Champs de Pickard tridimensionnels

Jérôme Idier and Yves Goussard*

1er décembre 1999

L'objectif de cette note est d'étendre aux réseaux cartésiens tridimensionnels (3D) une partie des résultats établis dans [1] pour les champs de Markov stationnaires sur un réseau bidimensionnel (2D). Plus précisément, il s'agit de caractériser les champs de Markov stationnaires 3D d'ordre trois (MRF_3^3 dans la terminologie de [1]) à partir de leur probabilité marginale sur le cube $\{1, 2\}^3$ (Section 1). Comme annoncé en conclusion de [1], ce travail d'extension ne présente pas de difficulté, abstraction faite des problèmes de notation.

On montre ensuite (Section 2) que les conditions proposées par Pickard en 2D [2] admettent des conditions analogues en 3D, dont résulte une famille de champs de Markov 3D stationnaires *unilatéraux* ; les « marginales 2D » de ces champs sont des champs de Pickard 2D.

On montre finalement que ces modèles satisfont une version 3D de la propriété d'indépendance conditionnelle « en croix », invoquée dans [3, Éq.(20)]. Pour simplifier cette étude, nous nous sommes restreints au cas « isotrope », c'est-à-dire aux lois invariantes pour toutes les symétries du cube.

1 Champs stationnaires sur un réseau fini tridimensionnel

On considère un champ de Markov $\boldsymbol{X}$ défini sur un réseau 3D cartésien fini de taille $(I,\, J,\, K)$, $I,\, J,\, K > 2$ et à valeurs dans E^{IJK} où E est à cardinal fini.

Propriété 1 $\boldsymbol{X}$ est un champ de Markov 3D d'ordre trois[1] si et seulement si $\boldsymbol{X}$ est une chaîne de Markov vectorielle[2] du premier ordre selon les directions I, J et K.

Démonstration: Extension immédiate de la démonstration de [1, Théorème 1]. $\square$

Corollaire 1 $\boldsymbol{X}$ est un champ de Markov 3D d'ordre trois stationnaire si et seulement si $\boldsymbol{X}$ est une chaîne de Markov vectorielle stationnaire du premier ordre selon les directions I, J et K.

Démonstration: Extension immédiate de la démonstration de [1, Corollaire 1]. $\square$

Lemme 1 Soient I', J' et K' trois entiers tels que $2 \le I' \le I$, $2 \le J' \le J$ et $2 \le K' \le K$. Si $\boldsymbol{X}$ est un champ de Markov stationnaire d'ordre trois, ses restrictions à des réseaux de taille $(I',\, J,\, K)$, $(I,\, J',\, K)$ et $(I,\, J,\, K')$ sont également des champs de Markov stationnaires d'ordre trois.

*Yves Goussard is with École Polytechnique, Biomedical Engineering Institute, C.P. 6079, Station Centre-Ville, Montréal (Québec) H3C 3A7, Canada. Jérôme Idier is with Laboratoire des Signaux et Systèmes, École Supérieure d'Électricité, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France.

[1] Au sens habituel ; voir, par exemple, [1].

[2] Chaque élément de la chaîne est un champ aléatoire 2D.

Démonstration: Extension immédiate de la démonstration de [1, Lemme 1]. □

Lemme 2 Si $\boldsymbol{X}$ est un champ de Markov 3D stationnaire d'ordre trois, ses « restrictions 2D » $\boldsymbol{X}_{i\cdot\cdot}$, $1 < i \leq I$, $\boldsymbol{X}_{\cdot j\cdot}$, $1 < j \leq J$ et $\boldsymbol{X}_{\cdot\cdot k}$, $1 < k \leq K$ sont des champs de Markov 2D stationnaires d'ordre deux.

Démonstration: Il s'agit d'une extension de la démonstration de [1, Lemme 2]. Considérons d'abord le cas particulier $K = 3$ et montrons alors que la restriction $\boldsymbol{X}_{\cdot\cdot 2}$ est un champ de Markov 2D stationnaire. Ensuite, l'extension à tout $K > 2$ est une conséquence immédiate du Lemme 1. Puis le résultat s'étend à tout $\boldsymbol{X}_{\cdot\cdot k}$, $1 < k \leq K$ d'après la stationnarité, et aux autres restrictions en permutant les dimensions.

$\boldsymbol{X}$ étant une chaîne de Markov selon la direction K, on a :

$$\Pr(\boldsymbol{x}) = \prod_{k=1}^{2} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k},\, \boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k+1}) / \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot 2})\,.$$

D'après le lemme précédent, $(\boldsymbol{X}_{\cdot\cdot k},\, \boldsymbol{X}_{\cdot\cdot k+1})$ est un champ 3D stationnaire, donc une chaîne de Markov selon la direction J, ce qui donne :

$$\Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k}, \boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k+1}) = \prod_{j=1}^{J-1} \Pr\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\cdot jk} & \boldsymbol{x}_{\cdot jk+1} \\ \boldsymbol{x}_{\cdot j+1k} & \boldsymbol{x}_{\cdot j+1k+1} \end{pmatrix} \Big/ \prod_{j=2}^{J-1} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot jk},\, \boldsymbol{x}_{\cdot jk+1})\,.$$

Il en découle immédiatement que :

$$\Pr(\boldsymbol{x}) = \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{J-1} \prod_{k=1}^{2} \Pr\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\cdot jk} & \boldsymbol{x}_{\cdot jk+1} \\ \boldsymbol{x}_{\cdot j+1k} & \boldsymbol{x}_{\cdot j+1k+1} \end{pmatrix}}{\displaystyle\Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot 2}) \prod_{j=2}^{J-1} \prod_{k=1}^{2} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot jk},\, \boldsymbol{x}_{\cdot jk+1})}\,. \tag{1}$$

Par un raisonnement analogue, mais en utilisant la structure de chaîne de Markov de $\boldsymbol{X}$ d'abord selon la direction J, puis selon la direction K, on obtient une seconde expression de $\Pr(\boldsymbol{x})$:

$$\Pr(\boldsymbol{x}) = \frac{\displaystyle\prod_{J=1}^{J-1} \prod_{k=1}^{2} \Pr\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\cdot jk} & \boldsymbol{x}_{\cdot jk+1} \\ \boldsymbol{x}_{\cdot j+1k} & \boldsymbol{x}_{\cdot j+1k+1} \end{pmatrix}}{\displaystyle\prod_{j=2}^{J-1} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot j\cdot}) \prod_{j=1}^{J-1} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot j2},\, \boldsymbol{x}_{\cdot j+1,2})}\,. \tag{2}$$

En comparant (1) et (2), il vient immédiatement :

$$\Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot 2}) = \frac{\displaystyle\prod_{j=2}^{J-1} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot j\cdot}) \prod_{j=1}^{J-1} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot j2},\, \boldsymbol{x}_{\cdot j+1,2})}{\displaystyle\prod_{j=2}^{J-1} \prod_{k=1}^{2} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot jk},\, \boldsymbol{x}_{\cdot jk+1})}\,.$$

