

Algorithmes ART semi-quadratiques pour la reconstruction à partir de radiographies

Myriam FIANI^{1,2}, Jérôme IDIER¹, Stéphane GAUTIER²

¹Laboratoire des Signaux et Systèmes
Supélec, 3, Rue Joliot Curie, plateau du Moulon, 91192 GIF/Yvette

²Electricité de France, Division R&D, Département SDM
6, Quai Watier, 78401 CHATOU Cédex.

fiani@lss.supelec.fr, idier@lss.supelec.fr, stephane.gautier@edf.fr

Résumé – Cette étude s’intéresse à la généralisation de l’utilisation des techniques de reconstruction dites ART, pour la minimisation de critères régularisés convexes. Ces techniques ont l’avantage de mettre à jour les inconnues en balayant cycliquement les données. L’application est la reconstruction d’objets 2D ou 3D à partir de leurs projections en tomographie dans un contexte industriel ou médical. La généralisation s’appuie d’une part sur la méthode de Bregman, d’autre part sur une formulation semi-quadratique du critère. Plusieurs variantes sont envisagées. Celles inspirées de *Geman & Yang* [7,8] fournissent des algorithmes particulièrement simples et compétitifs.

Abstract – This study generalizes the ART reconstruction techniques in order to minimize regularized convex criteria. These techniques have the interesting property to update the unknown by cyclically scanning the data. The application is the reconstruction of 2D or 3D objects from their projections in tomography in an industrial or medical context. The generalization is based, on one hand on Bregman’s method and on the other hand on a half-quadratic formulation. Several alternatives are considered. Those inspired from *Geman & Yang* [7,8] yield particularly simple and competing algorithms.

1. Introduction

Dans cette étude, nous considérons la reconstruction d’objets 2D (images) ou 3D (volumes) à partir de leurs projections en tomographie à rayons X ou à rayons γ . Les domaines d’application concernés sont par exemple le contrôle non destructif (CND) ou l’imagerie médicale. Traditionnellement, le modèle de formation des projections (ou données) est formulé sous forme discrète (cf. FIG. 1). La relation entre les données et l’objet s’écrit alors :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (1)$$

où \mathbf{y} représente les données, \mathbf{x} l’objet à reconstruire, \mathbf{H} la matrice de projection dont les éléments sont homogènes à des longueurs et \mathbf{b} le bruit de mesure.

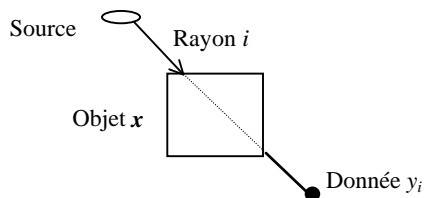


FIG. 1 : Principe de la tomographie en 2D.

Le problème de reconstruction est mal-posé : la régularisation est un outil indispensable pour obtenir une solution acceptable. Dans la suite, nous adoptons une approche pénalisée, consistant à définir l’objet reconstruit comme le minimiseur d’un critère qui s’écrit

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \phi(\mathbf{x}) \quad (2)$$

où la fonction ϕ regroupe les informations *a priori*, telle que la régularité spatiale de l’objet.

Dans un contexte de CND, le nombre d’inconnues est souvent largement supérieur au nombre de données. Reconstruire en régularisant est alors incontournable et l’utilisation des approches pénalisées est classique.

Dans un contexte médical, le nombre de données est très souvent suffisant pour reconstruire sans régularisation explicite. Historiquement, la reconstruction est faite par moindres carrés non pénalisés ($\phi = 0$ dans (2)). La famille des techniques de minimisation dites ART (*Algebraic Reconstruction Techniques*) [1] est classiquement utilisée. Ces dernières balayaient cycliquement les données pour mettre à jour l’ensemble des inconnues. Cette propriété facilite la mise en œuvre en la rendant peu coûteuse et donc facilement intégrable dans les systèmes d’imagerie médicale en temps réel.

Pour éviter d’éventuels problèmes numériques (conséquences indirectes du caractère mal-posé de la reconstruction), certains auteurs se sont intéressés à des variantes régularisées d’ART. Dès la fin des années 70, G.T. Herman adapte ainsi les techniques ART au cas d’une pénalisation quadratique séparable $\phi(\mathbf{x}) \propto \|\mathbf{x}\|^2$ [2,3]. En 96, dans le contexte particulier de l’angiographie, E. Payot propose également un algorithme « ART bayésien », et l’applique dans un contexte semi-quadratique [4]. Cet algorithme est obtenu par application de la méthode de Bregman [5]. Il est identifiable à celui proposé par G.T. Herman.

