Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2008. Том 16. № 2. С. 14–22

УДК 519.8

ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ РАЗБИЕНИЯ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ КРИТЕРИЯМИ

Е. Е. Гуревский, В. А. Емеличев

Белорусский государственный университет
e-mail: emelichev@bsu.by
Поступила 29.06.2007

Получены необходимые и достаточные условия пяти типов устойчивости по векторному критерию многокритериальной комбинаторной задачи разбиения с лексикографическим принципом оптимальности.

1. Введение. В работе рассматривается многокритериальный вариант комбинаторной задачи разбиения, знакомой широкому кругу специалистов по дискретной оптимизации. Эта задача состоит в следующем. Набор из нескольких положительных чисел требуется разделить на два подмножества так, чтобы суммы элементов в подмножествах отличались минимальным образом. Задачу можно интерпретировать как задачу теории расписаний, состоящую в распределении независимых работ по двум идентичным процессорам так, чтобы время, когда заканчивается последняя выполненная работа, было минимальным [1–4].

Настоящая статья является продолжением публикаций [5–8], посвященных исследованиям устойчивости множества оптимальных решений векторных задач дискретной оптимизации относительно возмущений исходных данных. Здесь исследуются пять типов устойчивости лексикографической задачи разбиения, по разному описывающих ситуацию, при которой малым изменениям входных параметров, происходящих в целевых функциях, соответствуют малые изменения выходных результатов. Определение каждого рассматриваемого типа устойчивости дано в терминах существования в пространстве параметров векторного критерия такой окрестности, которая характеризуется тем, что множеству лексикографических оптимумов любой возмущенной задачи с исходными данными из этой окрестности присуще некоторое свойство инвариантности по отношению к множеству лексикографических оптимумов первоначальной задачи. Ниже формулируются и доказываются необходимые и одновременно достаточные условия всех пяти типов устойчивости задачи разбиения относительно изменений исходных данных, происходящих в критериальных функциях. Ранее подобные результаты для векторных целочисленных задач с линейными и квадратичными функционалами получены в работах [9–11] (а также [12, 13], где обобщен опыт исследований, проводимых в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, в области устойчивости и регуляризации векторных задач дискретной оптимизации). Современное состояние исследований устойчивости оптимальных расписаний относительно возможных возмущений числовых исходных данных отражено в работах [14–17].

2. Основные определения и обозначения. Рассмотрим векторный (m-критериальный) вариант задачи разбиения.

Пусть на множестве n-векторов (разбиений) Q^n, $n \geq 2$, $Q = \{-1, 1\}$, задана векторная функция (векторный критерий)

$$f(x, C) = (|C_1 x|, |C_2 x|, \ldots, |C_m x|) \to \min_{x \in Q^n},$$

где C_i — i-я строка матрицы $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, $m \geq 1$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\text{т}}$. Лишь для удобства дальнейшего изложения будем полагать, что элементы матрицы C — любые действительные числа (см. ниже замечание 2), т.е. $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

В критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$ введем бинарное отношение лексикографического порядка $\prec$ между векторами $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ и $y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)$, полагая

$$y \prec y' \iff \exists\, k \in N_m \quad (y_k < y'_k \ \&\ k = \min\{i \in N_m : \ y_i \neq y'_i\}),$$

где $N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Под векторной задачей разбиения

$$Z^m(C) : \ \text{lex} \ \min\{f(x, C) : \ x \in Q^n\}, \ m \geq 1$$

будем понимать задачу поиска множества лексикографических оптимумов, которая, как известно, задается формулой:

$$L^m(C) = \{x \in Q^n : \ \forall\, x' \in Q^n \ (f(x', C) \overline{\prec} f(x, C))\},$$

где $\overline{\prec}$ — отрицание лексикографического отношения $\prec$. Ясно, что $L^m(C) \neq \emptyset$ при любой матрице $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

В этом контексте скалярная задача $Z^1(C)$, где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — вектор с положительными компонентами и есть задача разбиения множества чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Очевидно, что вектор-функция невязок $f(x, C)$ характеризует меру несовместности (абсолютных уклонений) следующей однородной системы линейных уравнений

$$Cx = \mathbf{0}_{(m)}, \quad x \in Q^n, \tag{1}$$

где $\mathbf{0}_{(m)} = (0, 0, \ldots, 0)^{\text{т}} \in \mathbf{R}^m$. Легко видеть, что эта система совместна тогда и только тогда, когда множество векторных оценок множества $L^m(C)$

$$F(L^m(C)) = \{y \in \mathbf{R}^m : \ y = f(x, C), \ x \in L^m(C)\}$$

состоит лишь из нулевого вектора.

