Module Langages Formels
TD 6 : Lemme de l'étoile et Lemme d'Ogden

Exercice 1 `Lemme de l'étoile`

Montrer que les langages suivants ne sont pas algébriques.

1. $L_1 = \{a^i b^j c^k,\ i < j < k\}$;
2. $L_2 = \{a^n b^n c^m,\ n \leq m \leq 2n\}$;
3. $L_3 = \{a^{2^n},\ n \geq 0\}$;
4. $L_4 = \{a^{n^2},\ n \geq 0\}$;

Exercice 2 `Lemme d'Ogden`

L'objectif de cet exercice est de montrer une version plus forte du lemme de l'étoile pour les langages algébriques :

> **Lemme (Ogden)** :
> Soit L un langage algébrique. Il existe un entier N tel que pour tout mot $z \in L$ dans lequel on marque au moins N positions distinctes, il est possible de décomposer z sous la forme $z = uxvyw$ avec
> – x ou y contient au moins une position marquée,
> – xvy contient au plus N positions marquées,
> – pour tout $i \geq 0$, $ux^ivy^iw \in L$.

2.1. On se donne une grammaire algébrique propre G engendrant un langage L. Montrer qu'il existe une grammaire sous forme normale de Chomsky (CNF) reconnaissant le langage $L - \{\varepsilon\}$.

Rappel : Une grammaire CNF est une grammaire où les productions sont toutes de la forme

$$A \rightarrow BC \quad \text{ou} \quad A \rightarrow a$$

Définition:
Soit T un sous-arbre d'un arbre de dérivation selon une grammaire CNF. On suppose marquées certaines feuilles de T. On appelle *embranchement* un nœud de T ayant deux fils, tel que chacun de ses fils contienne au moins une feuille marquée.

2.2. Soit T un sous-arbre d'un arbre de dérivation selon une grammaire CNF. On suppose qu'au moins 2^h feuilles distinctes de T ont été marquées.

Montrer qu'il existe un chemin, d'une feuille à la racine, passant par au moins h embranchements et tel que pour tout i, le i-ème embranchement ait au plus 2^i descendants marqués.

2.3. On considère une grammaire CNF G engendrant le langage L. Montrer qu'il existe un entier N tel que :
– pour tout mot $w \in L$ dans lequel on marque au moins N positions,
– pour tout arbre de dérivation de w,
il existe deux embranchements b_1 et b_2 tels que
- b_1 est un ancêtre de b_2,
- b_1 est un ancêtre d'au plus N feuilles marquées,
- b_1 et b_2 sont étiquetés par la même variable.

2.4. En déduire le lemme d'Ogden.

2.5. On s'intéresse au langage $L_5 = \{a^i b^j c^k d^l \quad | \quad i = 0 \quad \text{ou} \quad j = k = l\}$.

2.5. 1. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^+$ et tout mot $z \in L_5$ avec $|z| \geq N$, il existe une décomposition $z = uxvyw$ telle que
– $|xy| \geq 1$
– $|xvy| \leq N$
– pour tout $i \geq 0$, $ux^ivy^iw \in L_5$.

2.5. 2. Montrer que L_5 n'est pas algébrique.

Exercice 3

Pour tout langage L sur Σ, on définit

$$\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^* \text{ tel que } |x| = |y| \text{ et } xy \in L\}$$

3.1. Montrer que le langage $L_6 = \{a^n b^n c^m d^{3m}, \quad n, m \geq 1\}$ est algébrique.

3.2. Calculer $\frac{1}{2}L_6$.

3.3. Montrer que $\frac{1}{2}L_6$ n'est pas algébrique.