Cahier d'exercices : N° 1
Modélisation ensembliste, spécification formelle B

maj Septembre 2004, janvier 2005

Références

www.sciences.univ-nantes.fr/info/perso/permanents/attiogbe/enseignements.html
C. Attiogbé, Notes de cours (*B : méthode de développement formel de logiciels*)
C. Attiogbé, Notes de cours (*Introduction aux méthodes formelles "orientées modèle/état"*)
B. Potter and J. Sinclair and D. Till, *An Introduction to Formal Specification and Z*,Prentice Hall, 1991

TD/TP encadrés en 2010/2011 par :
`Christian.Attiogbe@univ-nantes.fr`

Généralités, ensembles

Exercice 1.1 - Bases de la modélisation ensembliste

Dans le but de concevoir un logiciel, on veut travailler sur l'ensemble des étudiants d'une classe. Par exemple, on veut trouver (via une fonctionnalité du logiciel) parmi les étudiants ceux qui ont fait un exercice demandé...

1. Donnez un modèle mathématique (ou une abstraction) pour représenter les étudiants.

Maintenant, on veut exprimer que certains étudiants ont une certaine *propriété* (P).

2. Donnez **un** modèle mathématique qui exprime : *l'ensemble des étudiants* ayant la propriété P.
3. Donnez un modèle mathématique qui exprime : *l'ensemble des étudiants ayant les propriétés* P_1 *et* P_2 *et* P_3 (dessinez).
4. Donnez un modèle mathématique qui exprime : *les étudiants ayant la propriété* P_i *n'ont pas la propriété* P_j.

5. Donnez un modèle mathématique qui exprime : *les étudiants ayant la propriété P_i ont aussi la propriété P_k* (dessinez).

Exercice 1.2 - Diagrammes de Euler-Venn

1. Donnez un exemple de **relation** ;
2. Donnez un exemple de **fonction** ;
3. Donnez un exemple de **fonction partielle**, et de **fonction totale** ;
4. Donnez un exemple de **fonction injective** ;
5. Donnez un exemple de **fonction surjective** ;
6. Donnez un exemple de **fonction bijective**.

Exercice 1.3

Trouvez un modèle mathématique d'un enregistrement (appelé par ailleurs *record, structure*) décrivant une personne par un nom, prénom, date de naissance.

Exercice 1.4

Soit un ensemble de processus et un ensemble de numéros. Ecrivez de façon ensembliste, la propriété suivante : un processus est identifié par un numéro et un numéro n'identifie qu'un seul processus.

Exercice 1.5

Soit un ensemble de personnes et un ensemble de numéros. Ecrivez de façon ensembliste, la propriété suivante : une personne peut avoir un ou plusieurs numéros et un numéro peut être attribué à une ou plusieurs personnes.

Exprimez (par la fonction inverse), les personnes ayant le même numéro *nn*.

Exercice 1.6 - Rappels sur les ensembles

1. Si un ensemble X a n éléments, combien d'éléments possède $\mathbb{P}\,X$?
2. Donnez l'ensemble des parties (noté $\mathbb{P}$) de l'ensemble $A = \{a, b\}$.
3. Donnez l'ensemble des parties (noté $\mathbb{P}$) des ensembles suivants :
   $\{0, 1\}$, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\mathbb{P}\{1\}$
4. Que représente $\mathbb{P}\,\mathbb{P}\{-1, 1\}$? (calculez)
5. Définissez *EnsEnsDesPremiers*, l'ensemble de tous les ensembles de nombres premiers.
   Quel est le type de *EnsEnsDesPremiers* ?

Exercice 2

Contexte : spécification formelle d'un éditeur de figures géométriques (rond, carré, rectangle, losange, etc) avec diverses couleurs et diverses opérations dont le copier/couper/coller, etc. Ici on va se restreindre à quelques aspects simplifiés de la spécification.
Soit l'ensemble $forme = \{rond, carre\}$.
Listez les éléments des ensembles suivants :

1. $(\mathbb{P}\,forme)\backslash\{forme\}$
2. $(\mathbb{P}\,forme)\backslash forme$
3. $(\mathbb{P}\{rond\}) \cup (\mathbb{P}\{carre\})$
4. $\mathbb{P}((\mathbb{P}\{rond\})\backslash\emptyset)$

Exercice 3

Soient X un ensemble à n éléments et Y un ensemble à m éléments ; combien d'éléments possède $X \times Y$?