En explicitant le produit sur k qui apparaît au dénominateur et en écrivant que $\boldsymbol{X}_{\cdot j\cdot} \triangleq (\boldsymbol{X}_{\cdot j1},\, \boldsymbol{X}_{\cdot j2},\, \boldsymbol{X}_{\cdot j3})$, on obtient :

$$\Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot 2}) \prod_{j=2}^{J-1} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot j1},\, \boldsymbol{x}_{\cdot j2}) = \prod_{j=2}^{J-1} \frac{\Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot j1},\, \boldsymbol{x}_{\cdot j2},\, \boldsymbol{x}_{\cdot j3})}{\Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot j2},\, \boldsymbol{x}_{\cdot j3})} \prod_{j=1}^{J-1} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot j2},\, \boldsymbol{x}_{\cdot j+1,2})$$

ce qui permet de sommer sur les variables $\boldsymbol{x}_{\cdot j1}$, pour toutes les valeurs de j comprises entre 2 et $J-1$. Il en résulte que :

$$\Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot 2}) = \prod_{j=1}^{J-1} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot j2},\, \boldsymbol{x}_{\cdot j+1,2}) / \prod_{j=2}^{J-1} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot j2})$$

ce qui montre que $\boldsymbol{X}_{\cdot\cdot 2}$ a une structure de chaîne de Markov vectorielle selon la direction J. En permutant I et J, $\boldsymbol{X}_{\cdot\cdot 2}$ a également une structure de chaîne de Markov vectorielle selon la direction I. De par [1, Théorème 1], $\boldsymbol{X}_{\cdot\cdot 2}$ est un champ de Markov 2D dont on peut également affirmer qu'il est stationnaire puisque la propriété de stationnarité est conservée par restriction. Compte tenu de nos remarques préliminaires, ceci prouve le lemme. □

Théorème 1 Si $\boldsymbol{X}$ est un champ de Markov 3D stationnaire d'ordre trois sur un réseau $(I,\, J,\, K)$, ses restrictions à tout sous-réseau parallépipédique sont également des champs de Markov 3D stationnaires d'ordre trois.

Démonstration: Ce théorème est un analogue 3D de [1, Théorème 2] et découle immédiatement des Lemmes 1 et 2. □

Nous caractérisons maintenant les champs de Markov stationnaires 3D par la forme de leur probabilité $\Pr(\boldsymbol{x})$. Le théorème suivant constitue l'analogue 3D de [1, Théorème 3]. Dans le but de conserver des écritures lisibles et compactes, nous introduisons une notation implicite pour la probabilité sur un cube « élémentaire » de taille $(2, 2, 2)$:

$$\Pr(x_{ijk}, (i,\, j,\, k) \in \{1,\, 2\}^3) = \begin{bmatrix} x_{111} & x_{121} \\ x_{211} & x_{221} \end{bmatrix} \begin{matrix} x_{112} & x_{122} \\ x_{212} & x_{222} \end{matrix} \Bigg] \,.$$

De plus, des notations analogues sont également utilisées pour les probabilités marginales. Elles généralisent celles qui sont introduites dans [1].

Théorème 2 Un champ 3D $\boldsymbol{X}$ défini sur un réseau cartésien fini de taille $(I,\, J,\, K)$ est markovien d'ordre trois et stationnaire si et seulement si $\Pr(\boldsymbol{x})$ se factorise sous la forme :

$$\Pr(\boldsymbol{x}) = \frac{\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1}\prod_{k=1}^{K-1} \begin{bmatrix} x_{ijk} & x_{ij+1k} \\ x_{i+1jk} & x_{i+1j+1k} \end{bmatrix} \begin{matrix} x_{ijk+1} & x_{ij+1k+1} \\ x_{i+1jk+1} & x_{i+1j+1k+1} \end{matrix}\Bigg] \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1}\prod_{k=1}^{K-1} \big[x_{ijk}\big] x_{ijk+1}\big]}{\prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1}\prod_{k=1}^{K-1} \big[x_{ijk}\; x_{ij+1k}\big]\; x_{ijk+1}\; x_{ij+1k+1}\big] \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1}\prod_{k=1}^{K-1} \begin{bmatrix} x_{ijk} \\ x_{i+1jk} \end{bmatrix} \begin{matrix} x_{ijk+1} \\ x_{i+1jk+1} \end{matrix}\Bigg]}$$
$$\frac{\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1}\prod_{k=2}^{K-1} \big[x_{ijk}\; x_{ij+1k}\big] \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1}\prod_{k=2}^{K-1} \big[x_{ijk}\; x_{ij+1k}\big]}{\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1}\prod_{k=2}^{K-1} \begin{bmatrix} x_{ijk} & x_{ij+1k} \\ x_{i+1jk} & x_{i+1j+1k} \end{bmatrix} \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1}\prod_{k=2}^{K-1} \big[x_{ijk}\big]} \tag{3}$$

où la mesure $\tau = \big[\because\big]\because\big]$ vérifie les conditions suivantes :

1. la stationnarité sur le cube $(2,\, 2,\, 2)$;
2. les « restrictions 2D » de τ, c'est-à-dire $\big[\because\big]$, $\big[\vdots\big]\vdots\big]$ et $\big[\cdot\cdot\big]\cdot\cdot\big]$, satisfont les conditions [1, Éq.(12)-(13)] ;
3. on a les trois paires d'identités suivantes :

pour tout $\boldsymbol{u} \in E^{IJ}$ (défini sur un rectangle $(I,\, J,\, 1)$),

$$\frac{\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1}\begin{bmatrix} u_{ij} & u_{ij+1} \\ u_{i+1j} & u_{i+1j+1}\end{bmatrix} \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1}\begin{bmatrix} u_{ij}\end{bmatrix}}{\prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1}\begin{bmatrix} u_{ij}\, u_{ij+1}\end{bmatrix} \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1}\begin{bmatrix} u_{ij}\, u_{i+1j}\end{bmatrix}} = \sum_{\boldsymbol{v}\in E^{IJ}} \frac{\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1}\left[\begin{matrix} u_{ij} & u_{ij+1} \\ u_{i+1j} & u_{i+1j+1}\end{matrix}\middle]\begin{matrix} v_{ij} & v_{ij+1} \\ v_{i+1j} & v_{i+1j+1}\end{matrix}\right] \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1}\left[u_{ij}\middle] v_{ij}\right]}{\prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1}\left[u_{ij}\, u_{ij+1}\middle]\, v_{ij}\, v_{ij+1}\right] \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1}\left[\begin{matrix} u_{ij} \\ u_{i+1j}\end{matrix}\middle]\begin{matrix} v_{ij} \\ v_{i+1j}\end{matrix}\right]} \tag{4a}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{v}\in E^{IJ}} \frac{\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1}\left[\begin{matrix} v_{ij} & v_{ij+1} \\ v_{i+1j} & v_{i+1j+1}\end{matrix}\middle]\begin{matrix} u_{ij} & u_{ij+1} \\ u_{i+1j} & u_{i+1j+1}\end{matrix}\right] \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1}\left[v_{ij}\middle] u_{ij}\right]}{\prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1}\left[v_{ij}\, v_{ij+1}\middle]\, u_{ij}\, u_{ij+1}\right] \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1}\left[\begin{matrix} v_{ij} \\ v_{i+1j}\end{matrix}\middle]\begin{matrix} u_{ij} \\ u_{i+1j}\end{matrix}\right]}, \tag{4b}$$

