Module Langages Formels
TD 9 : Langages Algébriques et Automates à Pile

Exercice 1

Donner des automates à pile reconnaissant les langages suivants :

1. $L_1 = \{u \in \{a,b\}^*,\ |u|_a = |u|_b\}$
2. $L_2 = \{u \in \{a,b\}^*,\ |u|_a \geq |u|_b\}$
3. $L_3 = \{u \in \{a,b\}^*,\ |u|_a = 2 \cdot |u|_b\}$
4. $L_4 = \{u\#\overline{v},\ u,v \in \{0,1\}^* \text{ et } \exists i \in \mathbb{N},\ u = \mathsf{bin}(i) \text{ et } v = \mathsf{bin}(i+1)\}$

Exercice 2 `Clôture par union dénombrable ?`

Soit $\Sigma = \{a,b\}$ et n un entier positif.

2.1. Donner un automate à pile qui reconnaisse le langage

$$L_n = \{a^m b^k a^m b^k,\ m \geq 1 \text{ et } 1 \leq k \leq n\}$$

2.2. Le langage $L = \cup_{n \geq 1} L_n$ est-il algébrique ?

Exercice 3 `Centre d'un langage algébrique`

On note $<$ la relation « est facteur gauche » (ou préfixe) sur Σ^* et on note $FG(u) = \{v \in \Sigma^* \mid v < u\}$ et $FG(L) = \cup_{u \in L} FG(u)$.

Soit L un langage de Σ^*. On appelle centre de L, et l'on note $c(L)$, l'ensemble des mots infiniment complétables dans L, c'est-à-dire :

$$c(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \forall n \in \mathbb{N},\ \exists v_n \in L \text{ tel que } |v_n| \geq n \text{ et } u < v_n\}.$$

3.1. Calculer $c(a^*)$, $c(a^*b)$, $c(\{a^n b^n \mid n > 0\})$. Montrer que pour tous langages L, L_1 et L_2, $c(L) \subseteq FG(L)$, $c(L_1 \cup L_2) = c(L_1) \cup c(L_2)$ et que $FG(c(L)) = c(L)$.

3.2. Montrer que si $u \in c(L)$, alors il existe une lettre $a \in \Sigma$ telle que $ua \in c(L)$. En déduire que L est infini si et seulement si $c(L)$ est infini, et qu'alors $c(c(L)) = c(L)$.

Soit L un langage algébrique sur Σ, engendré par une grammaire algébrique $G = (\Sigma, V, P, S)$ supposée réduite. On note respectivement $L_G(T)$ et $\hat{L}_G(T)$ les langages sur respectivement Σ^* et $(\Sigma \cup V)^*$ des mots générés par la grammaire G à partir du non-terminal T.

3.3. Montrer que l'on peut calculer l'ensemble $U \subseteq V$ des non-terminaux qui engendrent un langage infini. Montrer que si le mot $uvTw \in \hat{L}_G(T)$ avec $u \in \Sigma^*$ et $T \in U$, alors $u \in c(L)$.

Soit $\bar{U} = \{\bar{T} \mid T \in U\}$ un nouvel ensemble de non-terminaux en bijection avec U. On définit successivement les ensemble de règles :

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\bar{T} \to m_1 \bar{R} m_2 \mid R, T \in U,\ m_1 \in (\Sigma \cup V)^*,\ m_2 \in (\Sigma \cup V \setminus U)^*,\ T \to m_1 R m_2 \in P\}, \\ \bar{P} &= \{\bar{T} \to m_1 \bar{R} \mid \exists m_2\ :\ \bar{T} \to m_1 \bar{R} m_2 \in P_1\} \cup \{\bar{T} \to \varepsilon \mid T \in U\}. \end{aligned}$$

On pose alors $\bar{G} = (\Sigma, V \cup \bar{U}, P \cup \bar{P}, \bar{S})$.

3.4. Montrer que $L_{\bar{G}}(\bar{S}) \subseteq c(L)$.

3.5. Soit $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $V = \{S, R, T, W, Y, Z\}$ et

$$\begin{aligned} P\ :\ & S \to aRcTYW \\ & R \to b \\ & T \to aR \\ & W \to cTb \\ & Y \to aS + dZ \\ & Z \to cdZ + aR. \end{aligned}$$

3.5. 1. Calculer $U, \bar{G}$. Donner un arbre de dérivation de S en $abcabaabcabdcdcdabcabbcabb$ et indiquer sur cet arbre comment on obtient dans $\bar{G}$ le mot $abcabaabcabdcdcd$.

3.5. 2. Donner un exemple de mot de $c(L) \setminus L_{\bar{G}}(\bar{S})$.

3.6. Montrer que si G est sous forme normale presque-Greibach, c'est-à-dire, si tous ses membres droits commencent par une lettre terminale, $c(L) = FG(L_{\bar{G}}(S))$.

3.7. Montrer que si L est un langage algébrique, alors $c(L)$ est également un langage algébrique, et qu'à partir d'une grammaire algébrique engendrant L, on peut effectivement construire une grammaire algébrique engendrant $c(L)$.

3.8. Montrer qu'il existe un théorème analogue pour les langages linéraires (qui ont au plus un non-terminal dans chaque membre droit de leurs règles de production).