Les dispositifs de tomographie à rayons X évoluent vers l’acquisition d’un nombre de projections limité essentiellement pour les raisons suivantes : réduire la dose de rayonnement absorbée par un patient lors d’un examen, réduire le

temps et le coût d'un examen par patient (tomographie héli-coïdale). Il devient d'autant plus justifié de poser le problème de la reconstruction tomographique dans un cadre régularisé en imagerie médicale comme en CND, et, plus spécifiquement, d'envisager la pénalisation par des fonctions ϕ adaptées à la modélisation d'objets réguliers par morceaux.

L'existant résumé motive ainsi notre idée d'utiliser des techniques de type ART pour minimiser des critères markoviens strictement convexes pour lesquels la fonction ϕ se décompose en :

$$\phi(\mathbf{x}) = \lambda \sum_{r,s} \phi(x_s - x_r) + \mu \sum_s \psi(x_s - g_s) \quad (3)$$

où ϕ et ψ sont des fonctions convexes préservant les contours, λ et μ des hyperparamètres et \mathbf{g} une solution *a priori*.

Dans la suite, nous envisageons les techniques de type ART appliquées aux critères pénalisés suivants : quadratiques séparables, quadratiques non séparables et convexes. Celles développées pour les deux derniers types de critères constituent notre contribution originale. Pour finir, nous étudions les performances des techniques proposées dans le cas convexe pour un exemple 2D simulé.

2. Le cas quadratique séparable

Le cas quadratique séparable a été étudié par Herman [2] et Payot [4]. Dans (2), le terme d'*a priori* est :

$$\phi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}' \mathbf{D} \mathbf{x} \quad (4)$$

où \mathbf{D} est une matrice diagonale [4], voire proportionnelle à l'identité \mathbf{Id} [2]. L'algorithme de type ART minimisant (2) est obtenu implicitement [2] ou explicitement [4] par application de la méthode de Bregman. Cette méthode fournit un algorithme itératif minimisant un critère sous contraintes balayant cycliquement les données. La convergence est assurée pour un nombre de cycles tendant vers l'infini, si certaines conditions non précisées ici, sont vérifiées [5]. L'application directe de cette méthode nécessite l'écriture de notre problème sous une forme dite *étendue*. Le schéma décrit à présent est essentiel car il est commun aux techniques présentées dans la suite de l'exposé.

Minimiser J en \mathbf{x} est équivalent à résoudre :

$$\min_{\mathbf{x}_e} \{ J_e(\mathbf{x}_e) = \mathbf{x}_e' \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e \} \text{ sous contraintes } \mathbf{y} = \mathbf{H}_e \mathbf{x}_e \quad (5)$$

avec les notations suivantes :

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \mathbf{H}_e = [\mathbf{H} \mid \mathbf{Id}] \text{ et } \mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Id} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Le problème de minimisation, écrit sous la forme (5), permet d'appliquer directement la méthode de Bregman. Notons $\mathbf{x}_e^{k,j}$ la solution courante correspondant au $k^{\text{ième}}$ balayage des données, après avoir pris en compte la donnée y_j . Cette solution courante vérifie la contrainte : $y_j = (\mathbf{H}_e^j)' \mathbf{x}_e^{k,j}$. L'algorithme obtenu est décrit dans le TAB. 1.

TAB. 1 : Algorithme ART « bayésien » (pénalisation quadratique séparable) [2,3].

Initialisation :	$\mathbf{x}_e^{0,0} = \mathbf{0}$
Initialisation du $k^{\text{ième}}$ balayage :	$\mathbf{x}_e^{k,0} = \mathbf{x}_e^{k-1,0}$
Pour $j=1..N$:	$\mathbf{x}_e^{k,j} = \mathbf{x}_e^{k,j-1} + \frac{y_j - (\mathbf{H}_e^j)' \mathbf{x}_e^{k,j-1}}{(\mathbf{H}_e^j)' (\mathbf{A}_e)^{-1} \mathbf{H}_e^j} (\mathbf{A}_e)^{-1} \mathbf{H}_e^j \quad (7)$
\mathbf{H}^j est la transposée de la $j^{\text{ième}}$ ligne de \mathbf{H} , N le nombre de données.	