pour tout $\boldsymbol{u} \in E^{IK}$ (défini sur un rectangle $(I,\, 1,\, K)$),

$$\frac{\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{k=1}^{K-1}\left[\begin{matrix} u_{ik} \\ u_{i+1k}\end{matrix}\middle]\begin{matrix} u_{ik+1} \\ u_{i+1k+1}\end{matrix}\right] \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{k=2}^{K-1}\begin{bmatrix} u_{ik}\end{bmatrix}}{\prod_{i=2}^{I-1}\prod_{k=1}^{K-1}\left[u_{ik}\middle] u_{ik+1}\right] \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{k=2}^{K-1}\begin{bmatrix} u_{ik}\, u_{i+1k}\end{bmatrix}} = \sum_{\boldsymbol{v}\in E^{IK}} \frac{\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{k=1}^{K-1}\left[\begin{matrix} u_{ik} & v_{ik} \\ u_{i+1k} & v_{i+1k}\end{matrix}\middle]\begin{matrix} u_{ik+1} & v_{ik+1} \\ u_{i+1k+1} & v_{i+1k+1}\end{matrix}\right] \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{k=2}^{K-1}\begin{bmatrix} u_{ik}\, v_{ik}\end{bmatrix}}{\prod_{i=2}^{I-1}\prod_{k=1}^{K-1}\left[u_{ik}\, v_{ik}\middle]\, u_{ik+1}\, v_{ik+1}\right] \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{k=2}^{K-1}\begin{bmatrix} u_{ik} & v_{ik} \\ u_{i+1k} & v_{i+1k}\end{bmatrix}} \tag{4c}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{v}\in E^{IK}} \frac{\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{k=1}^{K-1}\left[\begin{matrix} v_{ik} & u_{ik} \\ v_{i+1k} & u_{i+1k}\end{matrix}\middle]\begin{matrix} v_{ik+1} & u_{ik+1} \\ v_{i+1k+1} & u_{i+1k+1}\end{matrix}\right] \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{k=2}^{K-1}\begin{bmatrix} v_{ik}\, u_{ik}\end{bmatrix}}{\prod_{i=2}^{I-1}\prod_{k=1}^{K-1}\left[v_{ik}\, u_{ik}\middle]\, v_{ik+1}\, u_{ik+1}\right] \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{k=2}^{K-1}\begin{bmatrix} v_{ik} & u_{ik} \\ v_{i+1k} & u_{i+1k}\end{bmatrix}}, \tag{4d}$$

pour tout $\boldsymbol{u} \in E^{JK}$ (défini sur un rectangle $(1,\, J,\, K)$),

$$\frac{\prod_{j=1}^{J-1}\prod_{k=1}^{K-1}\left[u_{jk}\, u_{j+1k}\middle]\, u_{jk+1}\, u_{j+1k+1}\right] \prod_{j=2}^{J-1}\prod_{k=2}^{K-1}\begin{bmatrix} u_{jk}\end{bmatrix}}{\prod_{j=2}^{J-1}\prod_{k=1}^{K-1}\left[u_{jk}\middle] u_{jk+1}\right] \prod_{j=1}^{J-1}\prod_{k=2}^{K-1}\begin{bmatrix} u_{jk}\, u_{j+1k}\end{bmatrix}} = \sum_{\boldsymbol{v}\in E^{JK}} \frac{\prod_{j=1}^{J-1}\prod_{k=1}^{K-1}\left[\begin{matrix} u_{jk} & u_{j+1k} \\ v_{jk} & v_{j+1k}\end{matrix}\middle]\begin{matrix} u_{jk+1} & u_{j+1k+1} \\ v_{jk+1} & v_{j+1k+1}\end{matrix}\right] \prod_{j=2}^{J-1}\prod_{k=2}^{K-1}\begin{bmatrix} u_{jk}\, v_{jk}\end{bmatrix}}{\prod_{j=2}^{J-1}\prod_{k=1}^{K-1}\begin{bmatrix} u_{jk} & u_{j+1k} \\ v_{jk} & v_{j+1k}\end{bmatrix} \prod_{j=1}^{J-1}\prod_{k=2}^{K-1}\left[\begin{matrix} u_{jk} \\ v_{jk}\end{matrix}\middle]\begin{matrix} u_{jk+1} \\ v_{jk+1}\end{matrix}\right]} \tag{4e}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{v}\in E^{JK}} \frac{\prod_{j=1}^{J-1}\prod_{k=1}^{K-1}\left[\begin{matrix} v_{jk} & v_{j+1k} \\ u_{jk} & u_{j+1k}\end{matrix}\middle]\begin{matrix} v_{jk+1} & v_{j+1k+1} \\ u_{jk+1} & u_{j+1k+1}\end{matrix}\right] \prod_{j=2}^{J-1}\prod_{k=2}^{K-1}\begin{bmatrix} v_{jk}\, u_{jk}\end{bmatrix}}{\prod_{j=2}^{J-1}\prod_{k=1}^{K-1}\begin{bmatrix} v_{jk} & v_{j+1k} \\ u_{jk} & u_{j+1k}\end{bmatrix} \prod_{j=1}^{J-1}\prod_{k=2}^{K-1}\left[\begin{matrix} v_{jk} \\ u_{jk}\end{matrix}\middle]\begin{matrix} v_{jk+1} \\ u_{jk+1}\end{matrix}\right]}. \tag{4f}$$

Démonstration: Il est évident que les conditions 1. et 2. sont nécessaires, puisqu'elles expriment la stationnarité de restrictions de $\boldsymbol{X}$, respectivement sur le cube et sur les réseaux 2D $(I,\, J,\, 1)$, $(I,\, 1,\, K)$ et $(1,\, J,\, K)$. Pour prouver que la condition 3. est nécessaire, on suppose que $\boldsymbol{X}$ est un champ de Markov 3D stationnaire d'ordre trois. C'est donc une chaîne de Markov vectorielle stationnaire selon la direction K, d'où :

$$\Pr(\boldsymbol{x}) = \prod_{k=1}^{K-1} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k},\, \boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k+1}) / \prod_{k=2}^{K-1} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k})\,. \tag{5}$$

Selon le Théorème 1, $(\boldsymbol{X}_{\cdot\cdot k},\, \boldsymbol{X}_{\cdot\cdot k+1})$ est également un champ de Marlov 3D stationnaire, et donc une chaîne de Markov vectorielle stationnaire selon la direction J. Par conséquent :

$$\Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k},\, \boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k+1}) = \prod_{j=1}^{J-1} \Pr\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\cdot jk} & \boldsymbol{x}_{\cdot jk+1} \\ \boldsymbol{x}_{\cdot j+1k} & \boldsymbol{x}_{\cdot j+1k+1} \end{pmatrix} \Big/ \prod_{j=2}^{J-1} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot jk},\, \boldsymbol{x}_{\cdot jk+1})\,. \tag{6}$$

Toujours selon le même raisonnement, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\cdot jk} & \boldsymbol{x}_{\cdot jk+1} \\ \boldsymbol{x}_{\cdot j+1k} & \boldsymbol{x}_{\cdot j+1k+1} \end{pmatrix}$ est une chaîne de Markov vectorielle stationnaire selon la direction I d'où :

$$\Pr\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\cdot jk} & \boldsymbol{x}_{\cdot jk+1} \\ \boldsymbol{x}_{\cdot j+1k} & \boldsymbol{x}_{\cdot j+1k+1} \end{pmatrix} = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{I-1} \left[\begin{matrix} x_{ijk} & x_{ij+1k} \\ x_{i+1jk} & x_{i+1j+1k} \end{matrix}\right] \begin{matrix} x_{ijk+1} & x_{ij+1k+1} \\ x_{i+1jk+1} & x_{i+1j+1k+1} \end{matrix}\right]}{\displaystyle\prod_{i=2}^{I-1} \left[x_{ijk}\; x_{ij+1k}\right] x_{ijk+1}\; x_{ij+1k+1}\right]}\,. \tag{7}$$

Par ailleurs, $(\boldsymbol{X}_{\cdot jk},\, \boldsymbol{X}_{\cdot jk+1})$ est un champ de Markov 2D stationnaire d'après le Lemme 2, donc une chaîne de Markov vectorielle selon la direction I. Par suite :

$$\Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot jk},\, \boldsymbol{x}_{\cdot jk+1}) = \prod_{i=1}^{I-1} \left[\begin{matrix} x_{ijk} \\ x_{i+1jk} \end{matrix}\right] \begin{matrix} x_{ijk+1} \\ x_{i+1jk+1} \end{matrix}\right] \Big/ \prod_{i=2}^{I-1} \left[x_{ijk}\right] x_{ijk+1}\right]\,. \tag{8}$$

