# Agrégation de Mathématiques option Informatique
# TP5

Loïg Jezequel

Mardi 6 Mars 2012

## 1 Aire de rectangles

L'objet de ce sujet est de calculer l'aire d'une union finie de rectangles dont les cotés sont parallèlles aux axes d'un repère orthonormé.

### 1.1 Introduction

On considère un ensemble fini, $R$, de rectangles, dont les cotés sont parallèles aux axes d'un repère othonormé. Pour simplifier on considère aussi que les coordonnées des sommets de ces rectangles sont toutes des entiers positifs et qu'aucun rectangle n'a un coté de longeur nulle.

Un rectangle $r$ est représenté par les coordonnées $(x_r, y_r)$ de son sommet inférieur gauche et $(x'_r, y'_r)$ de son sommet supérieur droit.

Ainsi, l'ensemble $R = \{((1,2),(3,3))((2,1),(4,6))((1,4),(5,5))\}$ a une aire de 13.

**Question 1.** Écrire une fonction qui calcule les coordonnées $(x_{inf}, y_{inf})$ du sommet inférieur gauche et $(x_{sup}, y_{sup})$ du sommet supérieur droit du plus petit rectangle iso-orienté qui contient tous les rectangles d'un ensemble $R$.

### 1.2 Structures de données utiles

#### 1.2.1 Table des transitions

La table des transitions est un tableau indicé par les abscisses $X = \{x_{inf} .. \, x_{sup}\}$, où $x_{inf}$ et $x_{sup}$ sont ceux calculés à la question précédente. La case d'indice $x \in X$ de ce tableau contient la liste des rectangles de $R$ dont l'un des cotés verticaux a pour abscisse $x$.

**Question 2.** Écrire une fonction qui calcul la table des transitions d'un ensemble $R$.

On appelle $T = \{x \mid \exists r \in R \text{ tel que } x = x_r \text{ ou } x = x'_r\}$ l'ensemble des points de transition de $R$.

**Question 3.** Écrire une fonction qui calcule $T$ pour $R$ donné.

On note $R_x$ l'ensemble des rectangles de $R$ qui intersectent la droite verticale d'abscisse x. On note $b_x$ le cardinal de $R_x$.

**Question 4.** Écrire une fonction qui calcule la borne supérieur des $b_x$ pour $x \in X$.

#### 1.2.2 Table des intervalles

La table des intervalles représente, pour $x \in X$, l'ensemble $I_x$ des intervalles qui sont les projections sur l'axe des ordonnées des rectangles intersectés par la droite verticale d'abscisse $x$. Elle est constituée de tableaux indicés par les ordonnées $Y = \{y_{inf}..y_{sup}\}$ et permettant de calculer pour tout $y \in Y$ : 1) le nombre de rectangles de $R_x$ dont la projection sur l'axe des ordonnées contient l'intervalle $]y, y+1[$, pour $y < y_{sup}$, et 2) le nombre de rectangles de $R_x$ dont le côté inférieur (ou supérieur) est d'ordonnée $y$.

Remarque : en utilisant la table des transitions on peut calculer simplement $I_{x+1}$ en fonction de $I_x$.

Pour tout $x$, on note $m_x = \int_{y \in \cup I_x} dy$ la mesure de l'union des intervalles appartenant à $I_x$.

**Question 5.** Écrire une fonction qui calcule la borne supérieure des $m_x$ pour $x \in X$.

### 1.3 Calcul de l'aire d'un ensemble de rectangles

**Question 6.** Utiliser les réponses aux questions précédentes pour écrire une fonction calculant l'aire $a = \int\int_{(x,y) \in UR} dxdy$ d'un ensemble $R$ de rectangles.

Indication : on utilisera l'algorithme de calcul de $m_x$ et un algorithme calculant la distance entre un point de transition et son successeur.

# 2 Jeux et stratégies

L'objet de cet exercice est d'étudier quelques jeux à deux joueurs, et en particulier des manières de calculer des stratégies gagnantes pour ces jeux.

## 2.1 Définitions préliminaires

**Définition 1.** *Une arène est un couple $A = (Q, E)$, comprenant un ensemble de positions $Q = Q_0 \dot{\cup} Q_1$ et un ensemble d'arêtes $E \subseteq Q \times Q$, tels que $\forall q \in Q, \ \exists p \in Q \ : \ (q, p) \in E$.*

Une *partie* est une séquence $\rho = q_1 q_2 q_3 \ldots$ de positions, telle que $(q_i, q_{i+1}) \in E$. Une telle partie est produite par les deux joueurs, $p_0$ et $p_1$, de la manière suivante : à partir d'une position $q \in Q_i$ le joueur $p_i$ sélectionne une arête $(q, q') \in E$, la position du jeu devient alors $q'$.

