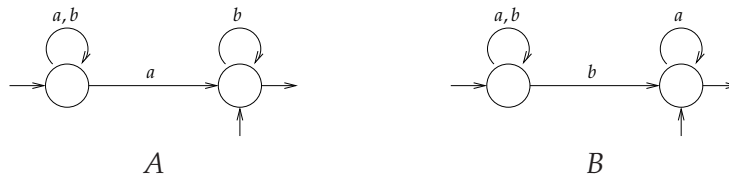


Module Langages Formels

TD 10 : Mots Infinis

Exercice 1 Reconnaissance de Büchi et Langages Rationnels

On considère les deux automates suivants :



1.1. Quels sont les langages qu'ils reconnaissent, au sens de Büchi ?

1.2. Déterminer les automates A et B . Quels sont les langages de mots finis qu'ils reconnaissent ?

Exercice 2 Prédiction des mots univers

Dans tout cet exercice, on considèrera l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Définition: Automate de prédiction

Un automate de prédiction \mathcal{A} (sur l'alphabet Σ) est un quintuplet $(Q, q_0, Q_a, Q_b, \delta)$ où

- Q est un ensemble fini (les états de \mathcal{A})
- $q_0 \in Q$ est l'état initial
- $Q_a \subseteq Q$
- $Q_b \subseteq Q$
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ est la fonction de transition de \mathcal{A}

(on peut voir ces automates comme des automates finis déterministes ayant deux ensembles d'états terminaux)

Définition: Parcours d'un mot

Soit \mathcal{A} un automate de prédiction et w un mot infini sur Σ . Le *parcours de w sur \mathcal{A}* est défini

comme étant la suite $(q(w)_i)_{i \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans Q avec

$$\begin{aligned} & q(w)_0 = q_0 \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, & q(w)_{n+1} = \delta(q(w)_n, w_n) \end{aligned}$$

Définition: Prédiction

Soit w un mot infini sur Σ et \mathcal{A} un automate de prédiction. On dira que l'automate \mathcal{A} *prédit* le mot infini w si le parcours de w sur \mathcal{A} passe un nombre infini de fois par des états de $Q_a \cup Q_b$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} q(w)_n \in Q_a & \Rightarrow w_n = a \quad \text{et} \\ q(w)_n \in Q_b & \Rightarrow w_n = b \end{aligned}$$

De plus, un mot infini sur Σ est dit *prédictible* s'il existe un automate de prédiction \mathcal{A} qui prédise w .

Intuitivement, la prédiction d'un mot w par l'automate \mathcal{A} signifie que lorsque l'on atteint un état de Q_a (en lisant un préfixe de w) la prochaine lettre de w que l'on va lire sera un a (et symétriquement pour b).

Définition: Mots univers

Un mot infini w sur Σ est dit *univers* si tout mot fini x de Σ^* est un facteur de w .

On se propose de montrer le résultat suivant

Proposition :

Un mot infini w est *prédictible* si et seulement si il n'est pas *univers*.

2.1. Montrer que dans un mot univers w , tout mot fini $x \in \Sigma^*$ apparaît un nombre infini de fois comme facteur de w et que tous ses suffixes (les suites $(w_i)_{i \geq k}$) sont également univers.

2.2. Montrer que tout mot infini qui n'est pas univers est prédictible (on pourra considérer un plus court mot de Σ^* qui n'apparaît qu'un nombre fini de fois dans w).

On suppose maintenant que l'on a un mot w qui est prédit par un automate \mathcal{A} . On veut montrer que w n'est pas univers.

2.3. Montrer que l'on peut se ramener (quitte à considérer un suffixe de w et un sous-automate de \mathcal{A}) à une situation où le parcours de w sur \mathcal{A} passe une infinité de fois par tous les états de \mathcal{A} .

On suppose que l'on est dans la situation décrite dans la question précédente.

2.4. Montrer qu'il existe un entier d tel que pour tout état q de \mathcal{A} , il existe un mot $x_q \in \Sigma^*$ de longueur d qui n'est jamais lu dans le parcours de w sur \mathcal{A} à partir de q .

C'est-à-dire que pour tout i , si $q(w)_i = q$ alors le mot $w_i w_{i+1} \dots w_{i+d-1}$ est différent de x_q .

2.5. En déduire qu'il existe un entier K tel que pour tout $n \geq 1$, le nombre de facteurs distincts de longueur nd dans w est inférieur à $K(2^d - 1)^n$.

2.6. Conclure.

Exercice 3 Pour les rapides

Soit $\varphi : \Sigma \rightarrow \Gamma^+$ un morphisme.

3.1. Montrer que si L est un langage rationnel sur Γ^* , alors $\varphi^{-1}(L)$ est un langage rationnel sur Σ^* .

On étend maintenant ce morphisme à Σ^ω et Γ^ω .

3.2. Que dire de $\varphi^{-1}(L)$ si L est reconnaissable par automates de Büchi ?