Module Sémantique
TD 4 : Points fixes et CPO

Soit P un ensemble ordonné.

Un sous-ensemble S de P est une *chaîne* de P si pour tous $x, y \in S$, soit $x \leq y$, soit $y \leq x$.

L'ensemble P est appelé *CPO* (*complete partially ordered set*) si toute chaîne S de P a un plus petit majorant (appelé borne supérieure) dans P. On notera $\sqcup S$ cette borne supérieure.

Soit $F : P \to P$, on note $\mathrm{Fix}(F)$ l'ensemble des points fixes de F, et $\mu(F)$ le plus petit élément de $\mathrm{Fix}(F)$, s'il existe. F est dite continue si, pour toute chaîne S de P, $F(S)$ est une chaîne, et $F(\sqcup S) = \sqcup F(S)$.

Notez que tout CPO admet un plus petit élément $\perp$ (à démontrer si vous avez le temps).

1. Montrer que toute application F, continue sur un CPO P, est croissante :

$$\forall x, y \in P, x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$$

2. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème du point fixe sur les CPO : Toute fonction F continue sur un CPO admet un plus petit point fixe $\mu(F)$ et $$\mu(F) = \bigsqcup \{F^n(\perp) \mid n \geq 0\}$$

Soit P un CPO, et F une application de $P \to P$. On pose

$$\alpha = \bigsqcup \{F^n(\perp) \mid n \geq 0\}$$

2. 1. Montrer que si F est continue, alors $\alpha \in \mathrm{Fix}(F)$.

2. 2. En déduire que $\alpha = \mu(F)$. Conclure.

3. Soit $(\mathbb{P}, \leq)$ un CPO.

On considère maintenant l'espace $\mathbb{P}'$ des applications continues de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$.

On définit sur $\mathbb{P}'$ une relation **réflexive** $\trianglelefteq$ telle que :

$$f \trianglelefteq g \iff \forall x \in \mathbb{P},\ f(x) \leq g(x)$$

Le but de cette question est de montrer que $(\mathbb{P}', \trianglelefteq)$ est un CPO.

3. 1. Vérifier que $\trianglelefteq$ est bien une relation d'ordre partielle.

On considère une chaîne S de $\mathbb{P}'$.

3. 2. Soit $x \in \mathbb{P}$, on note $S(x) = \{f(x) \mid f \in S\}$. Montrer que $S(x)$ est une chaîne.

On définit l'application $f_0 : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ de la manière suivante :

$$f_0(x) = \bigsqcup S(x)$$

3. 3. Montrer que f_0 est bien définie et que c'est un majorant de S.

3. 4. Montrer que f_0 est la borne supérieure de S. Conclure.

4. On appelle $(\mathbb{N}_\perp, \preceq)$ le *lift* des entiers dans un CPO :

$$\mathbb{N}_\perp = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \perp \preceq n$$
$$\forall n \neq p \in \mathbb{N},\ n \text{ et } p \text{ ne sont pas comparables}$$

On notera $\mathbb{D}'$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{N}_\perp$ dans $\mathbb{N}_\perp$ et on définit sur $\mathbb{D}'$ la relation $\trianglelefteq$ suivante :

$$f \trianglelefteq g \iff \forall n \in \mathbb{N}_\perp,\ f(n) \leq g(n)$$

4. 1. Vérifier que $(\mathbb{N}_\perp, \preceq)$ est bien un CPO. Que dire de $(\mathbb{D}', \trianglelefteq)$?

Soit la fonction $\Phi : \mathbb{D}' \to \mathbb{D}'$ suivante :

$$(\Phi(f))(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \text{ ou } n = \perp \\ n \times f(n-1) \text{ si } f(n-1) \neq \perp \\ \perp\ \textit{sinon} \end{cases}$$

4. 2. Soit S une chaîne de $\mathbb{D}'$, montrer que $\Phi(S)$ est une chaîne.

4. 3. Montrer que $\Phi(\sqcup S) = \sqcup \Phi(S)$, en déduire que Φ est continue.

4. 4. Appliquer le théorème du point fixe sur les CPO à Φ. A quoi correspond le plus petit point fixe de Φ ?

5. On considère le programme P suivant :

```
while (n>0) do
   p := p * n;
   n := n - 1;
end
```

5. 1. Ecrire la sémantique dénotationelle de ce programme comme point fixe d'une fonction θ (à déterminer).

$$\theta : (\mathsf{Env} \to \mathsf{Env}) \to (\mathsf{Env} \to \mathsf{Env})$$

On considère que l'environnement est réduit à 2 variables dans $\mathbb{N}_\perp$. On note donc $\mathbb{E} = \mathbb{N}_\perp \times \mathbb{N}_\perp$. La sémantique dénotationnelle de P est donc une fonction de $\mathbb{E}' = \mathbb{E} \to \mathbb{E}$.

5. 2. Exprimer θ comme une fonction de $\mathbb{E}' \to \mathbb{E}'$.

5. 3. Utiliser le même raisonnement que dans la question précédente pour montrer que θ est continue, et calculer son plus petit point fixe f_0. Que vaut f_0 dans l'environnement $(p = 1, n = k)$? $(p = k, n = 1)$?

6. Calculez de la même manière les points fixes pour les programmes correspondant à la suite de Fibonacci et à l'algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.