Module Langages Formels
TD 8 : Langages Algébriques et Mots Infinis

Exercice 1 `Mélange de Langages`

Soit Σ un alphabet fini. Soient u et v deux mots sur Σ^*. On appelle mélange des mots u et v, et l'on note $\text{Mel}(u,v)$ l'ensemble des mots de Σ^* défini par :
– si $u = \varepsilon$, $\text{Mel}(u,v) = \{v\}$
– si $v = \varepsilon$, $\text{Mel}(u,v) = \{u\}$
– si $u = xu'$ et $v = yv'$ avec $x, y \in \Sigma$, $\text{Mel}(u,v) = x.\text{Mel}(u',v) \cup y.\text{Mel}(u,v')$
Si L et L' sont deux langages, on définit $\text{Mel}(L,L') = \bigcup_{u\in L, v\in L'} \text{Mel}(u,v)$

1.1. On prend $\Sigma = \{a,b\}$ et l'on considère les deux langages $L = (aa)^*$ et $L' = (bbb)^*$. Montrer que $\text{Mel}(L,L')$ est rationnel.

1.2. Le mélange de deux langages rationnels est-il toujours rationnel ?

1.3. Soit $\Sigma = \{a,b,c\}$. On considère $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et $L' = c^*$. Montrer que $\text{Mel}(L,L')$ est algébrique.

1.4. Montrer que le mélange d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est algébrique.

1.5. Qu'en est-il du mélange de deux langages algébriques ?

Exercice 2 `Prédiction des mots univers`

Dans tout cet exercice, on considèrera l'alphabet $\Sigma = \{a,b\}$.

Définition: *Automate de prédiction*
Un *automate de prédiction* $\mathcal{A}$ (sur l'alphabet Σ) est un quintuplet $(Q, q_0, Q_a, Q_b, \delta)$ où
– Q est un ensemble fini (les états de $\mathcal{A}$)
– $q_0 \in Q$ est l'état initial
– $Q_a \subseteq Q$
– $Q_b \subseteq Q$
– $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est la fonction de transition de A

(on peut voir ces automates comme des automates finis déterministes ayant deux ensembles d'états terminaux)

Définition: *Parcours d'un mot*
Soit $\mathcal{A}$ un automate de prédiction et w un mot infini sur Σ. Le *parcours de w sur $\mathcal{A}$* est défini comme étant la suite $(q(w)_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans Q avec

$$\begin{aligned} & q(w)_0 = q_0 \\ \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad & q(w)_{n+1} = \delta(q(w)_n, w_n) \end{aligned}$$

Définition: *Prédiction*
Soit w un mot infini sur Σ et $\mathcal{A}$ un automate de prédiction. On dira que l'automate $\mathcal{A}$ *prédit* le mot infini w si le parcours de w sur $\mathcal{A}$ passe un nombre infini de fois par des états de $Q_a \cup Q_b$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} q(w)_n \in Q_a \quad &\Rightarrow \quad w_n = a \quad \text{et} \\ q(w)_n \in Q_b \quad &\Rightarrow \quad w_n = b \end{aligned}$$

De plus, un mot infini sur Σ est dit *prédictible* s'il existe un automate de prédiction $\mathcal{A}$ qui prédise w.

Intuitivement, la prédiction d'un mot w par l'automate $\mathcal{A}$ signifie que lorsque l'on atteint un état de Q_a (en lisant un préfixe de w) la prochaine lettre de w que l'on va lire sera un a (et symétriquement pour b).

Définition: *Mots univers*
Un mot infini w sur Σ est dit *univers* si tout mot fini x de Σ^* est un facteur de w.

On se propose de montrer le résultat suivant

Proposition :
Un mot infini w est *prédictible* si et seulement si il n'est pas *univers*.

2.1. Montrer que dans un mot univers w, tout mot fini $x \in \Sigma^*$ apparaît un nombre infini de fois comme facteur de w et que tous ses suffixes (les suites $(w_i)_{i\geq k}$) sont également univers.

2.2. Montrer que tout mot infini qui n'est pas univers est prédictible (on pourra considérer un plus court mot de Σ^* qui n'apparaît qu'un nombre fini de fois dans w).

On suppose maintenant que l'on a un mot w qui est prédit par un automate $\mathcal{A}$. On veut montrer que w n'est pas univers.

2.3. Montrer que l'on peut se ramener (quitte à considérer un suffixe de w et un sous-automate de $\mathcal{A}$) à une situation où le parcours de w sur $\mathcal{A}$ passe une infinité de fois par tous les états de $\mathcal{A}$.

On suppose que l'on est dans la situation décrite dans la question précédente.

2.4. Montrer qu'il existe un entier d tel que pour tout état q de $\mathcal{A}$, il existe un mot $x_q \in \Sigma^*$ de longueur d qui n'est jamais lu dans le parcours de w sur $\mathcal{A}$ à partir de q.

C'est-à-dire que pour tout i, si $q(w)_i = q$ alors le mot $w_i w_{i+1} \dots w_{i+d-1}$ est différent de x_q.

2.5. En déduire qu'il existe un entier K tel que pour tout $n \geq 1$, le nombre de facteurs distincts de longueur nd dans w est inférieur à $K(2^d - 1)^n$.

2.6. Conclure.

Exercice 3 `Pour les rapides`

Soit $\varphi : \Sigma \to \Gamma^+$ un morphisme.

3.1. Montrer que si L est un langage rationnel sur Γ^*, alors $\varphi^{-1}(L)$ est un langage rationnel sur Σ^*.

On étend maintenant ce morphisme à Σ^ω et Γ^ω.

3.2. Que dire de $\varphi^{-1}(L)$ si L est reconnaissable par automates de Büchi ?