UNIVERSITÉ DE NANTES

Master Informatique (M2) - ALMA
UFR Sciences Nantes - 2013/2014
Formal Software Engineering (Méthodes formelles)
Resp. C. Attiogbé

Cahier d'exercices : N° 1
Modélisation logique et ensembliste, spécification formelle

Références

www.sciences.univ-nantes.fr/info/perso/permanents/attiogbe/enseignements.html
André Arnold, I. Guessarian ; *Mathématiques pour l'Informatique*, Masson 1997
C. Attiogbé, Notes de cours ;*B : méthode de développement formel de logiciels*
C. Attiogbé, Notes de cours ; *Introduction aux méthodes formelles "orientées modèle/état"*)
B. Potter J. Sinclair, D. Till ; *An Introduction to Formal Specification and Z*, Prentice Hall, 1991

Généralités, ensembles

Exercice 1.1 - Bases de la modélisation ensembliste

Dans le but de concevoir un logiciel, on veut travailler sur l'ensemble des profils d'un groupe d'individus. Par exemple, on veut trouver (via une fonctionnalité du logiciel) parmi les profils ceux qui ont une propriété donnée...

1. Donnez un modèle mathématique (ou une abstraction) pour représenter les profils.

Maintenant, on veut exprimer que certains profils ont une certaine *propriété* (P).

2. Donnez **un** modèle mathématique qui exprime : *l'ensemble des profils* ayant la propriété P.
3. Donnez un modèle mathématique qui exprime : *l'ensemble des profils ayant les propriétés* P_1 *et* P_2 *et* P_3 (dessinez).
4. Donnez un modèle mathématique qui exprime : *les profils ayant la propriété* P_i *n'ont pas la propriété* P_j.
5. Donnez un modèle mathématique qui exprime : *les profils ayant la propriété* P_i *ont aussi la propriété* P_k (dessinez).

Exercice 1.2 - Diagrammes de Euler-Venn

1. Donnez/dessinez un exemple de **relation** ;
2. Qu'appelle-t-on : **antécédent ? image ? domaine d'une relation ? co-domaine d'une relation** ?
3. Donnez un exemple de **fonction** ;
4. Donnez un exemple de **fonction partielle**, et de **fonction totale** ;
5. Donnez un exemple de **fonction injective** ;
6. Donnez un exemple de **fonction surjective** ;
7. Donnez un exemple de **fonction bijective**.

Exercice 1.3 - ensembles, relations et fonctions

Soient deux ensembles abstraits D (comme Départ) et A (comme Arrivée). En guise d'illustration, imaginons que D est constitué des éléments (appelés antécédents) : a_1, a_2, a_4, a_7, a_0, a_5 et que A est constitué des éléments (appelés images) i_1, i_3, i_6, i_9, i_5.
On écrit $D = \{a_1, a_2, a_4, a_7, a_0\ a_5\}$ et $A = \{i_1,\ i_3,\ i_6,\ i_9,\ i_5\}$

Notons par $\leftrightarrow$ le symbole de la relation entre ensembles, $\rightarrow$ le symbole de la fonction totale et par $\nrightarrow$ le symbole de la fonction partielle. si f est une relation, $r(x)$ désigne **une** image de x ; alors que $r[\{x\}]$ désigne l'ensemble des images de x. Rappelez-vous aussi des diagrammes de EULER-VENN.

1. Donnez sous forme de diagramme puis en extension, un exemple de fonction injective entre D et A, appelons la f_i.
   Quel est le type qui caractérise f_i ?
   quel est la forme et le type des éléments de f_i ?
2. est-ce qu'il y a d'autres fonctions injectives entre D et A ? pour D et A quelconques, combien y-a-t-il de fonctions entre D et A ?
3. Donnez sous forme de diagramme puis en extension, un exemple de fonction surjective, appelons la f_s. Donnez le type de f_s.
4. Donnez sous forme de diagramme puis en extension, un exemple de fonction bijective, appelons la f_b. Donnez le type de f_b [Modifiez les ensembles A, D au besoin].
5. Donnez, en terme d'inclusion d'ensemble, des relations entre $\leftrightarrow$, $\nrightarrow$, $\rightarrow$.
6. Quelle est le lien (ou la propriété) qui lie : ensemble, relation, fonction ?

Exercice 1.4 - Relations et fonctions

Trouvez un modèle mathématique d'un enregistrement (appelé par ailleurs *record, structure*) décrivant une personne par un nom, prénom, date de naissance, un profil, une photo.

