

---

# Cahier d'exercices : N° 2

## spécification formelle en B, développement formel

---

### Références

- C. Attiogbé, Notes de cours (*B : méthode de développement formel de logiciels*)  
J-R. Abrial, *The B Book*, Cambridge University Press, 1996  
J. B. Wordsworth, *Software Engineering with B*, Addison-Wesley, 1996  
H. Habrias, *Spécification formelle avec B*, Hermès, 2001  
J-R. Abrial, *Modeling in Event- B : System and Software Engineering*, Cambridge University Press, 2010

### Spécifications B : prise en main

---

Le livre de référence *The B-Book* de J-R Abrial contient une série d'exemples de machines abstraites que nous recommandons en priorité.

#### Exercice : Machine *Data\_Base*

(voir BBook - Chapitre 4)

#### Exercice : Machines *Product, Client, Invoice*

(voir BBook - Chapitre 8)

#### Exercice : A Lift Control System

(voir BBook - Chapitre 8)

---

## Exercice 1 : le b a ba

Soit la machine abstraite suivante :

```
MACHINE
    RMan(RES)
VARIABLES
    rfree
INVARIANT
    rfree <: RES
INITIALISATION
    rfree := {}
OPERATIONS
    alloc(rr) =
    PRE
        rr : rfree
    THEN
        rfree := rfree - {rr}
    END
;
    free(rr) =
    PRE
        rr : RES
        & rr /: rfree
    THEN
        rfree := rfree \ {rr}
    END
;
    setfree(rrs) =
    PRE
        rrs <: RES
    THEN
        rfree := rrs
    END
END
```

1. Commentez cette machine abstraite. Retrouvez la spécification informelle.
2. Ecrivez les obligations de preuve pour l'initialisation et les opérations.

**Remarques :** Les modèles formels peuvent être dédiés à une étude de propriétés avec ou sans implantation. Lorsqu'on envisage un modèle devant aller jusqu'à la génération de code, on doit prendre les précautions nécessaires ; par exemples, les ensembles doivent avoir une taille définie. Un ensemble abstrait ne peut pas servir de type de paramètre.

## Exercice 2 : les bases

Soit la machine abstraite suivante :

```
MACHINE
    Students
SETS
    STUDENT
CONSTANTS
```

```

    max_students /* pour borner le sous-ensemble de travail */
PROPERTIES
    max_students : NAT1 & max_students < 100
VARIABLES
    studentset
INVARIANT
    studentset <: STUDENT
&    card(studentset) <= max_students
INITIALISATION
    studentset := {}
OPERATIONS

    enter(st) =          /* ajoute un etudiant st a l'ensemble */
    PRE
        ...              /* a completer */
    THEN
        studentset := studentset \ {st}
    END
;
    remove(st) =        /* enleve l'etudiant st de l'ensemble */
    PRE
        ...              /* a completer */
    THEN
        studentset := studentset - {st}
    END
END

```

1. Complétez les préconditions des opérations,
2. Ecrivez les obligations de preuve pour la correction (cohérence) de la machine.

### Exercice 3 : les bases, encore

Les objets existent indépendamment de leurs caractéristiques!

```

MACHINE
    ProcNumber /* serveur de numéros de processus */
DEFINITIONS
    PROCESS == 1000..9999 /* serait mieux dans un contexte, et vu */
VARIABLES
    curProc
,    processes /* un sous-ens de processus déjà utilisés */
INVARIANT
    curProc : PROCESS
&    processes <: PROCESS
INITIALISATION
    curProc :: PROCESS
||    processes := {}
OPERATIONS
res <-- newProc =          /* fournit un numero de processus disponible */
    PRE
        card(processes) <= 9999 /* places encore dispo */
    THEN

```

```

    ANY pp WHERE
      pp : PROCESS & pp /: processes /* un num tout frais */
    THEN
      res := pp
      || processes := processes \/ {pp}
    END
  END
END
;
freeProcess(nn) = /* libere un numero précédemment pris */
PRE
  ... /* a completer */
THEN
  ... /* a completer */
END
END

```

1. Analysez cette machine et proposez des améliorations
2. Completez la machine.

## Exercice 4 : organisation des données et opérations

Soit à écrire une machine abstraite B (ProcessManager) pour la gestion des processus dans un système d'exploitation.

La gestion des processus intègre par exemple la fonctionnalité suivante :

F1 : CreerProcess	Pour créer un nouveau processus : Prendre un nouveau numéro unique, pour le processus ; ajouter ce processus aux courants ; Mettre le processus dans un état donné (exemple prêt).
F2 : ...	...

1. Esquissez l'architecture des machines abstraites du module gestionnaire de processus.
2. Quelles leçons en tirer par rapport à la structuration des données et traitements en machines et opérations ?

## Machines abstraites : structuration

---

### Le système de gestion d'un annuaire téléphonique

Nous considérons un système de gestion d'un annuaire. Le système est vu comme le gestionnaire d'une base de données contenant des noms de personnes avec leurs numéros de téléphone. Le système gère les personnes et les numéros de téléphones associés à ces personnes. Les opérations classiques d'ajout, suppression, modification doivent être offertes par le système.