3. Le cas quadratique non séparable

Dans ce cadre, nous proposons une extension de ce qui précède au cas d'un *a priori* markovien pénalisant les différences entre voisins. En se plaçant dans le cas d'une pénalisation quadratique ($\phi(x) = x^2$ et $\mu = 0$ dans (3)) et en notant Δ la matrice permettant de créer les différences entre voisins, le critère devient :

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \lambda \mathbf{x}' \Delta \mathbf{x} \quad (8)$$

Dans (8), la matrice $\Delta' \Delta$ n'est pas une matrice diagonale à la différence de \mathbf{D} dans (4). La minimisation de J est formulée comme un problème de minimisation sous contraintes (écriture *étendue*) de la même manière que dans la partie 2 (cf. (5)). Dans la matrice \mathbf{A}_e (cf. (6)), la matrice $\lambda \mathbf{D}$ est remplacée par $\mathbf{A} = \lambda \Delta' \Delta$. Le problème vérifie également les conditions de Bregman. L'algorithme obtenu conserve la même structure que celle décrite dans le TAB. 1. Seule la définition de \mathbf{A}_e est différente. Ici encore, la convergence vers le minimum global de J de l'algorithme décrit dans TAB. 1, est directement assurée par les propriétés générales de convergence de la méthode de Bregman.

Dans cette partie, nous avons montré qu'une première généralisation des techniques ART à des critères autres que les critères quadratiques séparables est possible formellement grâce à l'application de la méthode de Bregman. Cependant dans ce cas, la mise en œuvre de l'algorithme nécessite l'inversion de la matrice \mathbf{A} . Bien que cette matrice soit creuse, son inversion représente un coût de calcul non négligeable, qui constitue le principal inconvénient de l'algorithme.

4. Le cas convexe

4.1 Introduction

En reconstruction, on cherche essentiellement à préserver des ruptures dans des zones plus ou moins homogènes (e.g. des défauts dans des pièces métalliques ou des vaisseaux sanguins dans des tissus). Des modélisations plus fines faisant appel à des *a priori* markoviens non quadratiques du type de (3) sont généralement retenues. Nous choisissons des fonctions de pénalisation ϕ et ψ strictement convexes et C^1 , typiquement :

$$\phi_T(x) = \sqrt{x^2 + T^2}, \text{ où } T \text{ est une constante.}$$

Le critère J possède alors un unique minimum global qui peut être obtenu par différentes techniques de minimisation.

Dans l'optique définie en introduction, nous étudions dans cette partie la minimisation de J par des techniques de type ART. Nous commençons par présenter l'application de la méthode de Bregman directement sur le critère convexe. Puis nous abordons la minimisation par des techniques semi-quadratiques (SQ) et tirons ainsi parti des cas précédemment étudiés (cf. §2 et 3). Deux expressions SQ déjà utilisées en imagerie, celle de *Geman & Reynolds* (GR) [6] et celle de *Geman & Yang* (GY_s) [7] et une nouvelle expression dite *Geman & Yang* « vectoriel » (GY_v) inspirée de [8] sont envisagées.

4.2 Application de la méthode de Bregman

Nous envisageons d'abord d'appliquer directement la méthode de Bregman à la formulation étendue du critère J , qui s'écrit dans le cas général convexe :

$$J_e(\mathbf{x}_e) = \|\mathbf{P}_2 \mathbf{x}_e\|^2 + \xi(\mathbf{P}_1 \mathbf{x}_e) + \zeta(\mathbf{P}_1 \mathbf{x}_e) \quad (9)$$

avec ξ et ζ les fonctions décrivant respectivement les premier et second termes de (3), les matrices \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 sont des matrices de projections, telles que $\mathbf{P}_1 \mathbf{x}_e = \mathbf{x}$ et $\mathbf{P}_2 \mathbf{x}_e = \mathbf{b}$.

Le critère J_e vérifiant les conditions de Bregman, l'application de la méthode de Bregman fournit un algorithme de minimisation de type ART. La démonstration trop technique n'est pas exposée ici. L'écriture formelle sous forme étendue de J donne une équation implicite de mise à jour des \mathbf{x} à l'itération k . La minimisation d'un critère convexe écrit sous la forme (9) par un algorithme de type ART est donc mathématiquement possible, mais se heurte à un problème de mise en œuvre. Nous n'avons pas exploré plus loin cette formulation.

