

Module Langages Formels

TD 3 : Langages Rationnels

Exercice 1 Semi-linéarité

1.1. Soit $\varphi : \Sigma \rightarrow \Gamma$ un morphisme (i.e. $\forall u, v \in \Sigma^*, \varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$). Montrer que, si $L \in \text{Rat}(\Sigma)$, alors $\varphi(L) \in \text{Rat}(\Gamma)$.

Un ensemble d'entiers est linéaire s'il est de la forme $\{c + ip, i \in \mathbb{N}\}$. Un ensemble est semi-linéaire s'il est réunion finie d'ensembles linéaires.

1.2. Soit $L \subseteq a^*$ un langage rationnel, montrer que $\{i, a^i \in L\}$ est semi-linéaire.

1.3. En déduire que pour tout langage L rationnel, l'ensemble $\lambda(L) = \{|w|, w \in L\}$ est semi-linéaire.

Exercice 2 Non équivalence des Lemmes d'itération

Dans cet exercice, nous allons considérer les trois versions du Lemme de l'étoile :

1. Si L est un langage reconnu par automate fini, alors

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall u \in L, |u| \geq n \exists v, t, w \in \Sigma^* \quad u = vt^m w, |t| > 0, \forall m \in \mathbb{N} vt^m w \in L$$

2. Si L est un langage reconnu par automate fini, alors

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall \omega = rus \in L, |u| \geq n \exists v, t, w \in \Sigma^* \quad u = vt^m w, |t| > 0, \forall m \in \mathbb{N} rvt^m ws \in L$$

3. Si L est un langage reconnu par automate fini, alors

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall u = ru_1 u_2 \dots u_n s \in L, |u_i| \geq 1 \exists 1 \leq i < j \leq n \quad \forall m \in \mathbb{N} ru_1 \dots u_{i-1} (u_i \dots u_j)^m u_{j+1} \dots u_n s \in L$$

2.1. Soit $L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b\}$, montrer que L vérifie le Lemme 1 mais pas le Lemme 2.

2.2. Soit $L' = \{(ab)^n (cd)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \Sigma^* (aa + bb + cc + dd + ac) \Sigma^*$, avec $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Montrer que L' vérifie le Lemme 2 mais pas le Lemme 3.

Exercice 3 Langages rationnels

3.1. Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ . Montrer que les langages suivants sont rationnels.

1. $\text{CYCLE}(L) = \{x_1x_2, x_1, x_2 \in \Sigma^* \text{ et } x_2x_1 \in L\}$
2. $\text{INIT}(L) = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^*, xy \in L\}$
3. $\text{MAX}(L) = \{x \in L, \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
4. $\text{MIN}(L) = \{x \in L, \text{aucun préfixe propre de } x \text{ n'est dans } L\}$
5. $\bar{L} = \{x, \bar{x} \in L\}$
6. $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|\}$
7. $\text{SQRT}(L) = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|^2\}$

3.2. Montrer que pour un langage L rationnel le langage suivant n'est pas nécessairement rationnel.

$$\text{BORD}(L) = \{w \in \Sigma^*, \exists x, y, z \in \Sigma^*, |x| = |y| = |z|, w = xz \text{ et } xyz \in L\}$$

Exercice 4 Le barman aveugle

On dispose de 4 jetons, chacun ayant une face bleue et une face rouge. Un joueur (le barman) a les yeux bandés. Son but est de retourner les 4 jetons sur la même couleur (dès que les 4 jetons sont retournés, la partie s'arrête et le barman a gagné). Pour cela, il peut retourner à chaque tour 1, 2 ou 3 jetons. Un autre joueur perturbe le jeu en tournant le plateau sur lequel reposent les jetons d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour entre chaque opération du barman. En utilisant une modélisation par des automates, montrer que le barman a une stratégie gagnante, c'est-à-dire que quoi que fasse le tourneur de plateau, il a moyen de gagner.

