 loig.jezequel@irisa.fr

Automates de Büchi généralisés

Exercice 1 — **Restes du TD1**

Pour chacune des affirmations suivantes faire une preuve ou donner un contre exemple.

1. Tout NBA a un NBA équivalent qui a un unique état initial.

2. Tout NBA a un NBA équivalent qui a un unique état acceptant.

Exercice 2 — **Des GNBA aux langages**

Donner le langage de chacun des GNBA suivants. Les transitions non spécifiées donnent l'ensemble vide.

1. $\mathcal{A}_1 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{q_0\}, \delta_1, \{\{q_1\}, \{q_2\}\})$ avec :

$$\begin{array}{rcl} \delta_1(q_0, a) & = & \{q_0, q_1\} \\ \delta_1(q_0, b) & = & \{q_0\} \\ \delta_1(q_0, c) & = & \{q_2\} \\ \delta_1(q_1, b) & = & \{q_0\} \\ \delta_1(q_2, c) & = & \{q_0\} \end{array}$$

2. $\mathcal{A}_2 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c\}, \{q_0\}, \delta_2, \{\{q_2\}, \{q_4\}\})$ avec :

$$\begin{array}{rcl} \delta_2(q_0, a) & = & \{q_1\} \\ \delta_2(q_0, c) & = & \{q_3\} \\ \delta_2(q_1, b) & = & \{q_2\} \\ \delta_2(q_2, c) & = & \{q_0\} \\ \delta_2(q_3, b) & = & \{q_4\} \\ \delta_2(q_4, a) & = & \{q_0\} \end{array}$$

3. $\mathcal{A}_3 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b, c\}, \{q_0\}, \delta_3, \{\{q_0\}, \{q_1\}\})$ avec :

$$\begin{array}{rcl} \delta_3(q_0, a) & = & \{q_0\} \\ \delta_3(q_0, b) & = & \{q_0\} \\ \delta_3(q_0, c) & = & \{q_0, q_1\} \\ \delta_3(q_1, a) & = & \{q_0, q_1\} \\ \delta_3(q_1, b) & = & \{q_1\} \\ \delta_3(q_1, c) & = & \{q_1\} \end{array}$$

Exercice 3 **Des GNBA aux NBA**

En utilisant la construction du cours (rappelée dans l'exercice 4) donner pour chaque GNBA de l'exercice 2 le NBA correspondant.

Exercice 4 **Des GNBA aux NBA : preuve**

Soit $\mathcal{G} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{F})$ un GNBA avec $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$. On considère le NBA $\mathcal{A} = (Q', \Sigma', Q'_0, \delta', F')$ tel que :

- $Q' = Q \times \{1, .., k\}$
- $\Sigma' = \Sigma$
- $Q'_0 = Q_0 \times \{1\}$
- $\delta'((q,i),\sigma) = \begin{cases} \delta(q,\sigma) \times \{i\} & \text{if } q \notin F_i \\ \delta(q,\sigma) \times \{(i+1 \mod k)+1\} & \text{otherwise} \end{cases}$
- $F' = F_1 \times \{1\}$

1. Montrer que ces deux automates reconnaissent le même langage, c'est à dire : $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{G}) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$.

Exercice 5 **Intersection de GNBA**

En utilisant la construction du cours (rappelée dans l'exercice 6) proposer un GNBA qui reconnaît chacune des intersections de langages suivantes (les langages sont ceux des automates de l'exercice 2 : $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_\omega(A_i)$).

1. $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$

2. $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3$

3. $\mathcal{L}_3 \cap \mathcal{L}_1$

Exercice 6 **Intersection de GNBA : preuve**

Soient $\mathcal{G}_1 = (Q_1, \Sigma, Q_0^1, \delta_1, \mathcal{F}_1)$ et $\mathcal{G}_2 = (Q_2, \Sigma, Q_0^2, \delta_2, \mathcal{F}_2)$ deux GNBA. On considère le GNBA $\mathcal{G} = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, Q_0^1 \times Q_0^2, \delta, \mathcal{F})$ tel que :

- $\delta((q_1, q_2), \sigma) = \{(q'_1, q'_2) \ : \ q'_1 \in \delta_1(q_1, \sigma)) \wedge q'_2 \in \delta_2(q_2, \sigma)\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \{Q_2\} \cup \{Q_1\} \times \mathcal{F}_2$

1. Montrer que $\mathcal{G}$ reconnaît l'intersection des langages de $\mathcal{G}_1$ et de $\mathcal{G}_2$, c'est-à-dire : $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{G}) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{G}_1) \cap \mathcal{L}_\omega(\mathcal{G}_2)$.

Exercice 7 **Intersection de GNBA et intersection de NBA**

On a vu comment transformer un GNBA en un NBA équivalent et comment construire un GNBA reconnaissant l'intersection des langages de deux GNBA. Il est aussi possible, très simplement, pour un NBA donné de construire un GNBA équivalent (comment ?). À l'aide de tous ces résultats, proposer une construction en une seule étape d'un NBA reconnaissant l'intersection des langages de deux NBA.

Exercice 8 **Intersection : langages réguliers et langages ω-réguliers**

Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux langages réguliers.

1. A-t-on nécessairement $(\mathcal{L}_1)^\omega \cap (\mathcal{L}_2)^\omega = (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)^\omega$? Si oui, en faire la preuve. Si non, proposer un contre exemple.

2. Montrer que $(\mathcal{L}_1.\#)^\omega \cap (\mathcal{L}_2.\#)^\omega = (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2.\#)^\omega$, où # est une lettre qui n'apparaît ni dans les mots de $\mathcal{L}_1$ ni dans ceux de $\mathcal{L}_2$.