4.3 Formulations semi-quadratiques

On appelle critère SQ associé à J tout critère $K(\mathbf{x}, \mathbf{l})$ quadratique en \mathbf{x} à \mathbf{l} fixé et tel que $\min_{\mathbf{l}} K(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = J(\mathbf{x})$. Dans le contexte de notre étude, les critères SQ associés à J se mettent sous la forme suivante :

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{m}(\mathbf{l}))^t \mathbf{M}(\mathbf{l})(\mathbf{x} - \mathbf{m}(\mathbf{l})) + \xi(\mathbf{l}) \quad (10)$$

La minimisation de $K(\mathbf{x}, \mathbf{l})$ se fait alors de façon alternée sur (\mathbf{x}, \mathbf{l}) . La mise à jour des variables de lignes \mathbf{l} est explicite et peu coûteuse [9]. Nous nous intéressons à la mise à jour des \mathbf{x} par un algorithme de type ART. L'idée de minimiser la partie quadratique d'un critère SQ par un algorithme de ce type n'est pas originale : elle apparaît déjà dans le travail de thèse de E. Payot [4], mais l'auteur considère un critère J plus simple, non markovien. Il se place dans le cas GR. La matrice $\mathbf{M}(\mathbf{l})$ est alors une matrice diagonale (cf. §2).

L'originalité de notre travail est de considérer le cas plus général d'un critère J markovien, d'envisager plusieurs formulations SQ et de comparer les performances des algorithmes obtenus en les mettant en œuvre sur un cas simulé 2D.

4.3.1 Formulation SQ Geman & Reynolds

Comme fonction de \mathbf{x} , le critère SQ associé à J est quadratique non séparable. L'algorithme obtenu dans le §3 (cf. TAB. 1) s'applique directement pour :

$$\mathbf{A}_e(\mathbf{l}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{GR}(\mathbf{l}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Id} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{GR}(\mathbf{l}) = \lambda(\Delta_h \mathbf{L}_h \Delta_h + \Delta_v \mathbf{L}_v \Delta_v) + \mu \mathbf{L}_g$$

avec \mathbf{L}_h et \mathbf{L}_v des matrices diagonales contenant les variables auxiliaires correspondant aux différences horizontales et verticales entre voisins, Δ_h et Δ_v permettant de créer respectivement ces différences, \mathbf{L}_g la matrice diagonale de variables auxiliaires correspondant au second terme de (3).

L'algorithme de minimisation globale sur (\mathbf{x}, \mathbf{l}) s'écrit selon le TAB. 2 :

TAB. 2 : Algorithme ART SQ GR

Initialisation :	\mathbf{l}^0 arbitraire
Réinitialisation du $k^{\text{ième}}$ balayage :	$\mathbf{x}_e^{k,0} = -\frac{1}{2}(\mathbf{A}_e(\mathbf{l}^{k-1}))^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_g^{k-1} \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$
Pour $j=1..N$:	$\mathbf{x}_e^{k,j} = \mathbf{x}_e^{k,j-1} + \frac{y_j - (\mathbf{H}_e^j)^t \mathbf{x}_e^{k,j-1}}{(\mathbf{H}_e^j)^t (\mathbf{A}_e(\mathbf{l}^{k-1}))^{-1} \mathbf{H}_e^j} (\mathbf{A}_e(\mathbf{l}^{k-1}))^{-1} \mathbf{H}_e^j$
Mise à jour de $\mathbf{L}_h, \mathbf{L}_v$:	$l_{rs}^k = \varphi_{T_1}'(x_s^{k-1,N} - x_r^{k-1,N}) / 2(x_s^{k-1,N} - x_r^{k-1,N})$
Mise à jour de \mathbf{L}_g :	$l_{s,g}^k = \varphi_{T_2}'(x_s^{k-1,N} - g_s) / 2(x_s^{k-1,N} - g_s)$

La matrice $\mathbf{M}_{GR}(\mathbf{l})$ dépendant des variables auxiliaires. Son inverse, intervenant dans la mise à jour des \mathbf{x} , doit donc être évaluée avant chaque mise à jour des \mathbf{x} . Même si elle est très creuse, son inversion a un coût non négligeable pour chaque itération de la minimisation alternée en (\mathbf{x}, \mathbf{l}) . Ceci constitue le principal inconvénient de la méthode.

