Modélisation ensembliste

Ensembles, Relations, Fonctions

Octobre 2000

Généralités, Typage

Exercice

1. Si un ensemble X a n éléments, combien d'éléments possède $\mathbb{P}X$?
2. Donner l'ensemble des parties (noté $\mathbb{P}$) des ensembles suivants :
   $\{0,\ 1\}$, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\mathbb{P}\{1\}$
3. Que représente $\mathbb{P}\mathbb{P}\{-1,\ 1\}$?
4. Définir $EnsEnsDesPremiers$, l'ensemble de tous les ensembles de nombres premiers. Quel est le type de $EnsEnsDesPremiers$?

Exercice

Soit l'ensemble $forme = \{rond,\ carre\}$. Lister les éléments des ensembles suivants :

1. $(\mathbb{P}forme)\setminus\{forme\}$
2. $(\mathbb{P}forme)\setminus forme$
3. $(\mathbb{P}\{rond\}) \cup (\mathbb{P}\{carre\})$
4. $\mathbb{P}((\mathbb{P}\{rond\})\setminus\emptyset)$

Exercice

Quel est le type de chacune des expressions suivantes ?

$\{0,1\}$ 37 $\{\{1,2\},\ \{2,3\}\}$

$(1,\ 2)$ $(\{1\},1)$ $\{1,\ \{1\}\}$

Exercice

Les expressions suivantes sont-elles correctement typées ? sinon, préciser le problème de typage.

1. $\{\{\emptyset\},\ \{1,\ 2\}\}$
2. $\forall x : \mathbb{Z} \bullet \exists\, y : \mathbb{Z} \bullet x < y$
3.

$$
\begin{array}{l}
[SORTIE] \\
erreur : SORTIE \\
\forall x : \mathbb{Z} \bullet \exists y : SORTIE \bullet (x \neq 0 \Rightarrow y = x - 1 \land \\
\qquad x = 0 \Rightarrow y = erreur)
\end{array}
$$

Exercice

Soient X un ensemble à n éléments et Y un ensemble à m éléments ; combien d'éléments possède $X \times Y$?

Exercice

Soient

$$\begin{aligned} forme &= \{rond,\ carre\} \\ couleur &= \{rouge,\ bleu,\ vert\} \end{aligned}$$

Trouver

1. $forme \times couleur$
2. $couleur \times forme$

Modélisation

Exercice

Dans un système de gestion de bibliothèque, chaque livre est identifié par un couple (info_surle_livre, nbre_de_copie).
On donne $LIVRE$ comme un ensemble de base (*given set*) permettant de représenter les informations sur un livre.

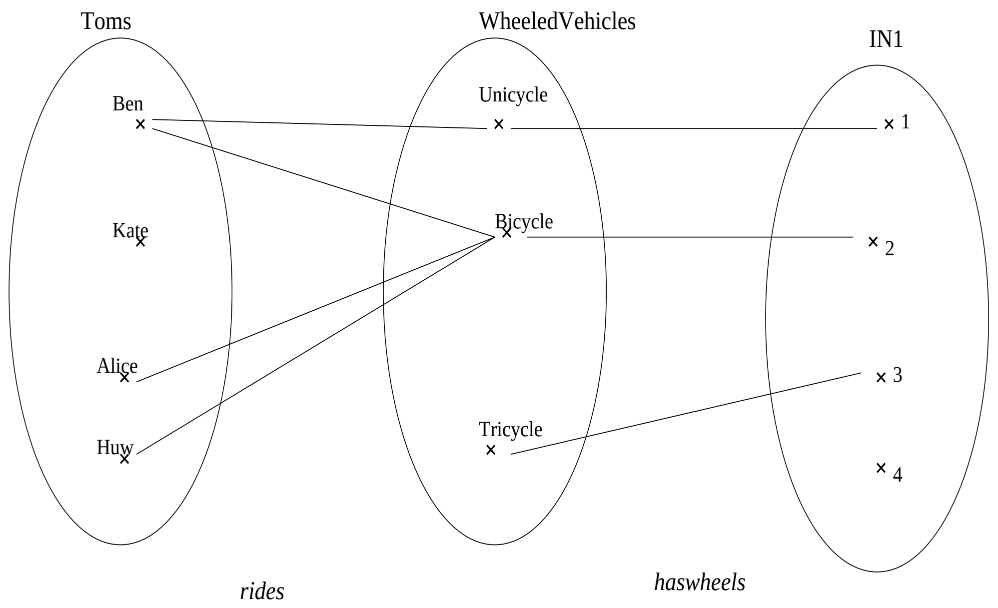
1. Ecrire une spécification permettant de modéliser chaque (copie de) livre
2. Ecrire une spécification de la bibliothèque vue comme un ensemble de livres.