Замечание 1. Нетрудно понять, что частным случаем однородной системы (1) является неоднородная система вида

$$Ax + b = \mathbf{0}_{(m)}, \quad x \in Q^{n-1},$$

где $A \in \mathbf{R}^{m \times (n-1)}$, $b \in \mathbf{R}^m$. Поэтому в схему нашей задачи $Z^m(C)$ вкладывается и задача с частными критериями

$$|A_i x + b_i| \to \min_{x \in Q^{n-1}}, \quad i \in N_m,$$

где A_i — i-я строка матрицы A, b_i — i-я компонента вектора b.

Известно, что множество $L^m(C)$, являясь подмножеством множества Парето, может быть определено, как результат решения последовательности m скалярных задач:

$$L_i^m(C) = \text{Arg} \ \min\{|C_i x| : \ x \in L_{i-1}^m(C)\}, \quad i \in N_m, \tag{2}$$

где $L_0^m(C)=Q^n$. Таким образом, имеем последовательность множеств

$$Q^n \supseteq L_1^m(C) \supseteq L_2^m(C) \supseteq \ldots \supseteq L_m^m(C) = L^m(C). \tag{3}$$

В дальнейшем множество $L_1^m(C)$ будет играть существенную роль в формулировках критериев устойчивости.

Следующие свойства очевидны.

Свойство 1. *Для любых двух разбиений* $x, x' \in L^m(C)$ *справедливо равенство* $f(x,C) = f(x',C)$.

Свойство 2. *Для любого разбиения* x *верно равенство* $f(x,C) = f(-x,C)$.

Поэтому множество $L^m(C)$ всегда состоит из четного числа разбиений, а множество векторных оценок $F(L^m(C))$ одноэлементно.

Будем исследовать пять типов устойчивости задачи $Z^m(C)$ к независимым возмущениям параметров векторного критерия $f(x,C)$, т.е. элементов матрицы C. Для этого в пространстве $\mathbf{R}^k$ произвольной размерности $k \in \mathbf{N}$ зададим чебышевскую метрику l_∞, т.е. под нормой вектора $z=(z_1,z_2,\ldots,z_k)\in\mathbf{R}^k$ будем понимать число

$$\|z\| = \max_{j\in N_k} |z_j|,$$

а под нормой матрицы — норму вектора, составленного из всех ее элементов.

3. Устойчивость и сильная устойчивость. Как обычно [6, 15, 18], задачу $Z^m(C)$ назовем устойчивой, если

$$\{\varepsilon > 0 :\ \forall\, C' \in \Omega(\varepsilon)\ (L^m(C+C') \subseteq L^m(C))\} \neq \emptyset,$$

где

$$\Omega(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{m\times n} :\ \|C'\| < \varepsilon\}.$$

Иначе говоря, задача устойчива, если любые малые возмущения исходных данных не приводят к появлению новых лексикографических оптимумов.

Замечание 2. Свойство устойчивости задачи является дискретным аналогом свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу [19] многозначного (точечно-множественного) оптимального отображения

$$L^m :\ \mathbf{R}^{m\times n} \to 2^{Q^n}, \tag{4}$$

которое каждой матрице $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$ ставит в соответствие множество лексикографических оптимумов $L^m(C)$. Задачу $Z^m(C+C')$ будем называть возмущенной, а матрицу $C' \in \Omega(\varepsilon)$ — возмущающей.

