Module Langages Formels
TD 4 : Minimisation et Langages Rationnels

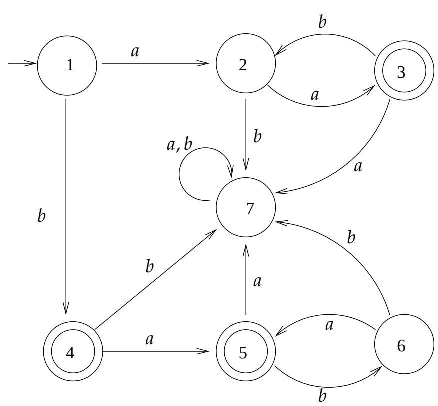
Exercice 1 `Non-cloture de RAT(L)`

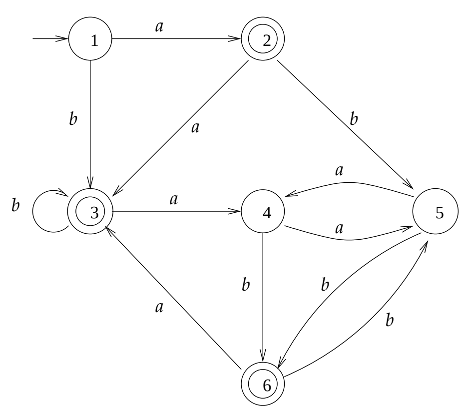
Montrer que pour un langage L rationnel le langage suivant n'est pas nécessairement rationnel.

BORD(L) = $\{w \in \Sigma^*, \exists x, y, z \in \Sigma^*, |x| = |y| = |z|, w = xz \text{ et } xyz \in L\}$

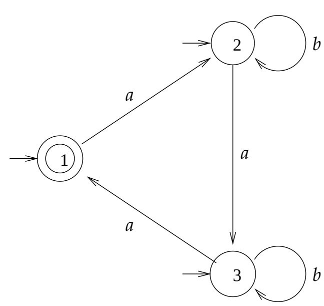
Exercice 2 `Minimisation`

2.1. Minimiser les automates suivants en utilisant l'algorithme vu en cours :





2.2. Déterminiser et minimiser l'automate suivant. A votre avis si on généralise à n états, combien d'états aura le déterminisé ? Le minimal ?



Exercice 3 `Caractérisation de Nérode`

Définition: *Congruences*
Une relation d'équivalence $\equiv$ est une **congruence à droite** ssi $\forall t \in \Sigma^*,\ u \equiv v \Rightarrow ut \equiv vt$. C'est une **congruence à gauche** ssi $\forall t \in \Sigma^*,\ u \equiv v \Rightarrow tu \equiv tv$. On parle de **congruence** si elle est compatible à droite et à gauche.

Une congruence est **d'index fini** ssi l'ensemble de ses classes d'équivalence est fini.

Nous allons prouver le thérorème suivant :

Théorème (Myhill-Nérode) :
Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

1. L est rationnel.
2. L est une union de classes d'une congruence d'index fini.
3. L est une union de classes d'une congruence à droite d'index fini.
4. La relation $\sim_L$ définie par $u \sim_L v \Leftrightarrow \forall t \in \Sigma^*(ut \in L \Leftrightarrow vt \in L)$ est une congruence à droite d'index fini.

3.1. $1 \Rightarrow 2$

Soit un langage L rationnel, reconnu par un automate fini déterministe $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. On définit $u \sim_A v$ par $\forall q \in Q,\ \delta(q, u) = \delta(q, v)$.

3.1. 1. Montrer que $\sim_A$ est une congruence.

On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \Sigma^*/_{\sim_A} & \to & Q^Q \\ \overline{u}^A & \mapsto & (q \mapsto \delta(q, u)) \end{array}$$

3.1. 2. Montrer que φ est injective. En déduire que $\sim_A$ est d'index fini, et que L est l'union de certaines de ses classes d'équivalence.

3.2. $3 \Rightarrow 4$

Soit $\equiv$ la congruence à droite d'index fini donnée par hypothèse. On sait que $L = \bigcup_{x \in X} \overline{x}$.

3.2. 1. Montrer que $\sim_L$ est une congruence à droite.

3.2. 2. Montrer que $\forall u, v \in \Sigma^*,\ u \equiv v \Rightarrow u \sim_L v$. En déduire que $\sim_L$ est d'index fini.

3.3. $4 \Rightarrow 1$

On suppose que $\sim_L$ est une congruence à droite d'index fini, montrer que $u \sim_L v \Leftrightarrow u^{-1}L = v^{-1}L$. En conclure que L est rationnel.

3.4. Utiliser le théorème de Myhill-Nérode pour montrer que $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas rationnel.

Exercice 4 Propriétés de clôture

Montrer que les langages reconnaissables sont stables pour les opérations suivantes :

1. **Shuffle** : Soient $u, v \in \Sigma^*$, on définit l'ensemble des *shuffles* de u et v par :

   $u \bowtie v = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u_1, v_1, \dots u_n, v_n \in \Sigma^* \text{ tels que } u = u_1 \dots u_n, v = v_1 \dots v_n \text{ et } w = u_1 v_1 \dots u_n v_n\}$

   Pour $K, L \subset \Sigma^*$, on définit $K \bowtie L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in K, \exists v \in L, w \in u \bowtie v\}$.
2. **Substitutions** : Une *substitution* est un morphisme de Σ^* dans $\mathcal{P}(\Gamma^*)$. Elle est *rationnelle* si elle est définie par une application σ de Σ dans $\mathsf{Rec}(\Gamma^*)$. Soient Σ et Γ deux alphabets, et $\varphi : \Sigma^* \to \mathcal{P}(\Gamma^*)$ une substitution rationnelle. Montrer que Si $L \in \mathsf{Rec}(\Sigma^*)$, alors $\varphi(L) \in \mathsf{Rec}(\Gamma^*)$.