En reportant les expressions de (7) et (8) dans (6), on obtient :

$$\Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k},\, \boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k+1}) = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{K-1} \left[\begin{matrix} x_{ijk} & x_{ij+1k} \\ x_{i+1jk} & x_{i+1j+1k} \end{matrix}\right] \begin{matrix} x_{ijk+1} & x_{ij+1k+1} \\ x_{i+1jk+1} & x_{i+1j+1k+1} \end{matrix}\right] \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=2}^{K-1} \left[x_{ijk}\right] x_{ijk+1}\right]}{\displaystyle\prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=1}^{K-1} \left[x_{ijk}\; x_{ij+1k}\right] x_{ijk+1}\; x_{ij+1k+1}\right] \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{K-1} \left[\begin{matrix} x_{ijk} \\ x_{i+1jk} \end{matrix}\right] \begin{matrix} x_{ijk+1} \\ x_{i+1jk+1} \end{matrix}\right]}\,. \tag{9}$$

Enfin, selon le Lemme 2, $\boldsymbol{X}_{\cdot\cdot k}$ est un champ de Markov stationnaire 2D ce qui, d'après [1, Théorème 3], permet d'exprimer sa probabilité comme :

$$\Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k}) = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1} \left[\begin{matrix} x_{ijk} & x_{ij+1k} \\ x_{i+1jk} & x_{i+1j+1k} \end{matrix}\right] \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1} \left[x_{ijk}\right]}{\displaystyle\prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1} \left[x_{ijk}\; x_{ij+1k}\right] \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1} \left[x_{ijk}\; x_{i+1jk}\right]}\,. \tag{10}$$

Le report de (9) et (10) dans (5) fournit la forme de $\Pr(\boldsymbol{x})$ cherchée (3). On observe que cette forme dépend seulement de probabilités sur des cubes élémentaires de taille (2, 2, 2). En raison de la stationnarité de $\boldsymbol{X}$, la forme de la probabilité marginale de $\boldsymbol{X}$ sur tout cube élémentaire est indépendante de sa position. Il en résulte que $\Pr(\boldsymbol{x})$ est caractérisée par la *mesure générique* τ sur un cube élémentaire.

La condition (4a) est l'expression de $\sum_{\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k+1}} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k},\, \boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k+1}) = \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k})$, compte tenu des décompositions (9) et (10). De même, la condition (4b) exprime $\sum_{\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k}} \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k},\, \boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k+1}) = \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k+1})$, et les deux autres couples de contraintes résultent des conditions analogues dans les deux autres directions.

Pour prouver que les conditions 1, 2 et 3 sont suffisantes, considérons un champ $\boldsymbol{X}$ dont la probabilité est définie par (3), pour une mesure générique τ vérifiant ces conditions. Montrons alors qu'il présente une structure de chaîne de Markov vectorielle stationnaire selon les trois directions I, J et K. Par simple inspection de (3), on observe que $\Pr(\boldsymbol{x})$ peut se mettre sous la forme :

$$\Pr(\boldsymbol{x}) = \prod_{k=1}^{K-1} \phi(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k}, \boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k+1}) / \prod_{k=2}^{K-2} \psi(\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot k}) \tag{11}$$

où ϕ et ψ sont respectivement définies par :

$$\phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1} \left[\begin{smallmatrix} x_{ijk} & x_{ij+1k} \\ x_{i+1jk} & x_{i+1j+1k} \end{smallmatrix}\right]\left.\begin{smallmatrix} x_{ijk+1} & x_{ij+1k+1} \\ x_{i+1jk+1} & x_{i+1j+1k+1} \end{smallmatrix}\right] \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1} [u_{ij}] v_{ij}]}{\prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1} [u_{ij}\, u_{ij+1}]\, v_{ij}\, v_{ij+1}] \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1} \left[\begin{smallmatrix} u_{ij} \\ u_{i+1j} \end{smallmatrix}\right]\left.\begin{smallmatrix} v_{ij} \\ v_{i+1j} \end{smallmatrix}\right]} \tag{12}$$

$$\psi(\boldsymbol{u}) = \frac{\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1} \left[\begin{smallmatrix} u_{ij} & u_{ij+1} \\ u_{i+1j} & u_{i+1j+1} \end{smallmatrix}\right] \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1} [u_{ij}]}{\prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1} [u_{ij}\, u_{ij+1}] \prod_{i=2}^{I-1}\prod_{j=2}^{J-1} [u_{ij}\, u_{i+1j}]}\,. \tag{13}$$

Pour prouver que $\boldsymbol{X}$ est une chaîne de Markov stationnaire selon la direction K, il suffit donc de montrer que ϕ et ψ sont positives et normalisées, et que

$$\psi(\boldsymbol{u}) = \sum_{\boldsymbol{v}} \phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{\boldsymbol{v}} \phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\,. \tag{14}$$

Le caractère positif de ϕ et ψ découle de ce que la mesure τ est une probabilité. Les égalités (14) s'identifient avec (4a)-(4b). Enfin, ψ est normalisée car τ vérifie les conditions de stationnarité de [1, Éq.(12)-(13)], ce qui implique que ψ est la probabilité d'un champ de Markov stationnaire 2D. La normalisation de ϕ résulte de celle de ψ et de (14).

Suivant le même procédé, on montre que $\boldsymbol{X}$ est une chaîne de Markov vectorielle selon les directions I et J, ce qui complète la preuve. □

2 Champs de Pickard 3D

2.1 Cas 2D : rappels

Les « conditions d'orthogonalité de Pickard 2D » [2]

$$\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & \end{smallmatrix}\right][a] = [a\,b]\left[\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right], \tag{15a}$$

$$\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ & d \end{smallmatrix}\right][b] = [a\,b]\left[\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right], \tag{15b}$$

$$\left[\begin{smallmatrix} a & \\ c & d \end{smallmatrix}\right][c] = [c\,d]\left[\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right], \tag{15c}$$

$$\left[\begin{smallmatrix} & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right][d] = [c\,d]\left[\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right] \tag{15d}$$

jouent un rôle-clé dans la construction systématique de champs 2D stationnaires, car elles impliquent les conditions nécessaires et suffisantes de stationnarité du champ. Plus précisément, on a les implications suivantes.

Lemme 3 Soit $\tau = \left[\begin{smallmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{smallmatrix}\right]$ une mesure stationnaire sur le carré (2, 2). Alors :

$$(15\text{a}) \implies [1,\ \text{Éq.}(12\text{a})\text{-}(13\text{a})]\,, \qquad (15\text{b}) \implies [1,\ \text{Éq.}(12\text{a})\text{-}(13\text{b})]\,, \tag{16}$$
$$(15\text{c}) \implies [1,\ \text{Éq.}(12\text{b})\text{-}(13\text{a})]\,, \qquad (15\text{d}) \implies [1,\ \text{Éq.}(12\text{b})\text{-}(13\text{b})]\,. \tag{17}$$

En conséquence, les conditions [1, Éq.(12)-(13)] sont impliquées par (15a)-(15d) et par (15b)-(15c). De plus, une seule des quatre conditions (15) suffit pour assurer l'unilatéralité du champ [1]. Enfin, dans le cas d'une mesure élémentaire $\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]$ invariante par les symétries du carré, les quatre conditions de Pickard 2D sont équivalentes, de même que les quatre conditions [1, Éq.(12a)-(12b)-(13a)-(13b)].

