Module Sémantique
TD 1 - bis : Points fixes et CPO

Soit P un ensemble ordonné. Un sous-ensemble S de P est une *chaîne* de P si pour tous $x, y \in S$, soit $x \leq y$, soit $y \leq x$. L'ensemble P est appelé *CPO* (*complete partially ordered set*) si toute chaîne de P a un plus petit majorant (appelé borne supérieure) dans P. On notera $\sqcup$ cette borne supérieure. Soit $F : P \to P$, on note $\text{Fix}(F)$ l'ensemble des points fixes de F, et $\mu(F)$ le plus petit élément de $\text{Fix}(F)$, s'il existe. F est dite continue si, pour toute chaîne S de P, $F(S)$ est une chaîne, et $F(\sqcup S) = \sqcup F(S)$.

8. Soit P un CPO. Montrer que P admet un plus petit élément $\perp$.

Nous allons démontrer le théorème suivant

> **Théorème du point fixe sur les CPO :**
> Toute fonction F continue et monotone sur un CPO admet un plus petit point fixe $\mu(F)$ et
> $$\mu(F) = \bigsqcup \{F^n(\perp) | n \geq 0\}$$

9. Soit P un CPO, et F une application monotone de $P \to P$. On pose

$$\alpha = \bigsqcup \{F^n(\perp) | n \geq 0\}$$

9. 1. Montrer que si F est continue, alors $\alpha \in \text{Fix}(F)$.

9. 2. En déduire que $\alpha = \mu(F)$.

9. 3. Conclure la preuve du théorème du point fixe sur les CPO.

10. On considère maintenant l'espace $\mathbb{D}'$ des fonctions de $(\mathbb{N}_\perp, \preceq)$ dans $(\mathbb{N}_\perp, \preceq)$, avec $\mathbb{N}_\perp = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ et $\preceq$ une relation **réflexive** telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \perp \preceq n$$

$$\forall n \neq p \in \mathbb{N}, \ \ n \text{ et } p \text{ ne sont pas comparables}$$

On définit sur $\mathbb{D}'$ une relation **réflexive** $\trianglelefteq$ telle que :

$$f \trianglelefteq g \iff \forall n \in \mathbb{N}_\perp, \ \ f(n) \preceq g(n)$$

Le but de cette question est de montrer que $(\mathbb{D}', \trianglelefteq)$ est un CPO.

10. 1. Vérifier que $\preceq$ et $\trianglelefteq$ sont bien des relation d'ordre partielles

On considère une chaîne S de $\mathbb{D}'$.

10. 2. Soit $n \in \mathbb{N}_\perp$, montrer que s'il existe une fonction f de S telle que $f(n) \neq \perp$, alors $\forall g \in S,\ g(n) = \perp$ ou $f(n)$.

On définit maintenant la fonction $g_0 : \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$ de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}_\perp,\ g_0(n) = \begin{cases} k \text{ si } \exists f \in S \mid f(n) = k \neq \perp \\ \perp \text{ sinon} \end{cases}$$

10. 3. Montrer que g_0 est bien définie et que c'est une borne supérieure de S.

10. 4. Montrer que $g_0 = \sqcup S$, en déduire que $(\mathbb{D}', \trianglelefteq)$ est un CPO.

Soit la fonction $\Phi : \mathbb{D}' \to \mathbb{D}'$ suivante :

$$(\Phi(f))(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \text{ ou } n = \perp \\ n \times f(n-1) \text{ si } f(n-1) \neq \perp \\ \perp \ sinon \end{cases}$$

11. Nous allons montrer que Φ est continue et croissante.

11. 1. Montrer que Φ est croissante.

11. 2. En déduire que si S est une chaîne, alors $\Phi(S)$ en est aussi une.

11. 3. Montrer que $\Phi(\sqcup S) = \sqcup \Phi(S)$, en déduire que Φ est continue.

11. 4. Appliquer le théorème du point fixe sur les CPO à Φ. A quoi correspond le plus petit point fixe de Φ ?

12. Soit Var un ensemble dénombrable de variables, $Var = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}_\perp\} \approx \mathbb{N}_\perp$ par exemple. Soit $Value = \mathbb{N}_\perp$ l'ensemble des valeurs possibles de ces variables. Un environnement σ est alors une fonction qui à chaque variable associe sa valeur courante ($\perp$ si la variable n'est pas initialisée), donc on peut dire que $\sigma \in \mathbb{D}'$.

On considère maintenant $\mathbb{P}$ l'ensemble des programmes constitués de suites finies d'opérations élémentaires $S = s_1; s_2; ...; s_n$, où chaque opération élémentaire est un modificateur d'environnement ($s_i : \mathbb{D}' \to \mathbb{D}'$).

Le but de cette question est d'exprimer la sémantique opérationnelle des programmes de $\mathbb{P}$ comme le plus petit point fixe d'une fonction de $(\mathbb{P} \times \mathbb{D}' \to \mathbb{D}') \to (\mathbb{P} \times \mathbb{D}' \to \mathbb{D}')$.

On considère l'ordre partiel suivant sur $(\mathbb{P} \times \mathbb{D}' \to \mathbb{D}')$:

$$F \sqsubseteq G \iff \forall S \in \mathbb{P},\ \forall \sigma \in \mathbb{D}',\ F(S, \sigma) \trianglelefteq G(S, \sigma)$$

12. 1. Montrer que $((\mathbb{P} \times \mathbb{D}' \to \mathbb{D}'), \sqsubseteq)$ est un CPO et déterminer son plus petit élément $\perp_{(\mathbb{P} \times \mathbb{D}' \to \mathbb{D}')}$.

On définit maintenant la fonction $\Gamma : (\mathbb{P} \times \mathbb{D}' \to \mathbb{D}') \to (\mathbb{P} \times \mathbb{D}' \to \mathbb{D}')$:

$$\forall F \in (\mathbb{P} \times \mathbb{D}' \to \mathbb{D}'),\ \Gamma(F) : \begin{cases} (\bullet, \sigma) \mapsto \sigma \\ ((s_1; S'), \sigma) \mapsto F(S', (s_1(\sigma))) \end{cases}$$

12. 2. Montrer que Γ est croissante et continue.

12. 3. Appliquer le théorème du point fixe. Que représente le plus petit point fixe de Γ ?

12. 4. Proposer une modification des ensembles et fonctions traités ici pour exprimer la sémantique opérationnelle structurée de TOY comme le plus petit point fixe d'une fonction Γ'.