = ((A+B)^*A)^\omega$.
2. Proposer un DMA reconnaissant $\mathcal{L}_2 = (A+B)^*B^\omega$.
3. Proposer un DMA reconnaissant $\mathcal{L}_3$, le ω-langage dont les mots qui contiennent un nombre infini de A contiennent aussi un nombre infini de B.
4. Soit un DBA. Donner un DMA reconnaissant le même langage.
5. Que peut-on en déduire sur les DMA vis à vis des DBA à partir des questions 2 et 4 ?
6. * Soit $\mathcal{L}$ un langage reconnaissable par un DMA. Montrer que son complémentaire $\overline{\mathcal{L}}$ est reconnaissable par un DMA.
7. * Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux langages reconnaissables par des DMA. Montrer que $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}'$ est reconnaissable par un DMA.
8. ** Prouver que les langages reconnaissables par des DMA sont des combinaisons booléennes de langages reconnaissables par des DBA.
9. *** Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, \mathcal{F})$ un DMA. Construire un NBA reconnaissant le même langage.
10. ** Conclure sur les relations entre DBA, NBA et DMA.