2.2 Cas 3D

Dans la suite, nous construisons des modèles 3D unilatéraux stationnaires en trouvant des « conditions de Pickard 3D » impliquant les conditions (4). La forme la plus simple de conditions suffisantes que nous ayons trouvée est la suivante :

$$\left[\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]\begin{smallmatrix}e&f\\g&\end{smallmatrix}\right]\left[a\,b\right]\left[\begin{smallmatrix}a\\c\end{smallmatrix}\right]\left[[a]\,e\right] = \left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]\left[\left[\begin{smallmatrix}a\\c\end{smallmatrix}\right]\begin{smallmatrix}e\\g\end{smallmatrix}\right]\left[[a\,b]\,e\,f\right]\left[a\right]. \tag{18a}$$

De même que chacune des quatre conditions 2D (15a),..., (15d) peut être associée à un sommet du carré $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$, on peut écrire huit conditions 3D, c'est-à-dire autant que de sommets du cube $\left(\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\begin{smallmatrix}e&f\\g&h\end{smallmatrix}\right)$. Nous distinguerons ces huits conditions sous la forme (18a),..., (18h), en faisant accompagner le numéro d'équation par la lettre qui correspond au sommet « privilégié ».

Lemme 4 Soit $\tau = \left[\left[\begin{smallmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{smallmatrix}\right]\begin{smallmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{smallmatrix}\right]$ une mesure stationnaire sur le cube (2, 2, 2). On a les implications suivantes :

$$(18\text{a}) \implies (4\text{a}),\ (4\text{c}),\ (4\text{e}), \qquad (18\text{b}) \implies (4\text{a}),\ (4\text{d}),\ (4\text{e}), \tag{19}$$
$$(18\text{c}) \implies (4\text{a}),\ (4\text{c}),\ (4\text{f}), \qquad (18\text{d}) \implies (4\text{a}),\ (4\text{d}),\ (4\text{f}), \tag{20}$$
$$(18\text{e}) \implies (4\text{b}),\ (4\text{c}),\ (4\text{e}), \qquad (18\text{f}) \implies (4\text{b}),\ (4\text{d}),\ (4\text{e}), \tag{21}$$
$$(18\text{g}) \implies (4\text{b}),\ (4\text{c}),\ (4\text{f}), \qquad (18\text{h}) \implies (4\text{b}),\ (4\text{d}),\ (4\text{f}). \tag{22}$$

Démonstration: La démonstration est évidente en effectuant la somme en $\boldsymbol{v}$, pour chaque condition de type (4), dans un ordre permettant d'utiliser la condition de type (18) de façon récurrente. □

Corollaire 2 Un champ 3D $\boldsymbol{X}$ défini par (3) sur un réseau cartésien fini de taille $(I,\ J,\ K)$ par (3) est stationnaire si la mesure $\tau = \left[\left[\begin{smallmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{smallmatrix}\right]\begin{smallmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{smallmatrix}\right]$ vérifie les conditions suivantes :

1. la stationnarité sur le cube (2, 2, 2) ;
2. chacune des « restrictions 2D » de τ, c'est-à-dire $\left[\begin{smallmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\left[\begin{smallmatrix}\cdot\\\cdot\end{smallmatrix}\right]\begin{smallmatrix}\cdot\\\cdot\end{smallmatrix}\right]$ et $\left[[\cdot\,\cdot]\,\cdot\,\cdot\right]$, satisfait les conditions (15a)-(15d) ou (15b)-(15c) ;
3. τ vérifie (18a)-(18h), ou (18b)-(18g), ou (18c)-(18f), ou (18d)-(18e).

Démonstration: La démonstration est évidente, d'après le Théorème 2 et les implications des Lemmes 3 et 4. □

D'après le Lemme 4, il est manifeste que des triplets de conditions tels que (18a)-(18d)-(18f) pourraient remplacer les couples de la Condition 3.

D'autre part, on peut associer arbitrairement des conditions 2D (Condition 2) et des conditions 3D (Condition 3). Néanmoins, certaines conditions 2D sont « naturellement » associées à une condition 3D. Le lemme et le corollaire suivants précisent cette association.

Lemme 5 Les quatre conditions (18a), (15a),

$$\left[\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}^{e}\right][a] = \begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}\left[[a]\,e\right] \qquad \text{et} \qquad \left[[a\,b]\,e\right][a] = [a\,b]\left[[a]\,c\right], \tag{23}$$

sont simultanément vérifiées si et seulement si

$$\left[\begin{bmatrix}a\,b\\c\,d\end{bmatrix}^{e\,f}_{g}\right]\left[\begin{bmatrix}a\,b\\c\end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}^{e}\right]\left[[a\,b]\,e\right][a]^2 = \begin{bmatrix}a\,b\\c\,d\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}^{e}_{g}\right]\left[[a\,b]\,e\,f\right]\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}[a\,b]\left[[a]\,e\right]. \tag{24a}$$

Démonstration: Par sommation en d, en g et en f, la condition (24a) donne une relation d'indépendance conditionnelle

$$\left[\begin{bmatrix}a\,b\\c\end{bmatrix}^{e}\right][a]^2 = \begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}[a\,b]\left[[a]\,e\right],$$

qui implique (15a) et les deux conditions (23), par sommation, respectivement en e, en b et en c. Puis on obtient facilement (18a) en injectant (15a) et (23), dans (24a), et réciproquement. □

Corollaire 3 Une mesure τ vérifiant (24a) se factorise sous la forme unilatérale suivante :

$$\left[\begin{bmatrix}a\,b\\c\,d\end{bmatrix}^{e\,f}_{g\,h}\right] = \tau(a)\,\tau(b\,|\,a)\,\tau(c\,|\,a)\,\tau(e\,|\,a)\,\tau(d\,|\,a,b,c)\,\tau(f\,|\,a,b,e)\,\tau(g\,|\,a,c,e)\,\tau(h\,|\,a,b,c,d,e,f,g)\,. \tag{25}$$

Démonstration: D'après (24a), on a

$$\left[\begin{bmatrix}a\,b\\c\,d\end{bmatrix}^{e\,f}_{g\,h}\right] = \tau(h\,|\,a,b,c,d,e,f,g)\left[\begin{bmatrix}a\,b\\c\,d\end{bmatrix}^{e\,f}_{g}\right] = \tau(h\,|\,a,b,c,d,e,f,g)\,\frac{\begin{bmatrix}a\,b\\c\,d\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}^{e}_{g}\right]\left[[a\,b]\,e\,f\right]\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}[a\,b]\left[[a]\,e\right]}{\left[\begin{bmatrix}a\,b\\c\end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}^{e}\right]\left[[a\,b]\,e\right][a]^2},$$

qui peut aussi s'écrire (25). □

Il existe huit conditions de type (24a), que l'on désignera par « conditions de Pickard 3D ». Comme les conditions (18a),..., (18h), elles sont référencées sous la forme (24a),..., (24h).

Théorème 3 (Champs de Pickard 3D) Un champ aléatoire 3D $\boldsymbol{X}$ de probabilité définie par (3), où la mesure τ vérifie la stationnarité sur le cube (2, 2, 2), et les conditions (24a) et (24h), est un champ de Markov 3D d'ordre trois stationnaire unilatéral. De tels champs seront désignées par « champs de Pickard 3D » par analogie avec les champs 2D du même type.

Démonstration: Les conditions du théorème impliquent les conditions du Corollaire 2, et l'unilatéralité découle du Corollaire 3. □

2.3 Indépendance en « croix »

Dans cette partie, on s'intéresse au cas particulier des champs induits par une mesure τ possédant toutes les symétries du cube, ce qui permet d'alléger les notations, en utilisant par exemple

$$\begin{bmatrix}a\,b\\c\,d\end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}\begin{matrix}b\\d\end{matrix}\right] = \left[[a\,b]\,c\,d\right].$$

Avec des notations plus lourdes, tous les résultats démontrés se généraliseraient sans difficulté au cas de mesures vérifiant les huit conditions de Pickard 3D sans la symétrie.