Понятно, что при выполнении равенства $L^m(C)=Q^n$ задача $Z^m(C)$ устойчива. В дальнейшем этот случай будем исключать из рассмотрения, а задачу $Z^m(C)$, для которой множество $\overline{L^m}(C) = Q^n \setminus L^m(C)$ непусто, называть нетривиальной.

Хорошо известно [6, 12, 13, 18], что необходимым и достаточным условием устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования, состоящей в поиске множества Парето, является совпадение множеств эффективных (оптимальных по Парето) и слабо эффективных (оптимальных по Слейтеру) решений. В случае лексикографической задачи оказывается, что роль множества Слейтера играет множество $L_1^m(C)$, элементы которого принято называть слабо лексикографическими оптимумами.

Заметим, что в работе [20] получены достижимые оценки снизу и сверху радиуса устойчивости задачи разбиения с паретовским принципом оптимальности в чебышевской метрике.

Ослабляя требование непоявления новых лексикографических оптимумов, приходим к понятию сильной устойчивости задачи. Согласно [5, 6, 8], задача $Z^m(C)$ называется сильно устойчивой, если

$$\{\varepsilon > 0 : \ \forall\, C' \in \Omega(\varepsilon)\ (L^m(C + C') \cap L^m(C) \neq \emptyset)\} \neq \emptyset.$$

Таким образом, задача $Z^m(C)$ сильно устойчива лишь в том случае, когда для каждого малого возмущения параметров найдется хотя бы одно разбиение исходной задачи (не обязательно одно и тоже), сохраняющее лексикографическую оптимальность. Очевидно, что всякая устойчивая задача сильно устойчива.

Теорема 1. *Для нетривиальной задачи* $Z^m(C)$, $m \geq 1$, *следующие утверждения эквивалентны:*

(i) задача $Z^m(C)$ *устойчива,*

(ii) задача $Z^m(C)$ *сильно устойчива,*

(iii) $L^m(C) = L^m_1(C)$,

(iv) $|F(L^m_1(C))| = 1$.

Здесь $F(L^m_1(C))$ — множество векторных оценок множества слабо лексикографических оптимумов $L^m_1(C)$.

Доказательство. Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ очевидна, исходя из определений понятий устойчивости и сильной устойчивости.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Пусть, напротив, $L^m(C) \neq L^m_1(C)$ в предположении, что задача $Z^m(C)$ сильно устойчива. Тогда, ввиду (3), множество

$$S^m(C) = L^m_1(C) \cap \overline{L^m}(C),$$

непусто. Покажем, что верна формула

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, C^* \in \Omega(\varepsilon) \quad (L^m(C) \cap L^m(C + C^*) = \emptyset). \tag{5}$$

Пусть $x^0 \in S^m(C)$, а потому, согласно свойству 2, и $-x^0 \in S^m(C)$. Поэтому для любого разбиения $x \in L^m(C)$ справедливо соотношение

$$f(x, C) \prec f(\pm x^0, C).$$

Это вместе с $\pm x^0 \in L^m_1(C)$ дает формулу

$$\forall\, x \in L^m(C) \quad \exists\, k = k(x) \in N_m \setminus \{1\} \quad \forall\, i \in N_{k-1} \quad (|C_i x| = |C_i x^0| \ \&\ |C_k x| < |C_k x^0|),$$

которая в силу свойства 1 может быть записана в виде

$$\exists\, k \in N_m \setminus \{1\} \quad \forall\, i \in N_{k-1} \quad \forall\, x \in L^m(C) \quad (|C_i x| = |C_i x^0| \ \&\ |C_k x| < |C_k x^0|). \tag{6}$$

Отсюда следует, что $C_k \neq \mathbf{0}^T_{(n)}$, т.е.

$$\|C_k\| > 0. \tag{7}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Займемся построением необходимой возмущающей матрицы C^*. В связи с (6) возможны два случая.

