

Module Sémantique

TD 1 : Points fixes

Définition 1: *Espace métrique.*

Un espace métrique (\mathbb{E}, d) est un espace \mathbb{E} muni d'une distance d vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{E} \quad d(x, y) \geq 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{E} \quad d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y \in \mathbb{E} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$
4. $\forall x, y, z \in \mathbb{E} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

Définition 2: *Suite de Cauchy.*

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur (\mathbb{E}, d) est dite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \mid \forall n, p \geq N, d(u_p, u_n) \leq \epsilon$$

Un espace métrique (\mathbb{E}, d) est dit **complet** si et seulement si toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$ de Cauchy converge dans \mathbb{E} .

1. Donner un exemple d'espace métrique. Est-il complet ?

Définition 3: *Fonctions Lipschitziennes.*

Une fonction f sur un espace métrique (\mathbb{E}, d) est dite Lipschitzienne de rapport k si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{E}, \quad d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$$

2. Donner un exemple de fonction Lipschitzienne.

On note $\mathbb{ID} = \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'espace des fonctions des entiers vers les entiers. On définit sur \mathbb{ID} une distance d telle que, si g et h sont des fonctions vérifiant

$$\begin{aligned} h(0) &= g(0) \\ &\vdots \\ h(N) &= g(N) \\ h(N+1) &\neq g(N+1) \end{aligned}$$

alors $d(g, h) = 1/2^{N+1}$, et si $g = h$ alors $d(g, h) = 0$.

3. Nous allons prouver que (\mathbb{D}, d) est un espace métrique complet.

3. 1. Montrer que (\mathbb{D}, d) est un espace métrique.

3. 2. Nous allons maintenant prouver qu'il est complet.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy sur (D, d) .

3.2.1. En utilisant la définition 2, montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ croissante telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq g(n), d(f_p, f_q) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

On définit la fonction $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F(n) = f_{g(n)}(n)$$

3.2.2. Montrer, par récurrence forte sur n , que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq g(n), \forall k \leq n, F(k) = f_p(k)$$

3.2.3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq g(n), d(F, f_p) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

3.2.4. Montrer que F est la limite de la suite f_n . En déduire que (\mathbb{D}, d) est un espace métrique complet.

Soit $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ définie par

$$(\Phi(f))(n) = \text{if } (n = 0) \text{ then } 1 \text{ else } n \times f(n-1)$$

4. Nous allons montrer que Φ est lipschitzienne.

4. 1. Montrer que si $\forall p \leq n, f(p) = g(p)$, alors $\forall q \leq n+1, (\Phi(f))(q) = (\Phi(g))(q)$.

4. 2. En déduire que Φ est Lipschitzienne de rapport 1/2

5. Soit f_0 un élément quelconque de \mathbb{D} . Calculer $\Phi^i(f_0)(n)$ pour $i = 1, 2, 3$. Généraliser pour i quelconque. En déduire

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi^i(f_0)$$

On définit Ψ par

$$\Psi(f)(n) = \text{if } (n = 0) \text{ then } 1 \text{ else } \lfloor \frac{f(n+1)}{n+1} \rfloor$$

6. Ψ est-elle lipschitzienne ? Que dire de $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(f_0)$?

7. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème du point fixe:

Si Y est lipschitzienne de rapport $k < 1$ sur (\mathbb{E}, d) un espace métrique complet, alors il existe un unique F tel que $Y(F) = F$ et

$$\forall f_0, F = \lim_{n \rightarrow \infty} Y^n(f_0)$$

Soit Y une fonction Lipschitzienne de rapport $k < 1$ sur un espace métrique complet (\mathbb{E}, d) ,

7. 1. Montrer que tout point fixe de Y est unique.

Soit $f_0 \in \mathbb{E}$, on définit la suite $f_n = Y^n(f_0)$.

7. 2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, d(f_n, f_0) \leq d(f_1, f_0)/(1 - k)$

7. 3. En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy

7. 4. Conclure la preuve du théorème