Théorème 4 (Indépendance conditionnelle en croix 3D, cas scalaire) Soit $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ trois « plans » consécutifs de taille (3, 3), extraits de $\boldsymbol{x}$, dont la réunion forme un cube (3, 3, 3) :

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}.$$

Alors on a la propriété d'indépendance conditionnelle « en croix »

$$\begin{aligned} &\Pr(u_{22},\, v_{12},\, v_{21},\, v_{23},\, v_{32},\, w_{22} \,|\, v_{22}) = \\ &\quad \Pr(u_{22} \,|\, v_{22}) \Pr(v_{12} \,|\, v_{22}) \Pr(v_{21} \,|\, v_{22}) \Pr(v_{23} \,|\, v_{22}) \Pr(v_{32} \,|\, v_{22}) \Pr(w_{22} \,|\, v_{22}). \end{aligned} \tag{26}$$

Démonstration: Dans les conditions du Théorème 2, $\boldsymbol{X}$ est un champ stationnaire. On peut donc généraliser la notation $\big[\cdot\big]\cdot\big]$ à des ensembles de pixels plus grands que le cube (2, 2, 2), sans risque de confusion.

Il faut démontrer (26), ou encore

$$\left[\ u_{22}\ \right]\left.\begin{matrix} & v_{12} & \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ & v_{32} & \end{matrix}\right]\left.\ w_{22}\ \right] = \big[u_{22}\, v_{22}\big]\big[v_{12}\, v_{22}\big]\big[v_{21}\, v_{22}\big]\big[v_{23}\, v_{22}\big]\big[v_{32}\, v_{22}\big]\big[w_{22}\, v_{22}\big] / \big[v_{22}\big]^5, \tag{27}$$

où le terme de gauche s'écrit comme une probabilité marginale :

$$\left[\ u_{22}\ \right]\left.\begin{matrix} & v_{12} & \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ & v_{32} & \end{matrix}\right]\left.\ w_{22}\ \right] = \sum_{\substack{v_{11}, v_{13} \\ v_{31}, v_{33}}} \big[u_{22}\big]\boldsymbol{v}\big]w_{22}\big]. \tag{28}$$

Or, d'après la Propriété 1, $(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w})$ est une chaîne de Markov vectorielle, donc $\Pr(u_{22},\, w_{22} \,|\, \boldsymbol{v}) = \Pr(u_{22} \,|\, \boldsymbol{v}) \Pr(w_{22} \,|\, \boldsymbol{v})$, ou encore

$$\big[u_{22}\big]\boldsymbol{v}\big]w_{22}\big] = \big[u_{22}\big]\boldsymbol{v}\big]\,\big[\boldsymbol{v}\big]w_{22}\big] / \big[\boldsymbol{v}\big].$$

Montrons ensuite les propriétés d'indépendance conditionnelle $\Pr(u_{22} \,|\, \boldsymbol{v}) = \Pr(u_{22} \,|\, v_{22})$ et $\Pr(w_{22} \,|\, \boldsymbol{v}) = \Pr(w_{22} \,|\, v_{22})$, qui se déduisent des conditions de Pickard 3D. Compte tenu des symétries, ces deux propriétés sont équivalentes. Montrons la première :

$$\Pr(u_{22} \,|\, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{\Pr(\boldsymbol{v})} \Pr(u_{22},\, \boldsymbol{v}) \quad \text{avec} \quad \Pr(u_{22},\, \boldsymbol{v}) = \sum_{\boldsymbol{u} \backslash u_{22}} \Pr(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}), \tag{29}$$

or $\boldsymbol{v}$ est un champ de Pickard 2D de taille (3, 3) : d'après [1],

$$\Pr(\boldsymbol{v}) = \frac{\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} & v_{13} \\ v_{22} & v_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} & v_{22} \\ v_{31} & v_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{22} & v_{23} \\ v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \big[v_{22}\big]}{\big[v_{12}\, v_{22}\big]\big[v_{21}\, v_{22}\big]\big[v_{23}\, v_{22}\big]\big[v_{32}\, v_{22}\big]}, \tag{30}$$

et $(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v})$ est un champ de Pickard 3D de taille (3, 3, 2) : d'après le Théorème 2,

$$\Pr(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) = \frac{\left[\begin{matrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{matrix}\right]\left.\begin{matrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{22} & u_{23} \end{matrix}\right]\left.\begin{matrix} v_{12} & v_{13} \\ v_{22} & v_{23} \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \end{matrix}\right]\left.\begin{matrix} u_{21} & v_{22} \\ v_{31} & v_{32} \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{32} & u_{33} \end{matrix}\right]\left.\begin{matrix} v_{22} & v_{23} \\ v_{32} & v_{33} \end{matrix}\right] \big[u_{22}\, v_{22}\big]}{\begin{bmatrix} u_{21} & v_{21} \\ u_{22} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{23} & v_{23} \\ u_{22} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} & v_{12} \\ u_{22} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{32} & v_{32} \\ u_{22} & v_{22} \end{bmatrix}}. \tag{31}$$

D'après (31), la sommation apparaissant dans (29) est évidente en u_{11}, u_{13}, u_{31}, u_{33} :

$$\Pr(u_{22},\, \boldsymbol{v}) = \sum_{\substack{u_{12},u_{21}\\ u_{23},u_{32}}} \frac{\left[\begin{matrix} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{matrix}\middle]\begin{matrix} v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} u_{12} & \\ u_{22} & u_{23}\end{matrix}\middle]\begin{matrix} v_{12} & v_{13}\\ v_{22} & v_{23}\end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} u_{21} & u_{22}\\ & u_{32}\end{matrix}\middle]\begin{matrix} v_{21} & v_{22}\\ v_{31} & v_{32}\end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} u_{22} & u_{23}\\ u_{32} & \end{matrix}\middle]\begin{matrix} v_{22} & v_{23}\\ v_{32} & v_{33}\end{matrix}\right] \big[u_{22}\, v_{22}\big]}{\begin{bmatrix} u_{21} & v_{21}\\ u_{22} & v_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{23} & v_{23}\\ u_{22} & v_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} & v_{12}\\ u_{22} & v_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{32} & v_{32}\\ u_{22} & v_{22}\end{bmatrix}}.$$

Chacun des quatre termes du numérateur se factorise ensuite, conformément à la condition de Pickard 3D. Après simplification, on obtient

$$\Pr(u_{22},\, \boldsymbol{v}) = \sum_{\substack{u_{12},u_{21}\\ u_{23},u_{32}}} \frac{\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} & v_{13}\\ v_{22} & v_{23}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} & v_{22}\\ v_{31} & v_{32}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{22} & v_{23}\\ v_{32} & v_{33}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{21} & v_{21}\\ u_{22} & v_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{23} & v_{23}\\ u_{22} & v_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} & v_{12}\\ u_{22} & v_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{32} & v_{32}\\ u_{22} & v_{22}\end{bmatrix} \big[v_{22}\big]^4}{\big[u_{22}\, v_{22}\big]^3 \big[v_{12}\, v_{22}\big]^2 \big[v_{21}\, v_{22}\big]^2 \big[v_{23}\, v_{22}\big]^2 \big[v_{32}\, v_{22}\big]^2}.$$