Случай 1. Для любого разбиения $x \in L^m(C)$ справедливы равенства

$$C_1 x^0 = C_1 x = 0. \tag{8}$$

Поскольку $x^0 \in \overline{L^m}(C)$, то в $L^m(C)$ не существует вектора, коллинеарного вектору x^0. Поэтому найдется такая гиперплоскость

$$H = \{x \in \mathbf{R}^n : \ ax = 0\},$$

что
$$\forall\, x \in L^m(C) \quad (0 = ax^0 \neq ax). \tag{9}$$
Далее, полагая $\|a\| = 1$, построим строки возмущающей матрицы $C^* \in \mathbf{R}^{m\times n}$ согласно правилу
$$C_i^* = \begin{cases} \delta a, & \text{если} \quad i = 1, \\ \mathbf{0}_{(n)}^T, & \text{если} \quad i \neq 1, \end{cases}$$
где число δ удовлетворяет неравенствам $0 < \delta < \varepsilon$. Отсюда, учитывая равенство $\|a\| = 1$, выводим $C^* \in \Omega(\varepsilon)$. Кроме того, из (8) и (9) вытекает, что при любом разбиении $x \in L^m(C)$ выполняются соотношения
$$|(C_1 + C_1^*)x^0| = |\delta a x^0| = 0 < |\delta a x| = |(C_1 + C_1^*)x|. \tag{10}$$

Случай 2. Для любого разбиения $x \in L^m(C)$ справедливы соотношения
$$|C_1 x^0| = |C_1 x| > 0. \tag{11}$$

В этом случае возмущающую матрицу $C^* \in \mathbf{R}^{m\times n}$ определим по правилу
$$C_i^* = \begin{cases} \delta C_k, & \text{если} \quad i = 1, \\ \mathbf{0}_{(n)}^T, & \text{если} \quad i \neq 1, \end{cases}$$
здесь и далее индекс k из (6), а число $\delta \neq 0$ зададим так, чтобы выполнялись условия
$$\|\delta C_k\| < \varepsilon, \tag{12}$$
$$|\delta| < \frac{|C_1 x^0|}{|C_k x^0|}, \tag{13}$$
$$\operatorname{sign} \delta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \operatorname{sign} C_1 x^0 \neq \operatorname{sign} C_k x^0, \\ -1, & \text{если} \quad \operatorname{sign} C_1 x^0 = \operatorname{sign} C_k x^0. \end{cases} \tag{14}$$

Согласно (7), число, стоящее в левой части неравенства (12), положительно. Поэтому, принимая во внимание строение возмущающей матрицы C^*, имеем $C^* \in \Omega(\varepsilon)$. Кроме того, учитывая, что оба числа $C_1 x^0$ и $C_k x^0$ отличны от нуля (см. (6) и (11)), из (13) и (14) выводим
$$|C_1 x^0 + \delta C_k x^0| = |C_1 x^0| - |\delta| \cdot |C_k x^0|.$$
Отсюда ввиду (6), (11) и строения матрицы C^* следует, что для любого разбиения $x \in L^m(C)$ справедливы соотношения
$$|(C_1 + C_1^*)x^0| - |(C_1 + C_1^*)x| = |C_1 x^0 + \delta C_k x^0| - |(C_1 + C_1^*)x| \leq$$
$$\leq |C_1 x^0| - |\delta| \cdot |C_k x^0| - |C_1 x| + |C_1^* x| = -|\delta| \cdot |C_k x^0| + |\delta| \cdot |C_k x| < 0,$$
которые вместе с (10) дают формулу
$$\exists\, C^* \in \Omega(\varepsilon) \quad \forall\, x \in L^m(C) \quad (|(C_1 + C_1^*)x^0| < |(C_1 + C_1^*)x|).$$
Поэтому имеем
$$L^m(C) \cap L_1^m(C + C^*) = \emptyset,$$
и, учитывая включение
$$L^m(C + C^*) \subseteq L_1^m(C + C^*),$$

