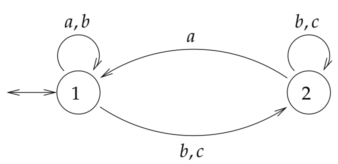
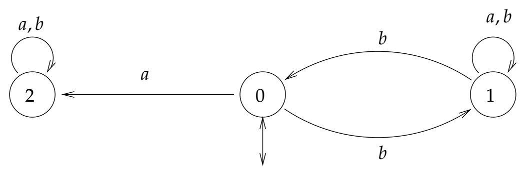
Module Langages Formels
TD 11 : Automates de Büchi, Muller et Rabin

Exercice 1 `Déterminisation`

1.1. Donnez les automates de Rabin correspondant aux automates de Büchi non-déterministes suivants :





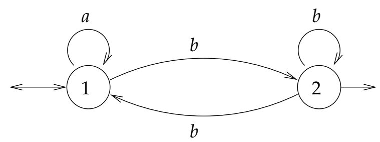
On rappelle que l'algorithme de Safra construit incrémentalement l'automate de Rabin A correspondant à un automate de Büchi $B = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$. A chaque étape, on construit l'image d'un noeud T de l'automate de Rabin pour une transition par la lettre a de la manière suivante :

1. On fait l'image des étiquettes de chaque noeud de T par a en effaçant les marquages et en conservant les numéros pour obtenir T_1.
2. On ajoute à chaque noeud R de T_1 un fils à droite dont l'étiquette est l'intersection de l'étiquette de R avec F, et qui porte un nouveau numéro (le plus petit non attribué). On obtient T_2.
3. Dans l'étiquette de chaque noeud de T_2, on supprime les états de B qui apparaissent dans l'étiquette d'un de ses frères de gauche. On obtient T_3.
4. Dans T_3, on supprime tous les noeuds ayant une étiquette vide. On obtient T_4.
5. Dans T_4, on marque tous les noeuds dont l'étiquette est égale à l'union des étiquettes de ses fils, puis on les efface.

L'état initial de A est le suivant :
- Si $I \subseteq F$, alors c'est l'arbre réduit au noeud d'étiquette I, que l'on marque ;
- Si $I \cap F = \emptyset$, alors c'est l'arbre réduit au noeud d'étiquette I, non marqué ;
- Sinon, c'est l'arbre dont la racine est le noeud d'étiquette I, ayant un fils marqué d'étiquette $I \cap F$.

Les ensembles d'acceptations sont les suivants : Pour chaque numéro i utilisé dans au moins un noeud de A, on construit l'ensemble (L_i, U_i) où
- L_i est l'ensemble des noeuds de A où i n'apparaît pas ;
- U_i est l'ensemble des noeuds de A où i est marqué.

1.2. Donnez l'automate de Rabin correspondant à l'automate de Büchi non-déterministe suivant :



1.3. Que dire de la "déterminisation" de Büchi en Rabin lorsque tous les états de l'automate de Büchi sont terminaux ?

Exercice 2 * `Automates de Muller à table entièrement définie`

Définition: *Automates de Muller à table entièrement définie*
Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, i, \mathcal{T})$ un automate de Muller. On dit que la table $\mathcal{T}$ est *entièrement définie* si pour tout $T \in \mathcal{T}$ admissible et pour tout $T' \supseteq T$ admissible, $T' \in \mathcal{T}$.

Le but de l'exercice est de prouver qu'un automate de Muller est équivalent à un automate de Büchi déterministe si et seulement si sa table est entièrement définie.

Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, i, \mathcal{T})$ un automate de Muller à table entièrement définie,

2.1. Construire un automate de Büchi déterministe reconnaissant le même langage que $\mathcal{A}$ (On pourra l'écrire $\mathcal{B} = (\mathcal{P}(Q) \times Q, A, \delta, (\emptyset, i), F)$).

Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, i, \mathcal{T})$ un automate de Muller reconnaissant le même langage $\overrightarrow{L}$ (rappel : $\overrightarrow{L} = \{u \in A^\omega,\ u$ a un nombre infini de préfixes dans $L\}$) qu'un automate de Büchi déterministe $\mathcal{B}$ (c'est possible car les automates de Muller sont plus expressifs). Soient T et T' deux ensembles admissibles d'états de Q tels que $T \in \mathcal{T}$ et $T \subseteq T'$.

2.2. Soit $t \in T$, montrer qu'il existe un mot fini u et un mot infini v tels que $E^*(i, u) = t$ et le chemin défini par v à partir de t visite infiniment souvent les états de T et n'en visite aucun autre.

2.3. Soit v_0 un préfixe de v tel que $uv_0 \in L$, on note $q_1 = E^*(i, uv_0)$. Montrer qu'il existe $u_1 \in A^*$ tel que $E^*(q_1, u_1) = t$ et le chemin défini par u_1 à partir de q_1 passe au moins une fois par chaque état de T' et ne sort pas de T'.

2.4. Construire un mot infini w tel que $w \in \overrightarrow{L}$ et $\mathsf{Inf}(w) = T'$. Conclure.

Exercice 3 Décidabilité du déterminisme

3.1. Construire des automates de Büchi $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ reconnaissant respectivement les langages $L_1 = (\{b,c\}^*a \cup b)^\omega$ et $L_2 = (a\{b,c\}^* \cup b)^\omega$.

3.2. Peut-on déterminer si L_1 et L_2 sont reconnaissables par des automates de Büchi déterministes ?

3.3. Proposer un algorithme permettant de décider si un langage reconnaissable de A^ω est déterministe.

Exercice 4 D'autres propriétés décidables ?

Est-il possible de décider

1. du vide d'un langage reconnaissable de A^ω ?
2. de l'inclusion de deux langages reconnaissables de A^ω ?
3. de l'égalité de deux langages reconnaissables de A^ω ?

Exercice 5 Jeux Π_2

Il existe une classification des ensembles de mots infinis, donc des langages de mots infinis, et donc des jeux à deux joueurs : la hiérarchie de Borel.

On considère un alphabet Σ et Σ^ω l'ensemble des mots infinis sur Σ. On définit alors de manière récursive la hiérarchie de Borel sur Σ^ω de la manière suivante :

1. On note Σ_1 l'ensemble des ouverts de Σ^ω ;
2. On construit ensuite

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \{X^C \mid X \in \Sigma_i\} \\ \Delta_i &= \Sigma_i \cap \Pi_i \\ \Sigma_{i+1} &= \{\textstyle\bigcup_{k \geq O} X_k \mid X_k \in \Pi_i\} \end{aligned}$$

Les jeux que l'on classifie de Π_2 sont donc les jeux correspondant à un ensemble de mots infinis qui est une intersection dénombrable d'ouverts de Σ^ω. On peut démontrer que ces ensembles sont exactement les ensembles de mots $\overrightarrow{X}$, où $\overrightarrow{X}$ désigne l'ensemble des mots infinis ayant une infinité de préfixes dans X.

Le but de cet exercice est de démontrer que les jeux Π_2 sont déterminés en montrant l'existence d'une stratégie gagnante pour l'un des joueurs.

Considérons donc le jeu X avec $X = \overrightarrow{L}$ ($L \subset \Sigma^*$), et notons D l'ensemble des positions gagnantes pour le joueur II.

Soit $x \in L \setminus D$, montrer que le joueur I a une stratégie gagnante à partir de x.