Programmation dynamique et autres exercices

Exercice 1 **Distance d'édition**

Cette distance est aussi appelée distance de Levenshtein. On considère deux mots $X = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ et $Y = \langle y_1, y_2, \ldots, y_m \rangle$. On appelle distance d'édition le nombre minimal d'opérations nécessaires pour la transformation de X en Y. Ces opérations sont la suppression d'un caractère de X, l'insertion d'un caractère de Y dans X et le remplacement d'un caractère de X par un autre caractère.

1. Donner une formule de récurrence pour calculer $d(u, v)$, la distance d'édition entre deux mots u et v.

2. Utilisée telle quelle, cette formule donne une fonction récursive peu efficace pour le calcul de la distance d'édition entre deux mots. Pourquoi est-ce si peu efficace ?

3. Proposer une solution à ce manque d'efficacité sous forme d'un algorithme (programmation dynamique) calculant la distance d'édition entre deux mots.

4. Comment modifier votre algorithme afin de retourner la suite d'opérations menant à cette distance ?

Exercice 2 **Plus court chemin et programmation linéaire**

Un problème de programmation linéaire peut être modélisé comme suit : soient $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^n$. On veut trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ qui maximise $c^T x$ sous les contraintes $Ax \leq b$. L'algorithme du *simplexe* est en pratique très efficace (même s'il requiert en théorie un temps exponentiel). Il existe toutefois des algorithmes polynomiaux plus ou moins efficaces.

On s'intéresse ici au problème d'existence (trouver x tel que $Ax \leq b$) d'une solution dans le cas particulier d'un *système de contraintes de potentiel*. Dans ce problème, la matrice A a exactement un 1 et un -1 sur chaque ligne, les autre composantes de A valant 0. Les contraintes sont donc de la forme $x_j - x_i \leq b_k$.

1. Soit x une solution de $Ax \leq b$. Montrer que pour une constante d quelconque, $x + d$ est aussi une solution.

À partir de A et b, on construit un graphe de potentiel comme suit $G = (S, E)$: $S = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ et $E = \{(v_i, v_j) \mid x_j - x_i \leq b_k \text{ est une contrainte }\} \cup \{(v_0, v_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Le poids de l'arc (v_i, v_j) est b_k si $x_j - x_i \leq b_k$ est une contrainte et 0 sinon.

2. Montrer que le système a une solution si et seulement si le graphe de potentiel ne contient pas de circuit de poids strictement négatif. Donner en cas d'existence une solution pour le système.

3. Donner un algorithme pour trouver cette solution. Quelle est sa complexité ?

Exercice 3 **Fermeture réflexive et transitive d'un graphe dynamique**

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté auquel on ajoute au fur et à mesure de nouveaux arcs. On souhaite calculer sa fermeture réflexive et transitive $G^* = (S, A^*)$ et pouvoir la mettre à jour efficacement. On représente G^* par sa matrice d'adjacence.

1. Montrer comment G^* peut être mis à jour quand un nouvel arc est inséré en un temps $O(|S|^2)$. Donner un exemple dans lequel cette borne est nécessairement atteinte.

2. Décrire un algorithme efficace de mise à jour : pour une suite quelconque d'arcs $a_1, \ldots, a_n$, à partir d'un ensemble d'arcs vide, le temps total d'exécution de l'algorithme devra être en $\sum_{i=1}^{n} t_i = O(|S|^3)$, où t_i est le temps nécessaire à la i-ème mise à jour.