справедливое в силу (3), заключаем, что формула (5) верна. Следовательно, задача $Z^m(C)$ не является сильно устойчивой. Полученное противоречие доказывает импликацию $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Импликация $(iii) \Rightarrow (iv)$ вытекает непосредственно из определения множества $F(L_1^m(C))$ и свойства 1.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Пусть выполняется равенство $|F(L_1^m(C))| = 1$. Тогда никакое разбиение $x \in \overline{L^m}(C)$ не может быть слабо лексикографическим оптимумом задачи $Z^m(C)$. Поэтому, согласно (2), (при $i = 1$) для любого разбиения $x \in \overline{L^m}(C)$ имеет место неравенство

$$|C_1 x^0| < |C_1 x|,$$

если $x^0 \in L^m(C)$. Отсюда в силу непрерывности функции $|C_1 x|$ на множестве параметров $C_1 \in \mathbf{R}^n$ существует такое число $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$, что для любой возмущающей матрицы $C' \in \Omega(\varepsilon)$ справедливо соотношение

$$|(C_1 + C_1')x^0| < |(C_1 + C_1')x|, \tag{15}$$

т.е. разбиение x не является лексикографическим оптимумом возмущенных задач $Z^m(C+C')$, $C' \in \Omega(\varepsilon)$. Очевидно, что (15) верно при любом разбиении $x \in \overline{L^m}(C)$, если $C' \in \Omega(\varepsilon^*)$, где

$$\varepsilon^* = \min\{\varepsilon(x) : \ x \in \overline{L^m}(C)\}.$$

Из приведенных рассуждений следует, что

$$\exists\ \varepsilon^* > 0 \quad \forall\ C' \in \Omega(\varepsilon^*) \quad (\overline{L^m}(C) \subseteq \overline{L^m}(C + C')),$$

и потому задача $Z^m(C)$ устойчива.

Теорема 1 доказана.

Очевидно, что в однокритериальном случае $(m = 1)$ при любой строке $C \in \mathbf{R}^n$ выполняется равенство $L^1(C) = L_1^1(C)$. Поэтому из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Скалярная задача $Z^1(C)$ устойчива (сильно устойчива) при любом векторе $C \in \mathbf{R}^n$.*

4. Квазиустойчивость и сильная квазиустойчивость. По аналогии с [6, 7] задачу $Z^m(C)$ назовем квазиустойчивой, если

$$\{\varepsilon > 0 : \ \forall\ C' \in \Omega(\varepsilon)\ (L^m(C) \subseteq L^m(C + C'))\} \neq \emptyset.$$

Иначе говоря, задача квазиустойчива, если при любых малых возмущениях исходных данных сохраняются все лексикографические оптимумы, но могут появиться и новые.

Тем самым, свойство квазиустойчивости является дискретным аналогом свойства полунепрерывности снизу по Хаусдорфу многозначного оптимального отображения (4).

Ослабляя требование сохранения всего множества $L^m(C)$ при малых возмущениях параметров, приходим к понятию сильной квазиустойчивости. Этот тип устойчивости есть свойство сохранения лексикографической оптимальности хотя бы одним разбиением при любых малых возмущениях параметров. Итак, задача $Z^m(C)$ называется сильно квазиустойчивой [5, 6], если

$$\{\varepsilon > 0 : \ \exists\ x^0 \in L^m(C)\ \forall\ C' \in \Omega(\varepsilon)\ (x^0 \in L^m(C + C'))\} \neq \emptyset.$$

Очевидно, что всякая квазиустойчивая задача сильно квазиустойчива.

Теорема 2. *Для задачи $Z^m(C)$, $m \geq 1$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) задача $Z^m(C)$ квазиустойчива,

(ii) задача $Z^m(C)$ сильно квазиустойчива,

(iii) $|L^m(C)| = |L_1^m(C)| = 2$.

Доказательство. Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ очевидна в силу определения понятий квазиустойчивости и сильной квазиустойчивости.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Доказательство проведем методом от противного. Пусть задача $Z^m(C)$ сильно квазиустойчива. Тогда существует такое разбиение $x^0 \in L^m(C) \subseteq L_1^m(C)$, что верна формула

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, C' \in \Omega(\varepsilon) \quad (x^0 \in L^m(C + C')). \tag{16}$$