Exercice

Décrire un commutateur ayant exactement deux positions *on* et off en utilisant le type de base $POSITION$. Que pensez-vous de cette spécification et en générale de la façon de spécifier des ensembles ayant très peu d'éléments ?

Exercice

On donne le diagramme de Venn suivant :



Soient

$$haswheels \;==\; \{Unicycle \mapsto 1,\; Bicycle \mapsto 2,\; Tricycle \mapsto 3\}$$

$$rides : Toms \;\longleftrightarrow\; WheeledVehicles$$

$$haswheels : WheeledVehicles \;\longrightarrow\; \mathbb{N}1$$

On voudrait construire une relation qui donne le nombre de roues (du véhicule) conduit par chaque élément de $Toms$.

1. Donner la relation $ridesonwheels$ à l'aide de $rides$ et $haswheels$,
2. Donner en extension $ridesonwheels$.

Exercice

Quelles sont les relations définies par

1. $\{Alice\} \lhd (rides; haswheels)$
2. $(\{Alice\} \lhd rides); haswheels)$
3. $(rides; haswheels) \rhd \{2\}$
4. $(rides; haswheels) \rhd \{2\}$

Exercice

Déterminer

1. $rides(\!|\{Ben,\;Alice\}|\!)$
2. $rides(\!|\{Kate,\;Alice\}|\!)$
3. $rides^{-1}(\!|Unicycle\}|\!)$

Séquences

Exercice

Voici quelques exemples de séquences :

$$\langle Kate, Alice, Huw\rangle$$

$$\langle Ben\rangle$$

$$\langle Huw, Alice, Alice\rangle$$

$$\langle\;\rangle$$

1. Donner une expression ensembliste de $\langle Huw, Alice, Alice\rangle$
2. Déduire la définition d'une séquence d'objets de type X

Exercice

Soit $cafequeue : seq\;\; Toms$ avec
$cafequeue \;=\; \langle Kate, Alice, Huw\rangle$

1. Ecrire les ensembles représentés par les notations de séquence suivantes :
   $\langle 3,\; 2,\; 1\rangle$
   $\langle\{Ben, Kate\}, \{Alice, Huw\}\rangle$
2. Ecrire les séquences correspondant aux ensembles :
   $\{3 \mapsto Alice,\; 1 \mapsto Alice, 4 \mapsto Huw, 2 \mapsto Huw\}$

$\{x : \mathbb{N} \mid 0 < x < 5 \bullet (x,\ x^2)\}$

3. Dire lesquels sont des séquences parmi

   $\{1 \mapsto 1\}$

   $\{0 \mapsto Huw, 1 \mapsto Alice\}$

   $cafequeue \setminus \langle\ \rangle$

   $cafequeue \cup \langle\ \rangle$

   $cafequeue \cup \{1 \mapsto Huw\}$

Exercice

Modélisation d'un embarquement de voitures sur un ferry (par des contrôleurs de traffic).
On veut modéliser par une séquence de séquences, les diverses possibilités d'embarquement de voitures.

1. Définir *Embarquement*, l'ensemble de toutes les situations possibles d'embarquement en utilisant le type de base $VOITURE$.
   Les contraintes suivantes sont à respecter :
   – trouver une abbréviation convenable pour les déclarations,
   – s'assurer qu'aucune voiture n'est dans plus d'une file,
   – s'assurer qu'aucune voiture n'est plus d'une fois dans la même file.
2. Si la zone de parking des voitures ne peut contenir plus de 15 files de voitures, quelles contraintes supplémentaires doivent être ajoutées à *Embarquement* ?
3. Les contrôleurs de traffic voudrait signaler leur contrôle lorsque plus aucune des 15 files n'est vide. Donner une définition axiomatique pour *Flag* qui est *on* lorsque cette situation est atteinte *off* sinon.