Master Informatique (M2) - ALMA 2012/2013
UFR Sciences Nantes
Méthodes formelles (Resp. C. Attiogbé)

Cahier d'exercices : N° 1
Modélisation ensembliste, spécification formelle B

maj Janvier 2012

Références

www.sciences.univ-nantes.fr/info/perso/permanents/attiogbe/enseignements.html
C. Attiogbé, Notes de cours (*B : méthode de développement formel de logiciels*)
C. Attiogbé, Notes de cours (*Introduction aux méthodes formelles "orientées modèle/état"*)
B. Potter and J. Sinclair and D. Till, *An Introduction to Formal Specification and Z*, Prentice Hall, 1991

TD/TP encadrés en 2012/2013 par :
`Christian.Attiogbe@univ-nantes.fr`

Généralités, ensembles

Exercice 1.1 - Bases de la modélisation ensembliste

Dans le but de concevoir un logiciel, on veut travailler sur l'ensemble des étudiants d'une classe. Par exemple, on veut trouver (via une fonctionnalité du logiciel) parmi les étudiants ceux qui ont fait un exercice demandé...

1. Donnez un modèle mathématique (ou une abstraction) pour représenter les étudiants.

Maintenant, on veut exprimer que certains étudiants ont une certaine *propriété* (P).

2. Donnez **un** modèle mathématique qui exprime : *l'ensemble des étudiants* ayant la propriété P.
3. Donnez un modèle mathématique qui exprime : *l'ensemble des étudiants ayant les propriétés* P_1 *et* P_2 *et* P_3 (dessinez).
4. Donnez un modèle mathématique qui exprime : *les étudiants ayant la propriété* P_i *n'ont pas la propriété* P_j.
5. Donnez un modèle mathématique qui exprime : *les étudiants ayant la propriété* P_i *ont aussi la propriété* P_k (dessinez).

Exercice 1.2 - Diagrammes de Euler-Venn

1. Donnez un exemple de **relation** ;
2. Donnez un exemple de **fonction** ;
3. Donnez un exemple de **fonction partielle**, et de **fonction totale** ;
4. Donnez un exemple de **fonction injective** ;
5. Donnez un exemple de **fonction surjective** ;
6. Donnez un exemple de **fonction bijective**.

Exercice 1.2 bis - ensembles, relations et fonctions

Soient deux ensembles abstraits D (comme Départ) et A (comme Arrivée). En guise d'illustration, imaginons que D est constitué des éléments (appelés antécédents) : a_1, a_2, a_4, a_7, a_0, a_5 et que A est constitué des éléments (appelés images) i_1, i_3, i_6, i_9, i_5.
On écrit $D = \{a_1, a_2, a_4, a_7, a_0\ a_5\}$ et $A = \{i_1,\ i_3,\ i_6,\ i_9,\ i_5\}$

Notons par $\leftrightarrow$ le symbole de la relation entre ensembles, $\rightarrow$ le symbole de la fonction totale et par $\nrightarrow$ le symbole de la fonction partielle. si f est une relation, $r(x)$ désigne **une** image de x ; alors que $r[\{x\}]$ désigne l'ensemble des images de x. Rappelez-vous aussi des diagrammes de EULER-VENN.

1. Donnez sous forme de diagramme puis en extension, un exemple de fonction injective entre D et A, appelons la f_i.
   Quel est le type qui caractérise f_i ?
   quel est la forme et le type des éléments de f_i ?
2. est-ce qu'il y a d'autres fonctions injectives entre D et A ? pour D et A quelconques, combien y-a-t-il de fonctions entre D et A ?
3. Donnez sous forme de diagramme puis en extension, un exemple de fonction surjective, appelons la f_s. Donnez le type de f_s.
4. Donnez sous forme de diagramme puis en extension, un exemple de fonction bijective, appelons la f_b. Donnez le type de f_b [Modifiez les ensembles A, D au besoin].
5. Donnez, en terme d'inclusion d'ensemble, des relations entre $\leftrightarrow$, $\nrightarrow$, $\rightarrow$.
6. Quelle est le lien (ou la propriété) qui lie : ensemble, relation, fonction ?

Exercice 1.3

Trouvez un modèle mathématique d'un enregistrement (appelé par ailleurs *record, structure*) décrivant une personne par un nom, prénom, date de naissance.

Exercice 1.4

Soit un ensemble de processus et un ensemble de numéros. Ecrivez de façon ensembliste, la propriété suivante : un processus est identifié par un numéro et un numéro n'identifie qu'un seul processus.