Далее предположим, что равенства (iii) не выполняются. Тогда, согласно свойству 2 и формуле (3), найдется такое разбиение x^*, что

$$x^* \in L_1^m(C), \quad x^* \neq \pm x^0.$$

Поэтому ввиду (2) (при $i = 1$) имеем

$$|C_1 x^0| = |C_1 x^*|. \tag{17}$$

Так как векторы x^* и x^0 не коллинеарны, то существует вектор-строка $a \in \mathbf{R}^n$ с условиями

$$a x^0 \neq a x^* = 0, \quad \|a\| = 1. \tag{18}$$

Займемся построением такой возмущающей матрицы C^*, которая противоречит формуле (16). Пусть ε — любое положительное число. С учетом (17) рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $C_1 x^0 = C_1 x^* = 0$. Зададим все строки возмущающей матрицы $C^* \in \mathbf{R}^{m \times n}$ по правилу

$$C_i^* = \begin{cases} \delta a, & \text{если} \quad i = 1, \\ \mathbf{0}_{(n)}^T, & \text{если} \quad i \neq 1, \end{cases} \tag{19}$$

где $0 < \delta < \varepsilon$. Тогда, учитывая (18), получаем

$$|(C_1 + C_1^*)x^*| = |\delta a x^*| = 0 < |\delta a x^0| = |(C_1 + C_1^*)x^0|,$$

$$\|C^*\| = \delta, \quad C^* \in \Omega(\varepsilon).$$

Случай 2. $|C_1 x^0| = |C_1 x^*| > 0$. Тогда, вновь построив матрицу $C^* \in \mathbf{R}^{m \times n}$ по правилу (19), зададим число δ в соответствии с условиями

$$0 < |\delta| < \varepsilon,$$

$$\operatorname{sign} \delta a x^0 = \operatorname{sign} C_1 x^0.$$

Отсюда, учитывая (18), найдем

$$|(C_1 + C_1^*)x^*| - |(C_1 + C_1^*)x^0| = |C_1 x^* + \delta a x^*| - |C_1 x^0 + \delta a x^0| =$$

$$= |C_1 x^*| - |C_1 x^0| - |\delta a x^0| = -|\delta a x^0| < 0,$$

$$\|C^*\| = |\delta|, \quad C^* \in \Omega(\varepsilon).$$

Резюмируя оба случая, заключаем, что верна формула

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, C^* \in \Omega(\varepsilon) \quad (x^0 \in \overline{L^m}(C + C^*)),$$

которая противоречит формуле (16), что и доказывает импликацию $(ii) \Rightarrow (iii)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Действительно, согласно теореме 1, из равенств (iii) вытекает устойчивость задачи $Z^m(C)$, т.е. справедливо утверждение

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, C' \in \Omega(\varepsilon) \quad (L^m(C + C') \subseteq L^m(C)).$$

Поэтому, ввиду равенства $|L^m(C)| = 2$, задача $Z^m(C)$ квазиустойчива.

Теорема 2 доказана.

При $m = 1$ теорема 2 переходит в следующее

Следствие 2. *Скалярная задача $Z^1(C)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда она имеет только два оптимальных разбиения.*

5. Стабильность. Задачу $Z^m(C)$ назовем стабильной, если

$$\{\varepsilon > 0 :\ \forall\, C' \in \Omega(\varepsilon)\ (L^m(C + C') = L^m(C))\} \neq \emptyset.$$

Тем самым, свойство стабильности является дискретным аналогом свойства непрерывности по Хаусдорфу точечно-множественного отображения (4). Очевидно, что задача $Z^m(C)$ стабильна когда она устойчива и квазиустойчива одновременно.

Следствием теорем 1 и 2 является следующая

Теорема 3. *Для задачи $Z^m(C)$, $m \geq 1$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) задача $Z^m(C)$ стабильна,

(ii) задача $Z^m(C)$ квазиустойчива,

(iii) $|Arg\min\{|C_1 x| :\ x \in Q^n\}| = 2$.