Exercice 4

Soient
$forme = \{rond,\ carre\}$
$couleur = \{rouge,\ bleu,\ vert\}$
Trouvez

1. $forme \times couleur$
2. $couleur \times forme$
3. un exemple de fonction partielle de *forme* dans *couleur*,
4. une fonction totale de *forme* dans *couleur*,
5. une relation de *forme* dans *couleur*

Généralités, Typage

Exercice 5

Quel est le type de chacune des expressions suivantes ?

$\{0,1\}$ $\quad 37 \quad$ $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$

$(1,\ 2)$ $\quad (\{1\},1) \quad$ $\{1,\ \{1\}\}$

Ensembles, relations, fonctions

Exercice 1

Soient
$forme = \{rond,\ carre\}$
$couleur = \{rouge,\ bleu,\ vert\}$
Trouvez

1. un exemple de fonction partielle de *forme* dans *couleur*,
2. une fonction totale de *forme* dans *couleur*,
3. une relation de *forme* dans *couleur*

Exercice 2

Décrivez un commutateur ayant exactement deux positions *on* et *off* en utilisant un type de base *POSITION* qui définit les positions.
Quel(s) constat(s) faites-vous sur ce type de spécification et en général sur la façon de spécifier des ensembles ayant très peu d'éléments ?

Exercice 3 : relations, composition, restriction

Soient

$$haswheels == \{Unicycle \mapsto 1,\ Bicycle \mapsto 2,\ Tricycle \mapsto 3\}$$

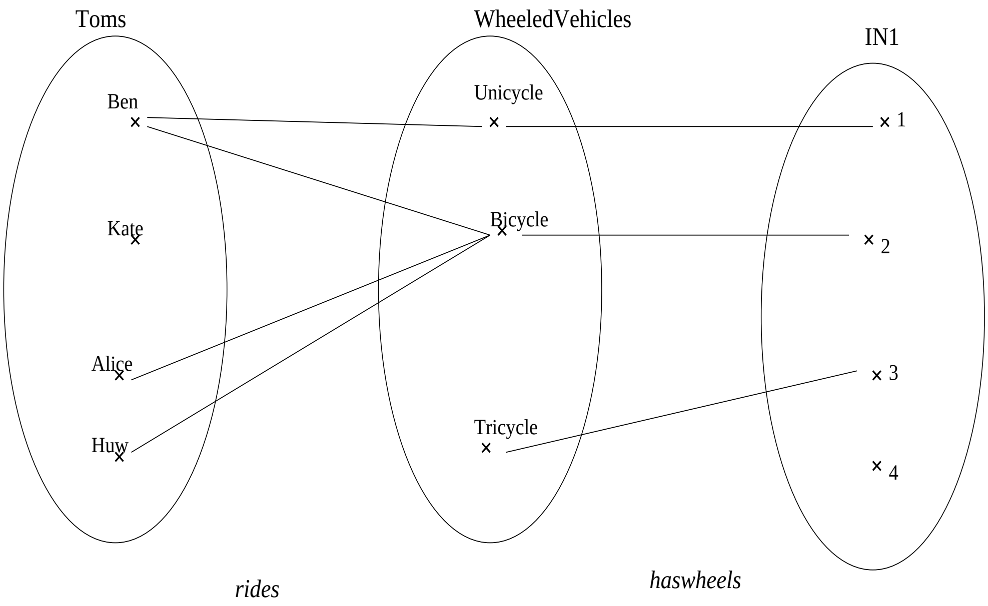
$$rides : Toms \longleftrightarrow WheeledVehicles$$

$$haswheels : WheeledVehicles \longrightarrow \mathbb{N}1$$

On voudrait construire une relation qui donne le nombre de roues du véhicule conduit par chaque élément de *Toms*.