Le reste de la sommation est maintenant facile à effectuer :

$$\Pr(u_{22},\, \boldsymbol{v}) = \frac{\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} & v_{13}\\ v_{22} & v_{23}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} & v_{22}\\ v_{31} & v_{32}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{22} & v_{23}\\ v_{32} & v_{33}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} & v_{21}\\ u_{22} & v_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} & v_{23}\\ u_{22} & v_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} & v_{12}\\ u_{22} & v_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} & v_{32}\\ u_{22} & v_{22}\end{bmatrix} \big[v_{22}\big]^4}{\big[u_{22}\, v_{22}\big]^3 \big[v_{12}\, v_{22}\big]^2 \big[v_{21}\, v_{22}\big]^2 \big[v_{23}\, v_{22}\big]^2 \big[v_{32}\, v_{22}\big]^2},$$

expression qui se factorise conformément à la condition de Pickard 2D. Après simplification, on obtient

$$\Pr(u_{22},\, \boldsymbol{v}) = \frac{\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} & v_{13}\\ v_{22} & v_{23}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} & v_{22}\\ v_{31} & v_{32}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{22} & v_{23}\\ v_{32} & v_{33}\end{bmatrix} \big[u_{22}\, v_{22}\big]}{\big[v_{12}\, v_{22}\big] \big[v_{21}\, v_{22}\big] \big[v_{23}\, v_{22}\big] \big[v_{32}\, v_{22}\big]}. \tag{32}$$

D'après (30) et (32), on trouve finalement, comme annoncé,

$$\Pr(u_{22} \,|\, \boldsymbol{v}) = \frac{\Pr(u_{22},\, \boldsymbol{v})}{\Pr(\boldsymbol{v})} = \frac{\big[u_{22}\, v_{22}\big]}{\big[v_{22}\big]} = \Pr(u_{22} \,|\, v_{22}).$$

Cette propriété permet d'écrire (28) sous la forme

$$\left[\; u_{22} \;\middle]\; \begin{matrix} & v_{12} & \\ v_{21} & v_{22} & v_{23}\\ & v_{32} & \end{matrix} \;\middle]\; w_{22} \;\right] = \frac{1}{\big[v_{22}\big]} \big[u_{22}\, v_{22}\big] \big[v_{22}\, w_{22}\big] \sum_{\substack{v_{11},v_{13}\\ v_{31},v_{33}}} \big[\boldsymbol{v}\big], \tag{33}$$

et

$$\sum_{\substack{v_{11},v_{13}\\ v_{31},v_{33}}} \big[\boldsymbol{v}\big] = \left[\begin{matrix} & v_{12} & \\ v_{21} & v_{22} & v_{23}\\ & v_{32} & \end{matrix}\right] = \big[v_{12}\, v_{22}\big] \big[v_{21}\, v_{22}\big] \big[v_{23}\, v_{22}\big] \big[v_{32}\, v_{22}\big] / \big[v_{22}\big]^4,$$

compte tenu de la condition de Pickard 2D. Donc la décomposition (33) fournit l'expression attendue. □

Remarque 1 (Condition aux bords du domaine) Par marginalisation, la condition générale (26) permet de déduire des conditions d'indépendance « tronquées », utiles aux bords du domaine. Par exemple, pour le bord gauche, on obtient

$$\Pr(u_{22},\, v_{12},\, v_{23},\, v_{32},\, w_{22} \,|\, v_{22}) = \Pr(u_{22} \,|\, v_{22}) \Pr(v_{12} \,|\, v_{22}) \Pr(v_{23} \,|\, v_{22}) \Pr(v_{32} \,|\, v_{22}) \Pr(w_{22} \,|\, v_{22}).$$

en marginalisant v_{21}.

Lemme 6 (Conditions de Pickard 2D et 3D généralisées) Soit un champ de Pickard 2D défini par [1, Éq.(11)]. La condition de Pickard 2D

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix}$$

implique la condition généralisée suivante :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

où $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont des ensembles rectangulaires de pixels « de dimensions compatibles », c'est-à-dire que $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ ont même nombre de lignes et $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$ même nombre de colonnes. De la même façon, la condition de Pickard 3D implique

$$\left[\begin{matrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{matrix}\middle]\begin{matrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{G} & \end{matrix}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \end{bmatrix}, \tag{35}$$

où $\boldsymbol{A}$, ..., $\boldsymbol{G}$ sont des ensembles parallépipédiques de voxels de « dimensions compatibles ».

Démonstration: Dans le cas 2D, des cas particuliers sont démontrés, par exemple dans [2], mais pas la condition (34) elle-même. Une démonstration possible consiste à décomposer

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \end{bmatrix} = \sum_{\boldsymbol{d}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$$

unilatéralement suivant [1, Éq.(8)], à effectuer la sommation, qui est triviale, et à comparer le résultat avec $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$, chacun de ces trois termes étant lui-même décomposé unilatéralement suivant [1, Éq.(8)].

On peut procéder de la même façon pour le cas 3D, en marginalisant $\boldsymbol{H}$ de la décomposition unilatérale de

$$\left[\begin{matrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{matrix}\middle]\begin{matrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{G} & \boldsymbol{H} \end{matrix}\right]$$

(cf. Corollaire 3), et en comparant l'expression obtenue avec

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix},$$

chacun de ces sept termes étant lui-même décomposé unilatéralement. □

Corollaire 4 (Indépendance conditionnelle en croix 3D)

$$\Pr(\boldsymbol{x}_{i\cdot k\backslash ijk}, \boldsymbol{x}_{\cdot jk\backslash ijk}, \boldsymbol{x}_{ij\cdot\backslash ijk} \,|\, x_{ijk}) = \Pr(\boldsymbol{x}_{i\cdot k}) \Pr(\boldsymbol{x}_{\cdot jk}) \Pr(\boldsymbol{x}_{ij\cdot}) / \Pr(x_{ijk})^3. \tag{36}$$

Démonstration: Les arguments sont identiques à ceux de la démonstration du Théorème 4, en remplaçant respectivement les triplets (v_{12}, v_{22}, v_{23}), (v_{21}, v_{22}, v_{23}) et (u_{22}, v_{22}, w_{22}) par $\boldsymbol{x}_{\cdot jk}$, $\boldsymbol{x}_{i\cdot k}$ et $\boldsymbol{x}_{ij\cdot}$, compte tenu du Lemme 6. □

2.4 Exemple de champs de Pickard 3D : le cas gaussien

Pour clore cette étude, il faut encore montrer que des champs de Pickard 3D non triviaux existent. Dans cet esprit, on se penche sur le cas particulier le plus simple : le cas gaussien.

La plupart des développements effectués sont généralisables au-delà des probabilités discrètes. En particulier, on peut s'intéresser au cas gaussien, déjà étudié en 2D dans [2, 4, 1] (voir aussi [5]).

Soit une mesure τ gaussienne, stationnaire sur le cube (2, 2, 2) $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)\!\begin{smallmatrix} E & F \\ G & H \end{smallmatrix}\Big)$, vérifiant (24a). Soit $\boldsymbol{X}$ un champ aléatoire 3D de probabilité définie par (3). Notons $\rho_{uvw} = \mathrm{Corr}\,(X_{ijk}, X_{i+u,j+v,k+w})$ la corrélation normalisée de $\boldsymbol{X}$. Cette fonction est à symétrie centrale, donc (24a) est équivalent à (24h), et τ satisfait bien les conditions du Théorème 3.

