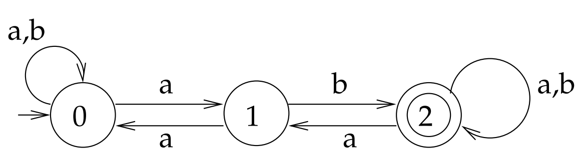
Module Langages Formels
TD 2 : Langages Rationnels et Automates

Exercice 1
Ecrire un automate déterministe qui reconnaît les entiers écrits en base 2 qui sont congrus à 1 modulo 3.

Exercice 2 `Langages Rationnels`
Parmi les langages suivants lesquels sont reconnaissables ? Justifiez vos réponses.

1. $\{a^{2n},\ n \geq 0\}$
2. $\{a^m b^n a^{m+n},\ m \geq 0$ et $n \geq 0\}$
3. L'ensemble des mots qui n'ont pas trois a consécutifs
4. L'ensembles des mots qui ont un nombre égal de a et de b
5. L'ensemble des mots qui sont des palindromes sur $\Sigma = \{a, b\}$
6. $\{uv\overline{u} \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$ où $\overline{u}$ est le miroir de u, $\overline{abb} = bba$
7. $\{u\overline{u}v \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$
8. $\{a^i b^j, \text{pgcd}(i, j) = 1\}$
9. $\{a^i b^j, i \geq j\}$

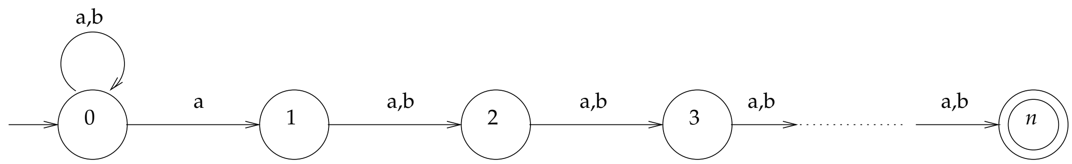
Exercice 3 `Déterminisation`
3.1. Déterminiser l'automate suivant :



3.2. Nous allons maintenant calculer la complexité de la déterminisation d'un automate en fonction de son nombre d'états.

3.2. 1. Soit un automate $A = (Q, \Sigma, Q_0, F, \delta)$ fini. A votre avis, quel sera, au pire, le nombre d'états d'un automate fini déterministe $B = (Q', \Sigma, Q'_0, F', \delta')$ reconnaissant le même langage que A (en fonction de $|Q|$).

3.2. 2. Considérons l'automate A suivant, qui reconnaît l'ensemble des mots de $\{a,b\}^*$ dont la n^e lettre en partant de la fin est un a (on suppose $n > 0$) :



3.2.2.1. Combien d'états environ comporte l'automate déterminisé reconnaissant le même langage que A (en utilisant l'algorithme vu en cours sur des exemples) ?

Soit $B = (Q, \Sigma = \{a,b\}, q_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe reconnaissant le même langage que A.

3.2.2.2. Montrer que B est complet (i.e. si $u \in \Sigma^*$, alors $\delta(q_0, u)$ existe).

3.2.2.3. Prouver que la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \Sigma^{n-1} & \to & Q \\ u & \mapsto & q_u = \delta(q_0, u) \end{array}$ est injective. En conclure que la déterminisation de A est au mieux exponentielle en nombre d'états.

Exercice 4 `Caractérisation des langages rationnels`

4.1. Soit L un langage rationnel. Montrer qu'il existe $N > 0$ tel que

$$\forall u \in \Sigma^*, |u| \geq N, \exists x,y,z \in \Sigma^*, |y| \geq 1, u = xyz,$$
$$\forall i \geq 0,\ \forall v \in \Sigma^*,\ (uv \in L \iff xy^izv \in L)$$

4.2. Soit un langage $L \subseteq \Sigma^*$ tel qu'il existe $N > 0$ tel que

$$\forall u \in \Sigma^*, |u| \geq N, \exists x,y,z \in \Sigma^*, |y| \geq 1, u = xyz,$$
$$\forall i \geq 0,\ \forall v \in \Sigma^*,\ (uv \in L \iff xy^izv \in L)$$

Montrer que L est rationnel. On pourra construire un automate $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tel que $Q = \{q_w \mid |w| < N\}$ qui reconnait L.