Claude JARD
ENS Cachan Bretagne
2009

Un exemple d'analyse de complexité algorithmique

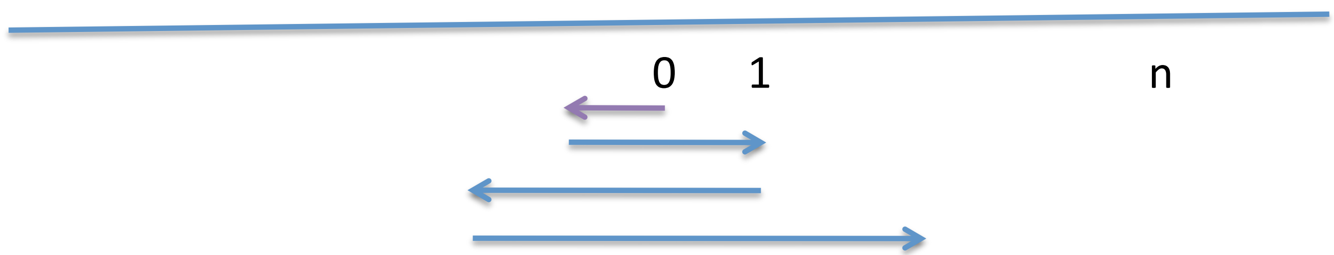
Un problème (simple) : franchir un mur ayant un trou à un emplacement inconnu
-> on longe le mur jusqu'à tomber sur le trou. Dans quelle direction partir ?
On choisit de rebrousser chemin de temps en temps.

Mathématisation :

- le mur est l'ensemble des entiers relatifs
- on arrive au point 0
- le trou est au point n
- on décide de partir vers les négatifs au départ

Algorithme bête :

- on progresse de 1 pas supplémentaire dans la direction courante avant de changer de direction



Longueur du chemin parcouru : 1+2+3+ … +2n = n(2n+1)

Complexité en $O(n^2)$

Peut-on faire mieux ?

Algorithme :

- on double la longueur du chemin parcouru à chaque changement de direction

Soit a_k les points positifs de rebroussement et
b_k la longueur parcourue pour y arriver depuis les négatifs

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k + 2b_k \\ b_{k+1} = 4b_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_k = \dfrac{4^k}{2} \\ a_k = \dfrac{4^k - 1}{3} \end{cases}$$