Следствие 3. *Скалярная задача $Z^1(C)$ стабильна тогда и только тогда, когда она имеет только два оптимальных разбиения.*

Резюмируя полученные в работе результаты, заключаем, что отношения между пятью изученными типами устойчивости векторной задачи разбиения $Z^m(C)$ иллюстрирует следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Устойчивость} & \Longleftrightarrow & \text{Сильная устойчивость} & \\ & \Uparrow & & \Uparrow & \\ \text{Квазиустойчивость} & \Leftrightarrow & \text{Стабильность} & \Leftrightarrow & \text{Сильная квазиустойчивость} \end{array}$$

Замечание 3. В случае, когда элементы матрицы C положительны, все полученные выше результаты являются справедливыми, так как всегда существует такая окрестность точки C в пространстве параметров $\mathbf{R}^{m\times n}$, что любая точка этой окрестности имеет положительные компоненты.

Замечание 4. С учетом замечания 1, все полученные выше результаты также справедливы для векторной задачи с частными критериями $|A_i x + b_i|$, $i \in N_m$.

Замечание 5. В силу эквивалентности любых двух норм в конечномерном линейном пространстве [21, с. 143] все сформулированные в этой статье утверждения (теоремы 1–3 и следствия 1–3) верны не только для чебышевской, но и для других норм в пространстве матриц $\mathbf{R}^{m\times n}$.

Литература

1. *Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М.* Теория расписаний. Одностадийные системы. М., 1984.
2. *Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnoy Kan A.H.G., Shmoys D.B.* Sequencing and scheduling: Algorithms and complexity // Handbook of Operations Research. Amsterdam, 1993. V. 4. P. 445–452.
3. *Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А., Танаев В.С.* Математические модели и методы календарного планирования. Минск, 1994.
4. *Котов В.М.* Алгоритмы для задач разбиения и упаковки. Минск, 2001.

5. *Emelichev V.A., Nikulin Yu.V.* Numerical measure of strong stability and strong quasistability in the vector problem of integer linear programming // Computer Science Journal of Moldova. 1999. V. 7. № 1. P. 105–117.
6. *Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P.* Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. 2002. V. 51. № 4. P. 645–676.
7. *Emelichev V.A., Kuz'min K.G., Nikulin Yu.V.* Stability analysis of the Pareto optimal solutions for some vector Boolean optimization problem // Optimization. 2005. V. 54. № 6. P. 545–561.
8. *Емеличев В.А., Кузьмин К.Г.* О сильной устойчивости решений векторной задачи минимизации пороговых функций // Информатика. 2005. № 1. С. 16–24.
9. *Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И.* Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 2004. № 1. С. 63–70.
10. *Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И.* Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. 2005. № 4. С. 90–100.
11. *Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И.* Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования // Кибернетика и системный анализ. 2006. № 5. С. 63–72.
12. *Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т.* Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев, 1995.
13. *Сергиенко И.В., Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев, 2003.
14. *Сотсков Ю.Н., Сотскова Н.Ю* Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами. Минск, 2004.
15. *Sotskov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.N.* Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. 1995. V. 58. № 2. P. 169–190.
16. *Sotskov Yu.N., Tanaev V.S., Werner F.* Stability radius of an optimal schedule: a survey and recent developments // Industrial applications of combinatorial optimization. Kluwer Academic Publishers, 1998. V. 16. P. 72–108.
17. *Сотсков Ю.Н.* Исследование устойчивости оптимальных расписаний // Информатика. 2004. № 4. С. 65–75.
18. *Емеличев В.А., Кузьмин К.Г.* О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования // Информатика. 2006. № 2. С. 84–93.
19. *Tanino T., Sawaragi Y.* Stability of nondominated solutions in multicriteria decision-making // Journal of Optimization Theory and Applications. 1980. V. 30. P. 229–253.
20. *Гуревский Е.Е., Емеличев В.А.* Многокритериальная комбинаторная задача разбиения в условиях неопределенности // Материалы IX Междунар. конф. "Интеллектуальные системы и компьютерные науки". М., 2006. Т. 1. Ч. 1. С. 117–123.
21. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.

E. E. Gurevsky, V. A. Emelichev

Postoptimal analysis of vector partition problem with ordered criteria

Summary

Necessary and sufficient conditions for five types of stability with respect to vector criterion to a multicriteria combinatorial partition problem with lexicographic principle of optimality were obtained.