Module Sémantique
TD 2 : Points fixes

Définition 1: *Espace métrique*.
Un espace métrique $(\mathbb{E}, d)$ est un espace $\mathbb{E}$ muni d'une distance d vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{E} \;\; d(x, y) \geq 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{E} \;\; d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y \in \mathbb{E} \;\; d(x, y) = 0 \iff x = y$
4. $\forall x, y, z \in \mathbb{E} \;\; d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

Définition 2: *Suite de Cauchy*.
Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $(\mathbb{E}, d)$ est dite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \mid \forall n, p \geq N, d(u_p, u_n) \leq \epsilon$$

Un espace métrique $(\mathbb{E}, d)$ est dit **complet** si et seulement si toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$ de Cauchy converge dans $\mathbb{E}$.

1. Donner un exemple d'espace métrique. Est-il complet ?

Définition 3: *Fonctions Lipschitziennes*.
Une fonction f sur un espace métrique $(\mathbb{E}, d)$ est dite Lipschitzienne de rapport k si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{E}, \;\; d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$$

2. Donner un exemple de fonction Lipschitzienne.

On note $\mathbb{D} = \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'espace des fonctions des entiers vers les entiers. On définit sur $\mathbb{D}$ une distance d telle que, si g et h sont des fonctions vérifiant

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & g(0) \\ & \vdots & \\ h(N) & = & g(N) \\ h(N+1) & \neq & g(N+1) \end{array}$$

alors $d(g,h) = 1/2^{N+1}$, et si $g = h$ alors $d(g,h) = 0$.

3. Nous allons prouver que $(\mathbb{D}, d)$ est un espace métrique complet.

3. 1. Montrer que $(\mathbb{D}, d)$ est un espace métrique.

3. 2. Nous allons maintenant prouver qu'il est complet.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy sur (D, d).

3.2.1. En utilisant la définition 2, montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ **croissante** telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq g(n),\ \ d(f_p, f_q) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

On définit la fonction $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ F(n) = f_{g(n)}(n)$$

3.2.2. Montrer, par récurrence forte sur n, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq g(n), \forall k \leq n,\ \ F(k) = f_p(k)$$

3.2.3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq g(n), d(F, f_p) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

3.2.4. Montrer que F est la limite de la suite f_n. En déduire que $(\mathbb{D}, d)$ est un espace métrique complet.

Soit $\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ définie par

$$(\Phi\,(f))(n) = \text{if } (n = 0) \text{ then } 1 \text{ else } n \times f(n-1)$$

4. Nous allons montrer que Φ est lipschitzienne.

4. 1. Montrer que si $\forall p \leq n,\ f(p) = g(p)$, alors $\forall q \leq n+1,\ (\Phi(f))(q) = (\Phi(g))(q)$.

4. 2. En déduire que Φ est Lipschitzienne de rapport $1/2$

5. Soit f_0 un élément quelconque de $\mathbb{D}$. Calculer $\Phi^i(f_0)(n)$ pour $i = 1, 2, 3$. Généraliser pour i quelconque. En déduire $\lim\limits_{i\to\infty} \Phi^i(f_0)$

On définit Ψ par

$$\Psi(f)(n) = \text{if } (n = 0) \text{ then } 1 \text{ else } \lfloor \frac{f(n+1)}{n+1} \rfloor$$

6. Ψ est-elle lipschitzienne ? Que dire de $\lim_{n\to\infty} \Psi^n(f_0)$?

7. Nous allons démontrer le théorème suivant :

> **Théorème du point fixe** :
> Si Υ est lipschitzienne de rapport $k < 1$ sur $(\mathbb{E}, d)$ un espace métrique complet, alors il existe un unique F tel que $\Upsilon(F) = F$ et
> $$\forall f_0,\ F = \lim_{n\to\infty} \Upsilon^n(f_0)$$

Soit Υ une fonction Lipschitzienne de rapport $k < 1$ sur un espace métrique complet $(\mathbb{E}, d)$,

7. 1. Montrer que tout point fixe de Υ est unique.

Soit $f_0 \in \mathbb{E}$, on définit la suite $f_n = \Upsilon^n(f_0)$.

7. 2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ d(f_n, f_0) \leq d(f_1, f_0)/(1-k)$

7. 3. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy

7. 4. Conclure la preuve du théorème