1. Donnez la relation *ridesonwheels* à l'aide de *rides* et *haswheels*,
2. Donnez en extension *ridesonwheels*.

On donne le diagramme de Venn suivant :



Exercice 4

Quelles sont les relations définies par

1. $\{Alice\} \lhd (rides \fatsemi haswheels)$
2. $(\{Alice\} \lhd rides) \fatsemi haswheels$
3. $(rides \fatsemi haswheels) \mathbin{⩥} \{2\}$
4. $(rides \fatsemi haswheels) \rhd \{2\}$
5. $\{Ben\} \lhd rides$

6. $rides \rhd \{Bicyle\}$

Qu'exprime-t-on avec

1. $dom(rides \rhd \{Bicycle\})$
2. $card(dom(rides \rhd \{Bicyle\}))$
3. $dom(rides \rhd \{Bicyle\})$

Exercice 5

Déterminez

1. $rides[\{Ben,\ Alice\}]$
2. $rides[\{Kate,\ Alice\}]$
3. $rides^{-1}[\{Unicycle\}]$

Exprimez
– L'ensemble des personnes qui conduisent un bicylce ;
– Le nombre de personnes qui conduisent un unicycle ;
– L'ensemble des personnes qui ne consuidsent pas d'unicycle.

Exercice 6

Soient les ensembles suivants :
– LANG qui identifie un type de langage,
– APPLI qui identifie des applications logicielles,
– ANNEE qui représente des années.
Soient les relations suivantes :
– $langappli = \{(nx1, python), (ny2, java), (nx2, cobol), (nz2, .net), (nz1, java)\}$
– $anneeappli = \{(nx1, 2000), (ny2, 1999), (nx2, 1989), (nz2, 2003), (nz1, 2002)\}$

Calculez la relation qui exprime le produit direct : $langaplli \otimes anneeappli$
Dessinez les diagrammes de EULER-VENN correspondant aux trois relations.

Séquences

Exercice 1

Soit la séquence $s_1 = \langle Kate, Alice, Huw\rangle$

Expliciter graphiquement sous forme d'une fonction (Euler-Venn) la fonction s_1

Expliciter textuellement sous forme d'une fonction la fonction s_1.

Exercice 2

Voici quelques exemples de séquences :

$\langle Kate, Alice, Huw\rangle$

$\langle Ben\rangle$

$\langle Huw, Alice, Alice \rangle$

$\langle \, \rangle$

1. Donnez une expression ensembliste de $\langle Huw, Alice, Alice \rangle$.
2. En déduire la définition d'une séquence d'objets de type X.

Exercice 3

Soit $cafequeue : seq\ Toms$ avec
$cafequeue = \langle Kate, Alice, Huw \rangle$

1. Ecrivez les ensembles représentés par les notations de séquence suivantes :
   $\langle 3,\, 2,\, 1 \rangle$
   $\langle \{Ben, Kate\}, \{Alice, Huw\} \rangle$
2. Ecrivez les séquences correspondant aux ensembles :
   $\{3 \mapsto Alice,\ 1 \mapsto Alice, 4 \mapsto Huw, 2 \mapsto Huw\}$
   $\{x : \mathbb{N} \mid 0 < x < 5 \bullet (x,\, x^2)\}$
3. Parmi les expressions suivantes, dites lesquelles représentent des séquences :
   $\{1 \mapsto 1\}$
   $\{0 \mapsto Huw, 1 \mapsto Alice\}$
   $cafequeue \setminus \langle \, \rangle$
   $cafequeue \cup \langle \, \rangle$
   $cafequeue \cup \{1 \mapsto Huw\}$

Exemples d'abstraction

Structures mathématiques (abstraites) | **Structures informatiques (concrètes)**

Structure abstraite
$\{r,\ s,\ t,\ u,\ v\}$

Une structure concrète correspondante

s	t	r	u	v

ou bien une liste chaînée

Structure abstraite
$\{(1, a), (2, c), (3, b), (4, e)\}$

Une structure concrète correspondante

a	c	b	e
1	2	3	4

Structure abstraite
$(c\ \wedge\ t_1)\ \vee\ (\neg\, c\ \wedge\ t_2)$

Une structure concrète correspondante
si c alors t_1 sinon t_2

Structure abstraite
$\{(Elise, 30),\ (Behia, 18),\ (Pierre, 36),\ (Glenn, 24)\}$

Une structure concrète correspondante

Behia	18
Glenn	24
Elise	30
Pierre	36