**Définition 2.** *Un jeu est un couple $G = (A, \varphi)$, où $A$ est une arène et $\varphi$ est une condition de victoire pour $p_0$. Une partie $\rho$ est gagnée par $p_0$ si $\rho$ vérifie $\varphi$. Dans le cas contraire la partie est gagnée par $p_1$.*

Les conditions de victoire sont généralement des conditions sur les occurrences de positions spécifiques durant une partie, ou bien sur les positions vues infiniment souvent. Étant donné un jeu $G = (A, \varphi)$, on note $Win \subseteq Q^\omega$ l'ensemble des parties gagnées par $p_0$.

**Définition 3.** *Une stratégie pour $p_0$ à partir de la position $q_0$ est une fonction $f : Q^* Q_0 \rightarrow Q$ qui associe à tout préfixe de partie $q_0 \ldots q_k$, tel que $q_k \in Q_0$, une position $q \in Q$ telle que $(q_k, q) \in E$.*

Une partie $\rho = q_0 q_1 q_2 \ldots$ est jouée *en accord* avec une stratégie $f$ si $\forall i$ tel que $q_i \in Q_0$, $q_{i+1} = f(q_0 \ldots q_i)$.

Une stratégie est dite *gagnante* à partir de $q_0$ si toute partie jouée en accord avec cette stratégie depuis $q_0$ est un élément de $Win$.

On appel *région gagnante* de $p_0$ l'ensemble des positions d'une arène à partir des quelles $p_0$ a une stratégie gagnante. On note une telle région $W_0$.

Une stratégie $f$ est dite *positionnelle* si pour tout préfixe de partie $q_0 \ldots q_k$, $f(q_0 \ldots q_k)$ ne dépend que de $q_k$.

Dans cet exercice on s'interessera a calculer efficacement des régions gagnantes et des stratégies (positionnelles) gagnantes dans des jeux particuliers.

## 2.2 Jeux d'accessibilité

**Définition 4.** *Un jeu d'accessibilité est un jeu où une partie $\rho = q_0 q_1 q_2 \ldots$ est gagnée par $p_0$ si et seulement si $\exists i$ tel que $q_i \in F$, pour $F \subseteq Q$ donné.*

Dans un tel jeu les régions gagnantes $W_0$ et $W_1$, ainsi que des stratégies positionnelles gagnantes correspondantes peuvente être calculées en temps polynomial en la taille de l'arène. Pour cela on utilise des objets appelés attracteurs, définits de la manière suivante :

$$Attr_0^i(F) = \{q \in Q \mid \text{partant de } q, p_0 \text{ peut forcer une visite dans } F \text{ en moins de } i \text{ pas}\}.$$

Ces attracteurs peuvent se construire de manière inductive :

$$\begin{array}{rcl} q \in Attr_0^0(F) & \Leftrightarrow & q \in F \\ q \in Attr_0^{i+1}(F) & \Leftrightarrow & q \in Attr_0^i(F) \\ & & \text{ou } q \in Q_0 \wedge \exists (q,r) \in E, r \in Attr_0^i(F) \\ & & \text{ou } q \in Q_1 \wedge \forall (q,r) \in E, r \in Attr_0^i(F). \end{array}$$

Il existe une valeur $l \leq |Q|$ telle que $Attr_0^l F = Attr_0^{l+1}(F)$. On définit :

$$Attr_0(F) = \bigcup_{i=0}^{l} Attr_0^i.$$

On peut prouver que $W_0 = Attr_0(F)$ et $W_1 = Q \setminus Attr_0(F)$. On peut aussi prouver que, partant de n'importe quel sommet de $W_0$, $p_0$ a une stratégie gagnante positionnelle. De même, partant de n'importe quel sommet de $W_1$, $p_1$ a une stratégie gagnante positionnelle.

**Question 1.** Écrire une fonction qui calcule $W_0$ et $W_1$ pour un jeu d'accessibilité donné.

**Question 2.** Écrire une fonction qui calcule une stratégie positionnelle gagnante pour $p_0$ à partir de $W_0$. Indication : à partir de n'importe quelle position de $Attr_0^{i+1} \setminus Attr_0^i$ on peut passer directement à une position de $Attr_0^i$.

**Question 3.** Écrire une fonction qui calcule une stratégie positionnelle gagnante pour $p_1$ à partir de $W_1$. Indication : à partir de n'importe quelle position de $Q \setminus Attr_0$ on peut passer à une autre position de $Q \setminus Attr_0$.

## 2.3 Jeux de sûreté

**Définition 5.** *Un jeu de sûreté est un jeu où une partie $\rho = q_0 q_1 q_2 \ldots$ est gagnée par $p_0$ si et seulement si $\forall i$, $q_i \in F$, pour $F \subseteq Q$ donné.*

Un tel jeu peut se ramener à un jeu d'accessibilité où le but est d'atteindre $F' = Q \setminus F$ et la région gagnante $W_1'$ correspond à la région gagnante $W_0$ du jeu de sûreté.

**Question 4.** Écrire une fonction qui calcule $W_0$ pour un jeu de sûreté donné.