Exercice 1.5 - Relations et fonctions

Soit un ensemble de processus et un ensemble de numéros. Ecrivez de façon ensembliste, la propriété suivante : un processus est identifié par un numéro et un numéro n'identifie qu'un seul processus.

Exercice 1.6 - Relations et fonctions

Soit un ensemble de personnes et un ensemble de numéros. Ecrivez de façon ensembliste, la propriété suivante : une personne peut avoir un ou plusieurs numéros et un numéro peut être attribué à une ou plusieurs personnes.

Exprimez (par la fonction inverse), les personnes ayant le même numéro nn.

Exercice 1.7 - Rappels sur les ensembles

1. Si un ensemble X a n éléments ($\mathsf{card(X) = n}$), combien d'éléments possède $\mathbb{P}\,X$?
2. Donnez l'ensemble des parties (noté $\mathbb{P}$) de l'ensemble $A = \{a, b\}$.
3. Donnez l'ensemble des parties (noté $\mathbb{P}$) des ensembles suivants :
   $\{0, 1\},\ \ \emptyset,\ \ \{\emptyset\},\ \ \mathbb{P}\{1\}$

4. Que représente $\mathbb{P}\,\mathbb{P}\{-1,\, 1\}$? (calculez)
5. Définissez *EnsEnsDesPremiers*, l'ensemble de tous les ensembles de nombres premiers.
   Quel est le type de *EnsEnsDesPremiers* ?

Exercice 2

Contexte : spécification formelle d'un éditeur de figures géométriques (rond, carré, rectangle, losange, etc) avec diverses couleurs et diverses opérations dont le copier/couper/coller, etc.
Ici on va se restreindre à quelques aspects simplifiés de la spécification.
Soit l'ensemble $forme = \{rond,\, carre\}$.
Listez les éléments des ensembles suivants :

1. $(\mathbb{P}\, forme)\backslash\{forme\}$
2. $(\mathbb{P}\, forme)\backslash forme$
3. $(\mathbb{P}\{rond\}) \cup (\mathbb{P}\{carre\})$
4. $\mathbb{P}((\mathbb{P}\{rond\})\backslash\emptyset)$

Exercice 3

Soient X un ensemble à n éléments et Y un ensemble à m éléments ; combien d'éléments possède $X \times Y$?

Exercice 4

Soient $forme = \{rond,\, carre\}$; $couleur = \{rouge,\, bleu,\, vert\}$

1. Donnez $forme \times couleur$
2. Donnez $couleur \times forme$
3. Modélisez une corbeille comme un ensemble d'objets géométriques colorés.

Modélisation ensembliste

Application - transports en commun

Soit à étudier une application d'aide aux usages de transports en commun.
On nous décrit le réseau de transport comme un ensemble de lignes (bus, tramway, ...). Une ligne est constitué de plusieurs tronçons situés entre des stations (arrêts). Des lignes peuvent partager des stations ou des tronçons. (On peut completer au besoin cette description, et faire des hypothèses raisonnables de travail, par exemple la circulation de véhicule dans un sens ou dans un autre...)

1. Proposez un modèle formel ensembliste pour le réseau.
2. Exprimez formellement, l'opération qui permet de trouver les lignes qui partagent des tronçons.
3. Exprimez formellement, l'opération qui permet de trouver les lignes qui partagent des stations.
4. Imaginez d'autres spécifications d'opérations

Application - arbre généalogique

Faites des hypothèses de travail raisonnables (en allant des plus contraignantes aux moins contraignantes) pour modéliser un arbre généalogique. Par exemple commencer avec une seule relation de parenté au lieu des deux *perede, merede*.

Application

Modéliser (le problème des ponts) de Koenisberg sous forme d'une relation. Expliciter et justifier les ensemble(s) et relation(s) utiliser.

Il s'agit de décrire que les zones de la ville de Koenisberg sont accessibles via des ponts. La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est constituée de deux îles ; un pont relie les deux îles ; six ponts relient le continent à l'une ou l'autre des deux îles.

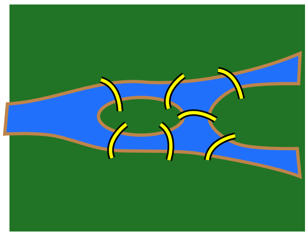


FIGURE 1 – Ponts de Konisberg

Généralités, Typage

Exercice 1

Quel est le type de chacune des expressions suivantes (argumentez) ?