On se propose d'étudier ici la spécification en  $B$  du système. On donne pour ce faire quelques éléments de travail qu'il va falloir compléter.

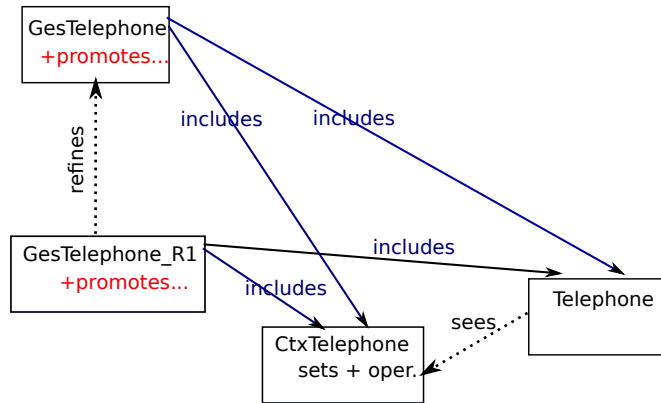


FIGURE 1 – Une architecture type de développement en B

## Architecture type

### Exemples de machines pour démarrer

```

MACHINE
  Ctx_ANNUAIRE
CONSTANTS
  maxPers,
  maxNums
PROPERTIES
  maxPers : 0..MAXINT
  &maxNums : 0 ..MAXINT
SETS
  MESSAGE = {Ok, PasOk}

DEFINITIONS
  PERSONNE == 0..maxPers
  ; NUMERO == 0..maxNums
OPERATIONS
  res <-- Succes = /* quand une operation est effectuee */
  BEGIN
    res := Ok
  END
;
  res <-- Echec = /* quand une operation est non effectuee */
BEGIN
  res := PasOk
  END
END

MACHINE
  Annuaire
SEES
  Ctx_ANNUAIRE

DEFINITIONS /* les memes que dans le contexte */
  PERSONNE == 0..maxPers
  ; NUMERO == 0..maxNums

```

```

VARIABLES
    membres, telephones
INVARIANT
    membres <: PERSONNE
&    telephones : membres <-> NUMERO
INITIALISATION
    membres, telephones := {},{}
OPERATIONS
    ajoutMembre(lenom) =
    PRE
        lenom : PERSONNE & lenom /: membres
    THEN
        membres := membres \/{lenom}
    END
/* ;
    autres operations
*/
END

```

## Opérations à écrire pour compléter la machine précédente

```

MACHINE
    Annuaire    /* la suite */
    ...

OPERATIONS
    lesnums <-- rechercherNumeros(lenom) =
/* ici, on renvoie un ensemble (donc abstrait) */
/* en vue d'une implantation, il faut renvoyer un type implantable,
comme une sequence ... à faire plus tard */
    PRE
        lenom : PERSONNE & lenom : dom(telephones)
    THEN
        lesnums := telephones[{lenom}]
    END

;
    ajoutCoordonnees(lenom, lenum) =
/* deux hypotheses :
(a) soit le nom est membre,
(b) soit le nom n'est pas membre */
    ...

;
    supprimerMembre(lenom) = /* hypothese, lenom est pas dans 'membres' */
    ...

;
    supprimerCoordonnees(lenom, lenum) = /* enleve le couple (lenom, lenum) */
    ...

;
res <-- rechercherNoms(numero) = /* recherche des personnes ayant 'numero' */
    ...

;

```

```

/*----- Operations auxiliaires : pour "tester" les PRE -----*/
bb <--  dejaMembre(lenom) = /* signale que le nom est dans 'membres' */
      ... /* on renvoie un booleen True / False */
;
bb <--  pasMembre(lenom) = /* signale que le nom n'est pas dans 'membres'*/
      ...
;
res <-- coordonneesDejaDefini(lenom, lenum) =
      ...
;
res <-- coordonneesInconnues(lenom, lenum) =
      ...
;
res <-- numeroInconnu(lenum) = /* booleen : lenum n'est pas dans annuaire */
      ...
END

```

Toutes ces opérations sont regroupées dans la même machine car elles ont le même invariant.

## Etude

1. Complétez la spécification des opérations de la machine **Annuaire**
2. Ecrivez et prouvez l'obligation de preuve de l'opération **ajoutMembre**

Pour compléter la spécification du système de gestion de l'annuaire, nous introduisons la machine **GesTelephone**.

```

MACHINE
  GestAnnuaire
INCLUDES
  CtxANNUAIRE,
  Annuaire,
      // accès aux VARIABLES, SETS, CONSTANTS
      // avec possibilite d'utiliser les operations de ces Machines
      // pour modifier leurs VARIABLES

OPERATIONS
  res <-- ajoutMembreTotal (lenom) =
    PRE
      lenom : PERSONNE
    THEN
      CHOICE
        // ajoutMembre(lenom) sera fait dans ce cas
        || res <-- Succes
      OR
        // on n'ajoute pas ici
        || res <-- Echec
END
/*-----
  cette operation pourrait etre rafinee/implantee par