La mesure τ est définie par $\mu = \mathrm{E}[X_{111}] = \mathrm{E}[A]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(X_{111}) = \mathrm{Var}\,(A)$ et la matrice de corrélation normalisée :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{Corr}\,(A,\, B,\, C,\, D,\, E,\, F,\, G,\, H) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{010} & \rho_{100} & \rho_{110} & \rho_{001} & \rho_{011} & \rho_{101} & \rho_{111} \\ \rho_{010} & 1 & \rho_{-110} & \rho_{100} & \rho_{0-11} & \rho_{001} & \rho_{1-11} & \rho_{101} \\ \rho_{100} & \rho_{-110} & 1 & \rho_{010} & \rho_{-101} & \rho_{-111} & \rho_{001} & \rho_{011} \\ \rho_{110} & \rho_{100} & \rho_{010} & 1 & \rho_{11-1} & \rho_{-101} & \rho_{0-11} & \rho_{001} \\ \rho_{001} & \rho_{0-11} & \rho_{-101} & \rho_{11-1} & 1 & \rho_{010} & \rho_{100} & \rho_{110} \\ \rho_{011} & \rho_{001} & \rho_{-111} & \rho_{-101} & \rho_{010} & 1 & \rho_{-110} & \rho_{100} \\ \rho_{101} & \rho_{1-11} & \rho_{001} & \rho_{0-11} & \rho_{100} & \rho_{-110} & 1 & \rho_{010} \\ \rho_{111} & \rho_{101} & \rho_{011} & \rho_{001} & \rho_{110} & \rho_{100} & \rho_{010} & 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

D'après le Lemme 5, la condition (24a) implique les conditions de Pickard 2D (15a) et (23), qui s'écrivent respectivement

$$B \perp C \,|\, A \iff \rho_{-110} = \rho_{100}\rho_{100}, \quad C \perp E \,|\, A \iff \rho_{-101} = \rho_{100}\rho_{001}, \quad B \perp E \,|\, A \iff \rho_{0-11} = \rho_{010}\rho_{001}.$$

Mais la condition (24a) implique également d'autres relations d'indépendance conditionnelle :
– par sommation en f, g puis en b, c, on obtient

$$\left[\begin{smallmatrix} a & \\ & d \end{smallmatrix}\right]^{e}\Big][a] = \left[\begin{smallmatrix} a & \\ & d \end{smallmatrix}\right]\![a]e] \iff D \perp E \,|\, A \iff \rho_{11-1} = \rho_{001}\rho_{110} \;;$$

– par sommation en d, g puis en b, e, on obtient

$$\left[\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right]^{\cdot\, f}\Big][a] = \left[\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right]\![a]\,.\,f] \iff C \perp F \,|\, A \iff \rho_{-111} = \rho_{100}\rho_{011} \;;$$

– par sommation en d, f puis en c, e, on obtient

$$\left[\begin{smallmatrix} a\,b \end{smallmatrix}\right]_{g}\Big][a] = [a\,b]\left[\begin{smallmatrix} a \end{smallmatrix}\right]_{g}\Big] \iff B \perp G \,|\, A \iff \rho_{1-11} = \rho_{010}\rho_{101}.$$

Il subsiste finalement sept degrés de liberté pour $\boldsymbol{\Gamma}$: ρ_{100}, ρ_{010}, ρ_{001}, ρ_{110}, ρ_{011}, ρ_{101}, ρ_{111}, les six premiers entrant dans la paramétrisation des marginales 2D $\boldsymbol{X}_{i\cdot\cdot}$, $\boldsymbol{X}_{\cdot j\cdot}$, $\boldsymbol{X}_{\cdot\cdot k}$, qui sont des champs de Pickard 2D gaussiens.

Les deux questions à se poser maintenant sont :
– une matrice de covariance $\boldsymbol{\Gamma}$ définie par (37) correspond-elle forcément à une mesure qui vérifie (24a) ?
– existe-t-il des jeux de paramètres assurant la positivité de $\boldsymbol{\Gamma}$, donc l'existence de τ ?

Pour vérifier le premier point, on peut étudier (18a) plutôt que (24a), compte tenu du Lemme 5. Dans le cas gaussien, (18a) se ramène à une identité entre formes quadratiques, donc à une identité matricielle :

$$\mathbf{M}_{(A,\,\dots,\,G)} + \mathbf{M}_{(A,B)} + \mathbf{M}_{(A,C)} + \mathbf{M}_{(A,E)} = \mathbf{M}_{(A,B,C,D)} + \mathbf{M}_{(A,C,E,G)} + \mathbf{M}_{(A,B,E,F)} + \mathbf{M}_{(A)}, \tag{38}$$

en construisant les matrices $\mathbf{M}_{(.)}$ sur le principe suivant. On note $\alpha(1) = A, \ldots, \alpha(7) = G$; pour tout n-uplet $\mathcal{S}$ extrait de $(A, \ldots, G)$, $\mathbf{M}_{\mathcal{S}}$ est la matrice de taille $(7,7)$ définie par

$$\mathbf{M}_{\mathcal{S}}(m, n) = 0 \;\text{ si } \alpha(m) \notin \mathcal{S} \text{ ou } \alpha(n) \notin \mathcal{S} \;; \qquad \{\mathbf{M}_{\mathcal{S}}(m, n)\}_{\substack{\alpha(m)\in\mathcal{S}\\ \alpha(n)\in\mathcal{S}}} = (\operatorname{Corr}\mathcal{S})^{-1}$$

En particulier, les coefficients de $\mathbf{M}_{(A)}$ sont nuls, sauf $\mathbf{M}_{(A)}(1,1) = 1$. D'autre part, $\mathbf{M}_{(A,\ldots,G)} = \operatorname{Corr}(A, \ldots, G)^{-1}$, donc l'identité (38) prend la forme équivalente

$$\operatorname{Corr}(A, \ldots, G)\left(\mathbf{M}_{(A,B,C,D)} + \mathbf{M}_{(A,C,E,G)} + \mathbf{M}_{(A,B,E,F)} + \mathbf{M}_{(A)} - \mathbf{M}_{(A,B)} - \mathbf{M}_{(A,C)} - \mathbf{M}_{(A,E)}\right) = \mathbf{I}_{7,7},$$

un peu plus simple à vérifier car elle ne fait pas intervenir d'inversion de matrice au-delà de $(4,4)$. Un programme de calcul symbolique en *Matlab, Simulink Toolbox* nous a permis d'obtenir formellement cette identité, mais seulement dans le cas restreint pour lequel on possède les trois conditions d'orthogonalités supplémentaires $\rho_{011} = \rho_{001}\rho_{010}$, $\rho_{110} = \rho_{100}\rho_{010}$, $\rho_{101} = \rho_{100}\rho_{001}$. Ces conditions impliquent $\rho_{uvw} = \rho_{100}^u\rho_{010}^v\rho_{001}^w$, et en particulier $\rho_{111} = \rho_{100}\rho_{010}\rho_{001}$. Les paramètres restants sont $(\mu, \sigma^2, \rho_{100}, \rho_{010}, \rho_{001})$.

Enfin, les valeurs propres de $\mathbf{\Gamma}$ sont données par $(1 \pm \rho_{100})(1 \pm \rho_{010})(1 \pm \rho_{001})$, donc $\mathbf{\Gamma}$ est positive si ρ_{100}, ρ_{010} et ρ_{001} sont compris entre 0 et 1. Les modèles de cette famille répondent à la question de l'existence de champs de Pickard 3D.

Références

[1] F. Champagnat, J. Idier, and Y. Goussard, "Stationary Markov random fields on a rectangular finite lattice", *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 44, no. 7, pp. 2901–2916, November 1998.

[2] D. K. Pickard, "Unilateral Markov fields", *Adv. Appl. Prob.*, vol. 12, pp. 655–671, 1980.

[3] J. Idier, Y. Goussard, and A. Ridolfi, "Unsupervised image segmentation using a telegraph parameterization of Pickard random fields", in *Spatial statistics. Methodological aspects and some applications*, M. Moore, Ed., vol. 159 of *Lecture notes in Statistics*, pp. 115–140. Springer Verlag, New York, NY, 2001.

[4] E. M. Tory and D. K. Pickard, "Unilateral Gaussian fields", *Adv. Appl. Prob.*, vol. 24, pp. 95–112, 1992.

[5] F. Champagnat and J. Idier, "On the correlation structure of unilateral AR processes on the plane", *Adv. Appl. Prob.*, vol. 32, pp. 408–425, 2000.