Module Langages Formels
TD 5 : Grammaires et Langages Algébriques

Exercice 1

Quels sont les langages engendrés par les productions suivantes ?

1. G_1 :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} S & \rightarrow & aSBC \mid aBC & bB & \rightarrow & bb \\ CB & \rightarrow & BC & bC & \rightarrow & bc \\ aB & \rightarrow & ab & cC & \rightarrow & cc \end{array}$$

2. G_2 :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} S & \rightarrow & CD & Ab & \rightarrow & bA \\ C & \rightarrow & aCA \mid bCB & Ba & \rightarrow & aB \\ AD & \rightarrow & aD & Bb & \rightarrow & bB \\ BD & \rightarrow & bD & C & \rightarrow & \epsilon \\ Aa & \rightarrow & aA & D & \rightarrow & \epsilon \end{array}$$

3. G_3 :

$$S \rightarrow aS \mid aSbS \mid \epsilon$$

Exercice 2

Donner des grammaires engendrant les langages suivants.

1. $\{a^i b^j c^k,\ i > j\}$
2. $\{a^i b^j c^k,\ i \neq j\}$
3. $\{a^{2^n},\ n \geq 0\}$
4. $\{a^{n^2},\ n \geq 0\}$

Exercice 3 `Automates séquentiels`

Définition:
Soit A un alphabet d'entrée et B un alphabet de sortie. Un automate *séquentiel* (gauche) est un automate fini à 2 bandes $\mathcal{A} = (Q, A \times B^*, i, Q, \delta)$ tel que :

- la projection sur la bande d'entrée ((Q, A, i, Q, δ)) est un automate fini déterministe ;
- tout état est terminal.

Les étiquettes des flèches d'automate séquentiel sont des couples de $A \times B^*$. Si partant d'un état q on lit la lettre $a \in A$ sur l'entrée pour arriver dans l'état p, on écrit en sortie $v \in B^*$, tel que $q \overset{(a,v)}{\rightarrow} p$.

La relation de mots (finis) $R \subseteq A^* \times B^*$ est **réalisée par** $\mathcal{A}$ si R est l'ensemble des étiquettes des chemins finis commançant dans l'état i. En d'autres termes, un couple (f, g) est reconnu par $\mathcal{A}$ si il existe un état q tq $i \overset{(f,g)}{\rightarrow} q$.

La fonction φ est réalisable par un automate fini si la relation $(x, \varphi(x))$ est réalisable par automate fini.

Un automate séquentiel droit lit et écrit les mots de droite à gauche.

Un automate est *sous-séquentiel* si il existe une fonction *terminale* $w : Q \rightarrow B^*$. Un couple (f, g) est reconnu par $\mathcal{A}$ s'il existe un chemin

$$i \overset{f/g'}{\rightarrow} q$$

tel que $g = g'g''$ et $w(q) = g''$.

3.1. Donner un automate séquentiel qui efface les 0 en tête des mots (sur $\{0, 1\}$).

3.2. Donner un automate sous-séquentiel droit qui ajoute 1 à un entier en base 2 (pour l'alphabet d'entrée, prendre $\{0, 1, 2\}$ avec 2 qui marque la fin de l'entier).

3.3. Donner un automate sous-séquentiel droit qui additionne deux entiers en base 2 (pour l'alphabet d'entrée, prendre $\{0, 1, 2\}^2$ -> le couple $(10, 3)$ s'écrira $(21010, 22211)$ et correspondra au mot $(2, 2)(1, 2)(0, 2)(1, 1)(0, 1)$).

3.4. Donner un automate sous-séquentiel droit pour la soustraction en base 2 (pour l'alphabet d'entrée, prendre $\{2, 0, 1\}^2$).

3.5. Donner un automate déterministe reconnaissant les mots finissant par le motif *abbab*, puis un automate séquentiel gauche supprimant toutes les occurrences de *abbab* dans un mot.