```

```

res <-- ajoutMembreTotal(lenom) =
  PRE ...
    bl := dejaMembre(lenom) /* bl : var locale à introduire */
  ; IF (bl = FALSE)
    THEN
      ajoutMembre(lenom)
    ; res <-- Succes
    ELSE
      res <-- Echec
    END
  END
END
-----*/

;
res <-- supprimerMembreTotal (lenom) =
  ...
;
res <-- ajoutCoordonneesTot (lenom, lenum) =
  ...
;
res <-- supprimerCoordonneesTot (lenom, lenum) =
  ...
;
res, numeros <-- rechercherNumerosTotal (lenom) =
  ...
;
res, lesnoms <-- rechercherNomsTotal (lenum) =
  ...
END

```

## Suite de l'étude

1. Complétez les machines proposées et surtout `GestAnnuaire`
2. Proposez des raffinements des différentes machines
3. Analysez formellement avec l'Atelier B.

## Machines abstraites : obligations de preuves de correction

---

### Exercice 1

1. Effectuez les substitutions indiquées dans les prédicats suivants :
  - $[xx := 1]xx \neq yy$
  - $[xx := yy]xx = yy$
  - $[xx := 1](\forall xx.(xx \in \mathbb{N} \Rightarrow xx \geq yy) \vee xx \geq 0)$
  - $[xx := 0]yy > 0$
  - $[xx := xx + 1]xx > 0$
2. Effectuez les substitutions indiquées dans les prédicats suivants :



- $[PRE\ xx > 0\ THEN\ xx := xx - 1\ END]\ xx > yy$
- $[PRE\ xx > yy\ THEN\ xx := yy\ END]\ xx > 0$
- $[PRE\ xx \in \mathbb{N}\ THEN\ xs := xs \cup \{xx\}\ END]\ xs \subseteq \mathbb{N}$
- $[PRE\ xx \in \mathbb{N}\ THEN\ yy := xx\ END]\ \forall xx.(xx \in \mathbb{N} \Rightarrow yy > zz)$

## Exercice 2

1. Montrez que  $[ANY\ xx\ WHERE\ xx : NAT \ \&\ xx > 5\ THEN\ yy := xx\ END]\ yy > 5$
2. Montrez que  $[ANY\ xx\ WHERE\ xx : NAT \ \&\ xx > 0\ THEN\ yy := xx + 1\ END]\ yy > 1$
3. Montrez que  $[ANY\ xx\ WHERE\ xx : NAT \ \&\ xx > yy\ THEN\ zz := xx\ END]\ zz > yy$
4. Montrez que  $[CHOICE\ xx := 1\ OR\ xx := 2\ END]\ xx > 0$
5. Montrez que  $[xx :: \{yy\}]\ xx = yy$
6. Montrez que  $[xx :: yy /\ \&\ zz]\ xx : zz$

## Exercice 3

Soit à étudier la machine suivante :

```

MACHINE      RRMan(RESOURCE, max_res)
CONSTRAINTS  card(RESOURCE) >= max_res
INCLUDES     RMan(RESOURCE),
             bkup.RMan(RESOURCE)

INVARIANT

             card(rfree) <= max_res
&
             card(bkup.rfree) <= max_res
INITIALISATION
             rfree, bkup.rfree := {}, {}

OPERATIONS

             res <-- rec_alloc =
             PRE      rfree /= {}
             THEN
                 ANY  rr  WHERE rr : rfree
                 THEN
                     res := rr || alloc(rr)
                 END
             END
END
END

```

1. Commentez les différentes clauses de la machine.
2. Quelles sont les variables de la machine RRMan ?
3. Montrez que `rec_alloc` préserve l'invariant. (Ecrivez et prouvez le théorème).
4. Commentez les opérations suivantes :

```

             rec_free(rr) =
             PRE
                 rr : RESOURCE - rfree

```

```

        & card(rfree) < max_res
    THEN
        free(rr)
    END
;

    rep <-- is_free(rr) =
    PRE
        rr : RESOURCE
    THEN
        rep := bool(rr : rfree)
    END
;

    rec_backup =
    BEGIN
        bkup.setfree(rfree)
    END

```

## Exercice 4 : preuve de correction

Soit la machine suivante :

```

MACHINE   RMan(RES)           /* resource manager */
VARIABLES rfree
INVARIANT
    rfree <: RES
INITIALISATION
    rfree := {}
OPERATIONS
    alloc(rr) =
    PRE rr : rfree
    THEN rfree := rfree - {rr}
    END
;
    free(rr) =
    PRE rr : RES & rr /\ rfree
    THEN rfree := rfree \/ {rr}
    END
;
    setfree(rrs) =
    PRE rrs <: RES
    THEN rfree := rrs
    END
END

```

1. Ecrivez et prouvez le théorème qui garantit que l'opération **free** préserve l'invariant de RMan.
2. Ecrivez et prouvez le théorème qui garantit que l'opération **setfree** préserve l'invariant de RMan.