Preuves de programmes

Axiomes :

$$\{P\}skip\{P\} \qquad \{P[E/x]\}x := E\{P\}$$

Règles d'inférence :

$$\frac{\{P\}S_1\{R\} \quad \{R\}S_2\{Q\}}{\{P\}S_1; S_2\{Q\}} \qquad \frac{\{P \wedge b\}S_1\{Q\} \quad \{P \wedge \neg b\}S_2\{Q\}}{\{P\}\text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2\{Q\}}$$

$$\frac{P \Rightarrow P' \quad \{P'\}S\{Q'\} \quad Q' \Rightarrow Q}{\{P\}S\{Q\}} \qquad \frac{\{I \wedge b\}S\{I\}}{\{I\}\text{while } b \text{ do } S \text{ done}\{I \wedge \neg b\}}$$

`Exercice 1`

1. Montrer que : $\vdash \{true\}\text{if } (x < 0) \text{ then } skip \text{ else } x := -x\{x \leq 0\}$.

2. Montrer que, pour tout q : $\vdash \{true\}\text{while } true \text{ do } skip\{q\}$.

`Exercice 2`

Soit le programme A suivant :

```
y1 := 0;
y2 := 1;
y3 := 1;
while y3 <= x do
   y1 := y1+1;
   y2 := y2+2;
   y3 := y3+y2
done
```

1. Que calcule A ?

2. Conjecturer les valeurs de `y2` et `y3` en fonction de `y1`

3. On prendra pour invariant, I, la conjonction des deux égalités trouvées à la question précédente et de $(y1 \times y1 \leq x)$. Montrer que si, initialement, on a $(x \geq 0)$ alors I est vérifié juste avant la boucle.

4. Montrer $\vdash \{x \geq 0\}A\{(y1 \times y1 \leq x) \wedge (x < (y1 + 1) \times (y1 + 1))\}$.

5. Prouver la terminaison de A.

Exercice 3 **Factorielle**

1. Proposer un programme B qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule $n!$ et range le résultat dans une variable x.

2. Prouver $\vdash \{n \geq 0\}B\{x = n!\}$.

3. Prouver que B termine.

Exercice 4 **PGCD et PPCM**

1. Proposer un programme C qui, étant donnés deux entiers $n \geq 0$ et $m \geq 0$, calcule le PGCD de n et m et range le résultat dans une variable x.

2. Prouver $\vdash \{n \geq 0 \wedge m \geq 0\}C\{x = pgcd(n, m)\}$.

3. Prouver que C termine.

4. Faire de même pour le PPCM.

Exercice 5 **Fibonnacci**

Le $n^{\text{ème}}$ nombre de Fibonnacci, noté f_n, peut se définir ainsi : $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $\forall n > 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

1. Proposer un programme D qui, étant donné un entier $n \geq 1$, calcule f_n et range le résultat dans une variable x.

2. Prouver $\vdash \{n \geq 1\}D\{x = f_n\}$.

3. Prouver que D termine.