$\{0, 1\}$ $\quad 37$

$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

(1, 2)

Ensembles, relations, fonctions (avec la Méthode B)

Exercice 1 : relations, composition

Soient

$haswheels == \{Unicycle \mapsto 1, Bicycle \mapsto 2, Tricycle \mapsto 3\}$

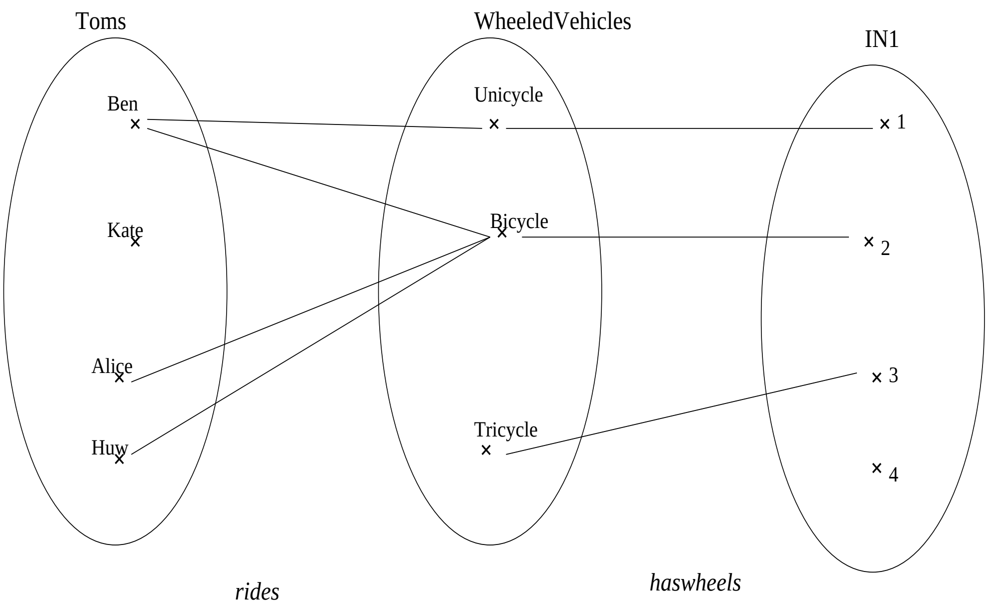
$rides : Toms \longleftrightarrow WheeledVehicles$

$haswheels : WheeledVehicles \longrightarrow \mathbb{N}1$

On voudrait construire une relation qui donne le nombre de roues du véhicule conduit par chaque élément de *Toms*.

1. Donnez la relation *ridesonwheels* à l'aide de *rides* et *haswheels*,
2. Donnez en extension *ridesonwheels*.

On donne le diagramme de Venn suivant :



Exercice 2 : restriction des relations

Quelles sont les relations définies par

1. $\{Alice\} \lhd (rides \fatsemi haswheels)$
2. $(\{Alice\} \lhd rides) \fatsemi haswheels$
3. $(rides \fatsemi haswheels) ⩥ \{2\}$
4. $(rides \fatsemi haswheels) \rhd \{2\}$
5. $\{Ben\} \lhd rides$
6. $rides \rhd \{Bicycle\}$

Qu'exprime-t-on avec

1. $dom(rides \rhd \{Bicycle\})$
2. $card(dom(rides \rhd \{Bicycle\}))$

Exercice 3

Déterminez

1. $rides[\{Ben, Alice\}]$
2. $rides[\{Kate, Alice\}]$
3. $rides^{-1}[\{Unicycle\}]$

Exprimez

– L'ensemble des personnes qui conduisent un Bicycle ;
– Le nombre de personnes qui conduisent un Unicycle ;
– L'ensemble des personnes qui ne conduisent pas d'Unicycle.

Exemples d'abstraction

Structures mathématiques (abstraites) | **Structures informatiques (concrètes)**

Structure abstraite
$\{r,\ s,\ t,\ u,\ v\}$

Une structure concrète correspondante

s	t	r	u	v

ou bien une liste chaînée

Structure abstraite
$\{(1, a), (2, c), (3, b), (4, e)\}$

Une structure concrète correspondante

a	c	b	e
1	2	3	4

Structure abstraite
$(c \wedge t_1) \vee (\neg c \wedge t_2)$

Une structure concrète correspondante
si c alors t_1 sinon t_2

Structure abstraite
$\{(\mathit{Elise}, 30),\ (\mathit{Behia}, 18),\ (\mathit{Pierre}, 36),\ (\mathit{Glenn}, 24)\}$

Une structure concrète correspondante

Behia	18
Glenn	24
Elise	30
Pierre	36