

# Module Langages Formels

## TD 1 : Mots et langages

### Exercice 1 Mots multiplicativement dépendants

Deux mots  $u$  et  $v$  sont dits **multiplicativement dépendants** s'ils sont puissances d'un même troisième, c'est à dire s'il existe un mot  $w$  et deux entiers  $m$  et  $n$  tels que

$$u = w^n \text{ et } v = w^m$$

Deux mots  $u$  et  $v$  sont dits **commutatifs** si  $uv = vu$ .

1.1. Donner un exemple de deux mots commutatifs de longueur supérieure à 2

1.2. Prouver la proposition suivante :

**Proposition :**

Deux mots  $u$  et  $v$  commutent si et seulement si ils sont multiplicativement dépendants.

### Exercice 2 Codes

On appelle **code** sur un alphabet  $\Sigma$  tout langage  $X$  sur  $\Sigma$  tel que  $x_1x_2 \dots x_p = y_1y_2 \dots y_q$  et  $x_i \in X$  pour tout  $i$  et  $y_j \in X$  pour tout  $j$  entraînent  $p = q$  et  $x_i = y_i$  pour tout  $i$ . Dire que  $X$  est un code revient donc à dire que tout élément de  $X^*$  se factorise de manière unique sur  $X$ .

2.1. Les langages suivants sont-ils des codes ?

- $X_1 = \{ab, baa, abba, aabaa\}$
- $X_2 = \{b, ab, baa, abaa, aaaa\}$
- $X_3 = \{aa, ab, aab, bba\}$
- $X_4 = \{a, ba, bba, baab\}$

2.2. Soit  $u$  un mot de  $\Sigma^*$ , montrer que la partie  $\{u\}$  est un code si et seulement si  $u \neq \epsilon$ .

2.3. Soient  $u$  et  $v$  deux mots distincts de  $\Sigma^*$ , montrer que la partie  $\{u, v\}$  est un code si et seulement si  $u$  et  $v$  ne commutent pas.

2.4. Soit  $X$  une partie de  $\Sigma^*$  ne contenant pas  $\epsilon$  et telle qu'aucun mot de  $X$  ne soit préfixe propre d'un autre mot de  $X$ . Montrer que  $X$  est un code (un tel code est appelé code préfixe).

### Exercice 3 Résiduels

Soit  $L$  un langage sur un alphabet  $\Sigma$ , et soit  $u$  un mot sur  $\Sigma$ . On appelle **résiduel à gauche** de  $L$  par rapport à  $u$ , et on note  $u^{-1}L$  l'ensemble des mots  $v$  sur  $\Sigma$  tels que  $uv \in L$ .

3.1. Calculer le résiduel de  $L$  par rapport à tout mot  $u$  sur  $\Sigma = \{a, b\}$  dans les exemples suivants :

- $L = a^*b^*$
- $L' = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

3.2. Si  $x$  est une lettre de  $\Sigma$ , que valent  $x^{-1}(L_1 \cup L_2)$ ,  $x^{-1}(L_1 L_2)$  et  $x^{-1}L_1^*$  où  $L_1$  et  $L_2$  sont deux langages sur  $X$  ?