4.3.2 Formulation SQ Geman & Yang standard (GY_s)

Dans ce cas, le critère SQ associé à J est également quadratique non séparable. Contrairement au cas GR, la matrice $\mathbf{M}(\mathbf{l})$ ne dépend pas des variables auxiliaires ; elle s'écrit :

$$\mathbf{M}_{GY_s} = \lambda / 2\alpha_1 (\Delta_v \Delta_v + \Delta_h \Delta_h) + \mu / 2\alpha_2 \mathbf{Id} ; \text{ soit } \mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{GY_s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Id} \end{bmatrix},$$

avec α_1 et α_2 des facteurs d'échelle définis dans [9], tels que $\alpha_1 \in [0; T_1]$ et $\alpha_2 \in [0; T_2]$.

L'algorithme de minimisation en (\mathbf{x}, \mathbf{l}) diffère de celui du TAB. 2 par la mise à jour des \mathbf{l} et par la matrice \mathbf{A}_e dans la mise à jour des \mathbf{x} . Le calcul du dénominateur dépendant de $\mathbf{M}(\mathbf{l})$ dans la mise à jour des \mathbf{x} est alors fait une unique fois en début de la minimisation globale. Le coût de la mise à jour des \mathbf{x} est ainsi considérablement réduit.

TAB. 3 : Algorithme ART SQ GY_s

Initialisation :	\mathbf{l}^0 arbitraire
Réinitialisation du $k^{\text{ième}}$ balayage :	$\mathbf{x}_e^{k,0} = -\frac{1}{2}(\mathbf{A}_e)^{-1} \begin{bmatrix} \Delta_h \mathbf{L}_h^{k-1} + \Delta_v \mathbf{L}_v^{k-1} + \mathbf{L}_g^{k-1} + \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$
Pour $j=1..N$, appliquer (7)	
Mise à jour de $\mathbf{L}_h, \mathbf{L}_v$:	$l_{rs}^k = (x_s^{k-1,N} - x_r^{k-1,N}) - \alpha_1 \varphi_{T_1}'(x_s^{k-1,N} - x_r^{k-1,N})$
Mise à jour de \mathbf{L}_g :	$l_s^k = (x_s^{k-1,N} - g_s) - \alpha_2 \varphi_{T_2}'(x_s^{k-1,N} - g_s)$

4.3.3 Formulation SQ Geman & Yang vectorielle (GY_v)

Cette formulation s'inspire d'une idée introduite dans [8]. Dans ce cas le critère SQ associé à J est quadratique séparable en \mathbf{x} et la matrice $\mathbf{M}(\mathbf{l})$, ne dépendant pas des variables auxiliaires, s'écrit :

$$\mathbf{M}_{GY_v} = (\lambda / \alpha_1 + \mu / 2\alpha_2) \mathbf{Id} ;$$

α_1 et α_2 sont des facteurs d'échelle.

Pour la remise à jour des \mathbf{x} , l'algorithme décrit dans TAB. 1 est alors directement utilisable en remplaçant $\lambda \mathbf{D}$ par \mathbf{M}_{GY_v} .

TAB. 4 : Algorithme ART SQ GY_v

Initialisation :	\mathbf{l}^0 arbitraire
Réinitialisation du $k^{\text{ième}}$ balayage :	$\mathbf{x}_e^{k,0} = -\frac{1}{2}(\mathbf{A}_e)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{l}^{k-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$
Pour $j=1..N$, appliquer (7)	
Mise à jour de \mathbf{l} :	$\mathbf{l}^k = \mathbf{x}_e^{k-1,N} - \left\{ \alpha_1 \sum_s \phi'_{T_1} (x_s^{k-1,N} - x_r^{k-1,N}) \mathbf{v}_{rs}^h + \alpha_2 \sum_s \phi'_{T_2} (x_s^{k-1,N} - g_s) \mathbf{e}_s \right\}$
avec \mathbf{v}_{rs}^h , \mathbf{v}_{rs}^v , les vecteurs créant les différences horizontales et verticales entre voisins et \mathbf{e}_s , vecteur canonique.	

En terme de coût en nombre d'opérations par itération et en encombrement mémoire, cette version est la plus intéressante. En effet le calcul de l'inverse \mathbf{M}_{GY_v} se résume par une inversion scalaire lors de la mise à jour des \mathbf{x} . Cette méthode possède donc une mise en œuvre remarquablement simple.

5. Performances sur un cas simulé 2D

Nous mettons en œuvre les méthodes ART-SQ développées dans la partie précédente sur l'exemple décrit FIG. 2a. Les hyperparamètres sont fixés empiriquement.

