Module Langages Formels
TD 3 : Langages Rationnels

Exercice 1 `Semi-linéarité`

1.1. Soit $\varphi : \Sigma \to \Gamma^*$ un morphisme (i.e. $\forall u, v \in \Sigma^*,\ \varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$). Montrer que, si $L \in \mathsf{Rat}(\Sigma)$, alors $\varphi(L) \in \mathsf{Rat}(\Gamma)$.

Un ensemble d'entiers est linéaire s'il est de la forme $\{c + ip, i \in \mathbb{N}\}$. Un ensemble est semi-linéaire s'il est réunion finie d'ensembles linéaires.

1.2. Soit $L \subseteq a^*$ un langage rationnel, montrer que $\{i,\ a^i \in L\}$ est semi-linéaire.

1.3. En déduire que pour tout langage L rationnel, l'ensemble $\lambda(L) = \{|w|, w \in L\}$ est semi-linéaire.

Exercice 2 `Non équivalence des Lemmes d'itération`

Dans cet exercice, nous allons considérer les trois versions du Lemme de l'étoile :

1. Si L est un langage reconnu par automate fini, alors
$$\exists n \in \mathbb{N}\ \ \forall u \in L,\ |u| \geq n\ \ \exists v, t, w \in \Sigma^* \quad u = vtw,\ |t| > 0,\ \forall m \in \mathbb{N}\ vt^m w \in L$$
2. Si L est un langage reconnu par automate fini, alors
$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall \omega = rus \in L,\ |u| \geq n\ \exists v, t, w \in \Sigma^* \quad u = vtw,\ |t| > 0,\ \forall m \in \mathbb{N}\ rvt^m ws \in L$$
3. Si L est un langage reconnu par automate fini, alors
$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall u = ru_1u_2 \ldots u_n s \in L,\ |u_i| \geq 1\ \exists 1 \leq i < j \leq n \quad \forall m \in \mathbb{N}\ ru_1 \ldots u_{i-1}(u_i \ldots u_j)^m u_{j+1} \ldots u_n s \in L$$

2.1. Soit $L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b\}$, montrer que L vérifie le Lemme 1 mais pas le Lemme 2.

2.2. Soit $L' = \{(ab)^n(cd)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \Sigma^*(aa + bb + cc + dd + ac + bd)\Sigma^*$, avec $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Montrer que L' vérifie le Lemme 2 mais pas le Lemme 3.

Exercice 3 `Langages rationnels`

3.1. Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ. Montrer que les langages suivants sont rationnels.

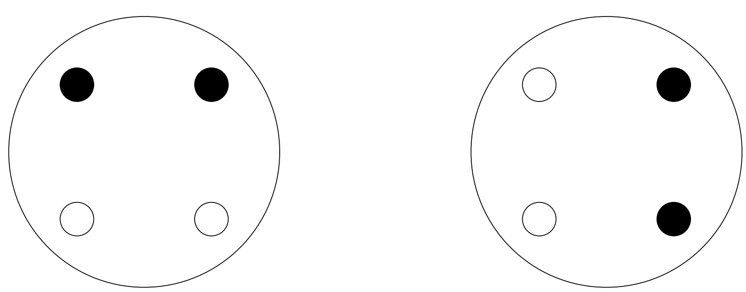
1. CYCLE(L) = $\{x_1x_2,\ x_1, x_2 \in \Sigma^*$ et $x_2x_1 \in L\}$
2. INIT(L) = $\{x \in \Sigma^*,\ \exists y \in \Sigma^*,\ xy \in L\}$
3. MAX(L) = $\{x \in L,\ \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
4. MIN(L) = $\{x \in L$, aucun préfixe propre de x n'est dans $L\}$
5. $\overline{L} = \{x, \overline{x} \in L\}$
6. $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^*,\ \exists\ y \in \Sigma^*$ avec $xy \in L$ et $|y| = |x|\}$
7. SQRT(L) = $\{x \in \Sigma^*,\ \exists\ y \in \Sigma^*$ avec $xy \in L$ et $|y| = |x|^2\}$

3.2. Montrer que pour un langage L rationnel le langage suivant n'est pas nécessairement rationnel.

BORD(L) = $\{w \in \Sigma^*, \exists x, y, z \in \Sigma^*, |x| = |y| = |z|, w = xz$ et $xyz \in L\}$

Exercice 4 `Le barman aveugle`

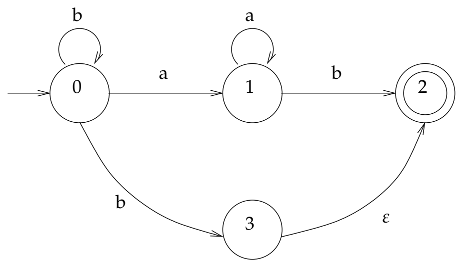
On dispose de 4 jetons, chacun ayant une face bleue et une face rouge. Un joueur (le barman) a les yeux bandés. Son but est de retourner les 4 jetons sur la même couleur (dès que les 4 jetons sont retournés, la partie s'arrête et le barman a gagné). Pour cela, il peut retourner à chaque tour 1,2 ou 3 jetons. Un autre joueur perturbe le jeu en tournant le plateau sur lequel reposent les jetons d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour entre chaque opération du barman. En utilisant une modélisation par des automates, montrer que le barman a une stratégie gagnante, c'est-à-dire que quoi que fasse le tourneur de plateau, il a moyen de gagner.



Exercice 5 `La méthode de Thompson`

On décide d'ajouter aux automates non déterministes la possibilité d'utiliser des ε-transitions. ε est une étiquette de transition qui correspond au mot vide.

Par exemple, $b \in \mathcal{L}(A)$, avec A l'automate ci-dessous.



5.1. Proposer un algorithme de déterminisation des automates finis à ε-transitions et l'appliquer sur l'exemple ci-dessus.

5.2. Montrer que tout automate fini non déterministe est équivalent à un automate fini non déterministe ayant un unique état initial et un unique état final.

5.3. Soient A et B deux automates finis. Construire des automates reconnaissant

1. $\mathcal{L}(A).\mathcal{L}(B)$
2. $\mathcal{L}(A) \cup \mathcal{L}(B)$
3. $\mathcal{L}(A)^*$