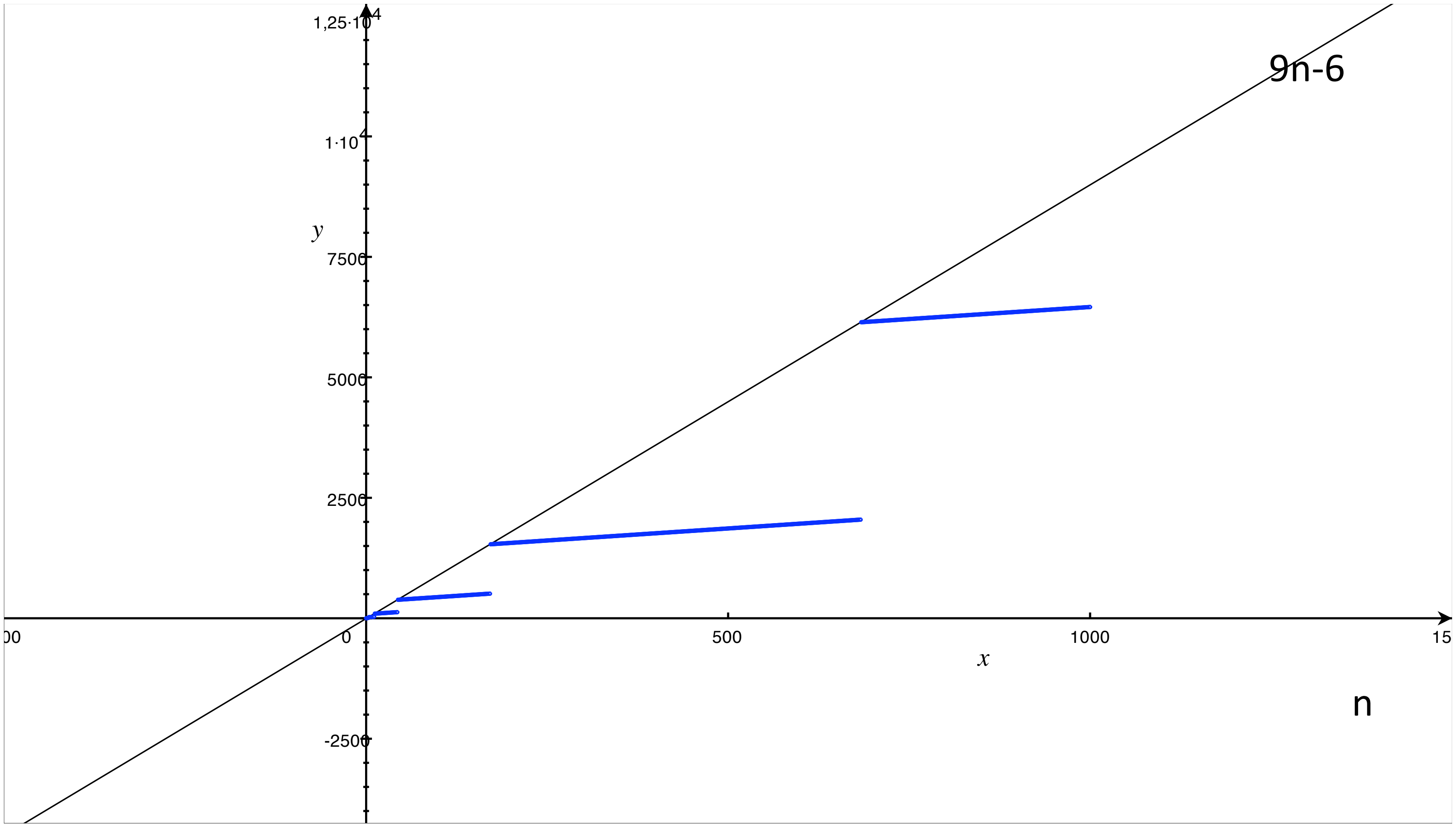
Analyse du cas pire : $n=a_k+1$
C_k = longueur du chemin de 0 à a_k

$$c_k = 6\sum_{i=0}^{k-1} b_i = 4^k - 1$$

$$C(n) = c_k + 4b_k + 1 = 3.4^k = 9n - 6 \Rightarrow O(n)$$

Optimal !

Simulation : n de 0 à 1000



Peut-on améliorer la constante 9 de la complexité ?

Algorithme :

- on multiplie par α la longueur du chemin parcouru à chaque changement de direction

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k + \alpha(\alpha-1)b_k \\ b_{k+1} = \alpha^2 b_k \end{cases} \qquad \begin{cases} b_k = \alpha^{2k-1} \\ a_k = \dfrac{\alpha^{2k}-1}{\alpha+1} \end{cases}$$

Analyse du cas pire : $n=a_k+1$

C_k = longueur du chemin de 0 à a_k

$$c_k = \frac{\alpha^{2k}-1}{\alpha-1}$$

$$C(n) = c_k + 2\alpha b_k + 1 = \frac{(2\alpha^2+\alpha-1)n - 2(\alpha^2-\alpha+1)}{\alpha-1}$$

Minimisation de

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

pour α>1

$$f'(\alpha) = \frac{2\alpha(\alpha - 2)}{(\alpha - 1)^2}$$

S'annule pour α=2 !

L'intuition était la bonne…

Bibliographie sur les méthodes d'analyse :
Introduction à l'analyse des algorithmes
R. Sedgewick et P. Flajolet
International Thomson Publishing, 1996