Chemins de poids minimal et modélisation

Exercice 1 : chemins de poids minimal dans un DAG

On a vu lors du précédent TD que les cycles de poids négatif dans un graphe posent problème pour trouver les plus courts chemins. Il existe deux cas simples de graphes où les cycles de poids négatif ne sont pas présents : les graphes sans arcs de poids négatif (dans lesquels on peut trouver les chemins de poids minimal par l'algorithme de Dijkstra) et les graphes sans cycles. Dans cet exercice nous nous intéressons au cas des graphes sans cycles (DAG). L'algorithme de la figure 1 permet de trouver les plus courts chemins entre un sommet et les autres sommets d'un DAG. La linéarisation d'un graphe étant donnée par le tri topologique de celui-ci.

```
procedure dag-shortest-paths(G,l,s)
Input: DAG G=(V,E), edge lengths {l(u,v): (u,v)∈E}, vertex s∈V
Output: for all vertices u reachable from s, u.dist is set to
        the distance from s to u

for all u∈V do
    u.dist:=∞
    u.prev:=nil
enddo
s.dist:=0
linearize G
for all u∈V, in linearized order do
    for all edges (u,v)∈E do
        v.dist:=min{v.dist, u.dist+l(u,v)}
    enddo
enddo
```

Figure 1 – Chemins de poids minimal dans un DAG.

1. Appliquer l'algorithme de la figure 1 au graphe de la figure 2 afin de trouver les chemins de poids minimal entre A et les autres sommets.
2. L'algorithme de la figure 1 permet aussi de calculer les chemins de poids maximal entre un sommet et les autres sommets d'un DAG. Comment ?
3. Trouver les chemins de poids maximal entre A et les autres sommets du graphe de la figure 2.

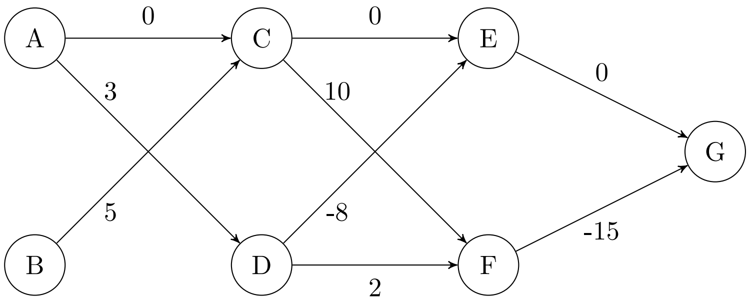

Figure 2 – Un DAG pour l'exercice 1

Exercice 2 : connaissances

On considère un ensemble de personnes. Certaines d'entre elles se connaissent et d'autres non. On souhaite savoir s'il est possible pour n'importe quelle personne de joindre n'importe quelle autre personne en utilisant uniquement ses connaissances (et leurs connaissances, les connaissances de leurs connaissances et ainsi de suite). Si ce n'est pas possible on veut savoir quels sont les sous-ensembles de personnes de plus grande taille au sein desquels tout le monde peut se joindre.

1. Comment pourrait-on modéliser ce problème par un graphe ?
2. Résoudre le problème avec l'ensemble de personnes représenté par le tableau suivant (qui indique les connaissances de chacun).

Alain	Béatrice	Charles	Diana	Emile	Fanny	Guillaume	Hélène
Charles	Fanny Guillaume	Alain	Hélène	Fanny Guillaume	Béatrice Emile Guillaume	Béatrice Emile Fanny	Diana

Exercice 3 : loup, chèvre et chou

Un loup, une chèvre et un chou se trouvent ensemble d'un coté d'une rivière. Un passeur voudrait les transporter de l'autre coté. Cependant il ne dispose que d'une barque de capacité limitée, ne lui permettant de transporter qu'une seule chose à la fois (loup, chèvre ou chou). De plus il ne doit jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ni la chèvre et le chou. Comment peut-il faire ? Et s'il souhaite minimiser le nombre de traversées de la rivière ?

1. Modéliser ce problème par un graphe.
2. Répondre aux deux questions.