

Module Sémantique

TD 5 : Sémantique axiomatique et logique de Hoare

Le but de ce TD est de prouver la validité de programmes TOY vis à vis de leur spécification en utilisant la logique de Hoare. Dans tout ce TD, la notion de validité que nous utiliserons est celle de la validité au sens faible.

1. Prouver la validité de $\{x > 0\} x := x + 1 \{x > 1\}$
2. Prouver la validité de $\{x > a\} x := x + 1 \{x > a + 1\}$
3. Prouver la validité de $\{x > a\} x := x + 1; x := x + x \{x > 2 \cdot a + 2\}$
4. Démontrer formellement que, pour tout prédicat q , on a :

$$\models \{true\} \text{ while } true \text{ do skip end } \{q\}$$

5. Démontrer la validité de $\{true\} \text{ if } (x < 0) \text{ then skip else } x := -x \{x \leq 0\}$
6. Que fait le programme S suivant ?

```
x := a;  
y := b;  
q := 0;  
r := a;  
while (r ≥ b) do  
  q := q + 1;  
  r := r - b  
end
```

Proposer une pré-condition p et une post-condition q , définir l'invariant de la boucle while et démontrer la validité de $\{p\}S\{q\}$.

7. Démontrer la correction du calcul de la factorielle $Fact$:

```
x := n;  
y := 1;  
while (x > 0) do  
  y := y · x;
```

```

  x := x - 1
end

```

8. On définit la **pré-condition la plus faible** d'un programme S pour une post-condition q , notée $wp(S, q)$ par :

1. $\models \{wp(S, q)\} S \{q\}$ (i.e. $wp(S, q)$ est une pré-condition valide pour S et q);
2. $\forall p$, Si $\{p\} S \{q\}$, alors $p \Rightarrow wp(S, q)$.

8. 1. Exprimer $wp(x := e, q)$

8. 2. Exprimer $wp(\text{skip}, q)$

8. 3. Exprimer $wp(\text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2, q)$ et $wp(S_1; S_2, q)$

9. Soit le programme $S :: x := 2 \cdot y; y := y - 1$. Calculer $wp(S, x = y + 5)$.

10. Soit le programme $S :: \text{while } x \neq 0 \text{ do } x := x - 1 \text{ end}$. Calculer $wp(S, x = 0)$.

11. On donne la spécification informelle suivante : On veut un programme TOY qui calcule le n^e nombre de Fibonacci f_n , ($n \geq 0$). On a $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $\forall n, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Spécifier formellement ce problème sous la forme d'une pré-condition p et d'une post-condition q . Proposer un programme S tel que $\models \{p\} S \{q\}$. Inférer $\vdash \{p\} S \{q\}$.