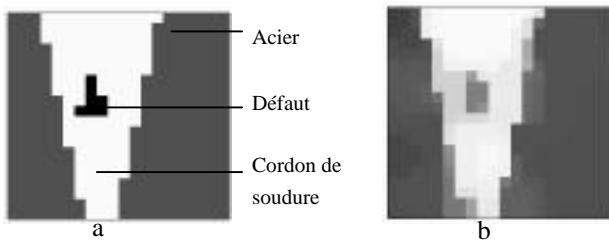


FIG. 2 : a : Objet 2D vrai représentant un cordon de soudure contenant un défaut. Les données simulées pour cet objet sont trois projections parallèles bruitées à 20 dB pour les incidences 0, -45 et 45 degrés, b : reconstruction

Le minimiseur de (2) est donné FIG. 2b. Tous les algorithmes testés fournissent asymptotiquement cette solution, mais certains sont plus rapides que d'autres. Les algorithmes SQ sont accélérés par surrelaxation [9]. Ceux de type GY sont moins coûteux que l'algorithme GR, en temps et en coût de calcul par itération ; ce dernier nécessite moins d'itérations, mais son coût par itération est important. De même, GY_s demande moins d'itérations que GY_v pour converger, mais GY_v reste compétitif du fait d'un coût par itération réduit.

En terme de temps CPU et de nombre d'opérations, les algorithmes ART de type GY sont concurrents de l'algorithme du gradient conjugué. Signalons enfin que le codage des algorithmes a été fait en Matlab. L'indicateur en temps CPU est donc moins significatif que celui en nombre d'opérations, dans l'optique d'une programmation dans un langage plus élémentaire.

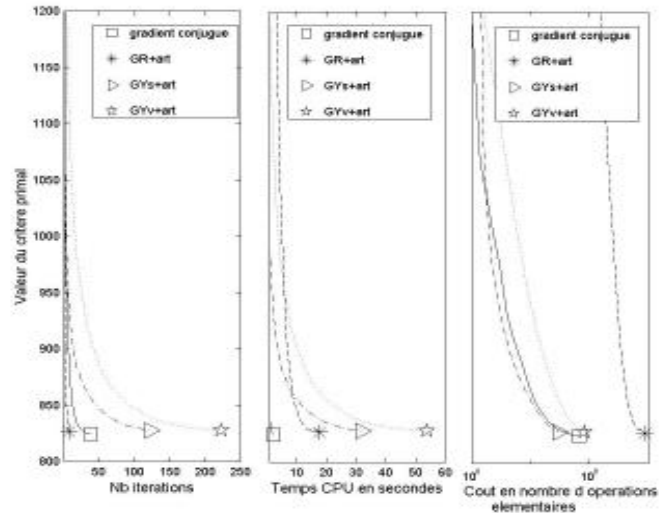


FIG. 3 : Comparaisons en terme de nombre d'itérations, de temps CPU (Processeur Pentium III 500 Mhz) et de nombre d'opérations (pour cette courbe, l'échelle est logarithmique) pour les méthodes SQ envisagées et pour le gradient conjugué.

Références

- [1] G.T. Herman, A. Lent et S.W. Rowland. *ART : Mathematics and Applications : A report on the Mathematical Foundations and the Applicability to Real Data of the Algebraic Reconstruction Techniques*. J. Theor. Biology, 1973, vol.42, pp.1-32.
- [2] G.T. Herman, H. Hurwitz, A. Lent, H.P. Lung. *On the Bayesian Approach to Image Reconstruction*. Information and Control, 1979, vol.42, pp 60-71.
- [3] K.M. Hanson. *Bayesian & Related methods in Image Reconstruction from Incomplete Data in Image Recovery : Theory and Application*. Ed. H. Stark, Academic Press, 1987.
- [4] E. Payot. *Reconstruction vasculaire tridimensionnelle en imagerie par rayons X*. Thèse de doctorat Télécom, 1996.
- [5] L.M. Bregman. *The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming*. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1967, vol.7, pp. 200-217.
- [6] D. Geman, G. Reynolds. *Constrained restoration and the recovery of discontinuities*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 1992, vol.14, pp. 367-383.
- [7] D. Geman, C. Yang. *Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization*. IEEE Trans. Image Processing, 1995, vol.4, pp. 932-946.
- [8] P. Ciuciu. *Méthodes markoviennes en estimation spectrale non paramétrique. Application en imagerie radar doppler*. Thèse de doctorat, octobre 2000, Orsay.
- [9] J. Idier. *Convex half-quadratic criteria and interacting auxiliary variables for image restoration*. IEEE. Trans. Image Processing, 2001, vol. 10, pp. 1001-1009.