

Module Langages Formels

TD 9 : Propriétés des Langages Algébriques

Exercice 1 Clôture par complémentaire ?

Montrer que le langage $L = \{ww, w \in \{a,b\}^*\}$ n'est pas algébrique alors que son complémentaire l'est. Donner un automate à pile.

Exercice 2 Mélange de Langages

Soit Σ un alphabet fini. Soient u et v deux mots sur Σ^* . On appelle mélange des mots u et v , et l'on note $\text{Mel}(u, v)$ l'ensemble des mots de Σ^* défini par :

- si $u = \varepsilon$, $\text{Mel}(u, v) = \{v\}$
- si $v = \varepsilon$, $\text{Mel}(u, v) = \{u\}$
- si $u = xu'$ et $v = yv'$ avec $x, y \in \Sigma$, $\text{Mel}(u, v) = x.\text{Mel}(u', v) \cup y.\text{Mel}(u, v')$

Si L et L' sont deux langages, on définit $\text{Mel}(L, L') = \bigcup_{u \in L, v \in L'} \text{Mel}(u, v)$

2.1. On prend $\Sigma = \{a, b\}$ et l'on considère les deux langages $L = (aa)^*$ et $L' = (bbb)^*$. Montrer que $\text{Mel}(L, L')$ est rationnel.

2.2. Le mélange de deux langages rationnels est-il toujours rationnel ?

2.3. Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$. On considère $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et $L' = c^*$. Montrer que $\text{Mel}(L, L')$ est algébrique.

2.4. Montrer que le mélange d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est algébrique.

2.5. Qu'en est-il du mélange de deux langages algébriques ?

Exercice 3 Langages algébriques sur un seul caractère

Montrer que tout langage algébrique L sur l'alphabet $\{a\}$ est rationnel.

