

Module Langages Formels

TD 8 : Langages Algébriques et Automates à Pile

Exercice 1

Donner des automates à pile reconnaissant les langages suivants :

1. $L_1 = \{u \in \{a, b\}^*, |u|_a = |u|_b\}$
2. $L_2 = \{u \in \{a, b\}^*, |u|_a \geq |u|_b\}$
3. $L_3 = \{u \in \{a, b\}^*, |u|_a = 2 \cdot |u|_b\}$
4. $L_4 = \{u\#\bar{v}, u, v \in \{0, 1\}^* \text{ et } \exists i \in \mathbb{N}, u = \text{bin}(i) \text{ et } v = \text{bin}(i + 1)\}$

Exercice 2 Clôture par union dénombrable ?

Soit $\Sigma = \{a, b\}$ et n un entier positif.

2.1. Donner un automate à pile qui reconnaisse le langage

$$L_n = \{a^m b^k a^m b^k, m \geq 1 \text{ et } 1 \leq k \leq n\}$$

2.2. Le langage $L = \cup_{n \geq 1} L_n$ est-il algébrique ?

Exercice 3 Clôture par intersection ? Morphisme ?

3.1. Montrer que si L et L' sont des langages algébriques, $L \cap L'$ n'en est pas nécessairement un.

3.2. Soit L un langage algébrique et R un langage rationnel. Montrer que $L \cap R$ est algébrique.

3.3. Soit $\varphi : \Sigma \mapsto \Gamma^*$ un morphisme. Montrer que si $L \in \text{Alg}(\Sigma)$, alors $\varphi(L) \in \text{Alg}(\Gamma)$.

Exercice 4 Clôture par complémentaire ?

Montrer que le langage $L = \{ww, w \in \{a,b\}^*\}$ n'est pas algébrique alors que son complémentaire l'est. Donner un automate à pile.