Exercice 1.5

Soit un ensemble de personnes et un ensemble de numéros. Ecrivez de façon ensembliste, la propriété suivante : une personne peut avoir un ou plusieurs numéros et un numéro peut être attribué à une ou plusieurs personnes.

Exprimez (par la fonction inverse), les personnes ayant le même numéro nn.

Exercice 1.6 - Rappels sur les ensembles

1. Si un ensemble X a n éléments ($\mathsf{card(X) = n}$), combien d'éléments possède $\mathbb{P}\,X$?
2. Donnez l'ensemble des parties (noté $\mathbb{P}$) de l'ensemble $A = \{a, b\}$.
3. Donnez l'ensemble des parties (noté $\mathbb{P}$) des ensembles suivants :
   $\{0, 1\}, \;\; \emptyset, \;\; \{\emptyset\}, \;\; \mathbb{P}\{1\}$
4. Que représente $\mathbb{P}\,\mathbb{P}\{-1, 1\}$? (calculez)
5. Définissez *EnsEnsDesPremiers*, l'ensemble de tous les ensembles de nombres premiers.
   Quel est le type de *EnsEnsDesPremiers* ?

Exercice 2

Contexte : spécification formelle d'un éditeur de figures géométriques (rond, carré, rectangle, losange, etc) avec diverses couleurs et diverses opérations dont le copier/couper/coller, etc.
Ici on va se restreindre à quelques aspects simplifiés de la spécification.
Soit l'ensemble $forme = \{rond, \, carre\}$.
Listez les éléments des ensembles suivants :

1. $(\mathbb{P}\,forme) \setminus \{forme\}$
2. $(\mathbb{P}\,forme) \setminus forme$
3. $(\mathbb{P}\{rond\}) \cup (\mathbb{P}\{carre\})$
4. $\mathbb{P}((\mathbb{P}\{rond\}) \setminus \emptyset)$

Exercice 3

Soient X un ensemble à n éléments et Y un ensemble à m éléments ; combien d'éléments possède $X \times Y$?

Exercice 4

Soient
$forme = \{rond, \, carre\}$
$couleur = \{rouge, \, bleu, \, vert\}$
Trouvez

1. $forme \times couleur$
2. $couleur \times forme$

Modélisation ensembliste

Application - modélisation ensembliste - ensembles, relations

Soit un réseau constitué d'un ensemble d'ordinateurs connectés entre eux par des cables. On peut bien imaginer le dessin d'un tel réseau.
On veut manipuler ce réseau avec un logiciel, pour simuler sa construction et sa maintenance (ajout/suppression d'ordinateurs, connexion entre ordinateurs, etc).
On précise qu'un ordinateur peut être relié (ou connecté) à un ou plusieurs autres ordinateurs.

1. Ecrivez un modèle ensembliste représentant le réseau d'ordinateurs ;
2. En utilisant le modèle trouvé, modéliser l'opération d'ajout d'un ordinateur dans un réseau ;
3. le retrait d'un ordinateur dans un réseau ;
4. la connexion entre deux ordinateurs donnés qui ne sont pas encore reliés entre eux (appartenant au réseau).

Application - arbre généalogique

Faites des hypothèses de travail raisonnables (en allant des plus contraignantes aux moins contraintgnantes) pour modéliser un arbre généalogique. Par exemple commencer avec une seule relation de parenté au lieu des deux *perede, merede*.

Application

Modéliser (le problème des ponts) de Koenisberg sous forme d'une relation. Expliciter et justifier les ensemble(s) et relation(s) utiliser.
Il s'agit de décrire que les zones de la ville de Koenisberg sont accessibles via des ponts. La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est constituée de deux îles ; un pont relie les deux îles ; six ponts relient le continent à l'une ou l'autre des deux îles.

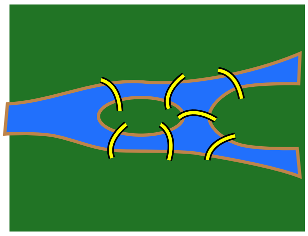


Figure 1 – Ponts de Konisberg

Généralités, Typage

Exercice 1

Quel est le type de chacune des expressions suivantes (argumentez) ?

$\{0, 1\}$ $\quad 37$

$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

$(1,\ 2)$ $\quad (\{1\}, 1)$

$\{1,\ \{1\}\}$

Ensembles, relations, fonctions

Exercice 1 : relations, composition, restriction

Soient

$haswheels == \{Unicycle \mapsto 1,\ Bicycle \mapsto 2,\ Tricycle \mapsto 3\}$

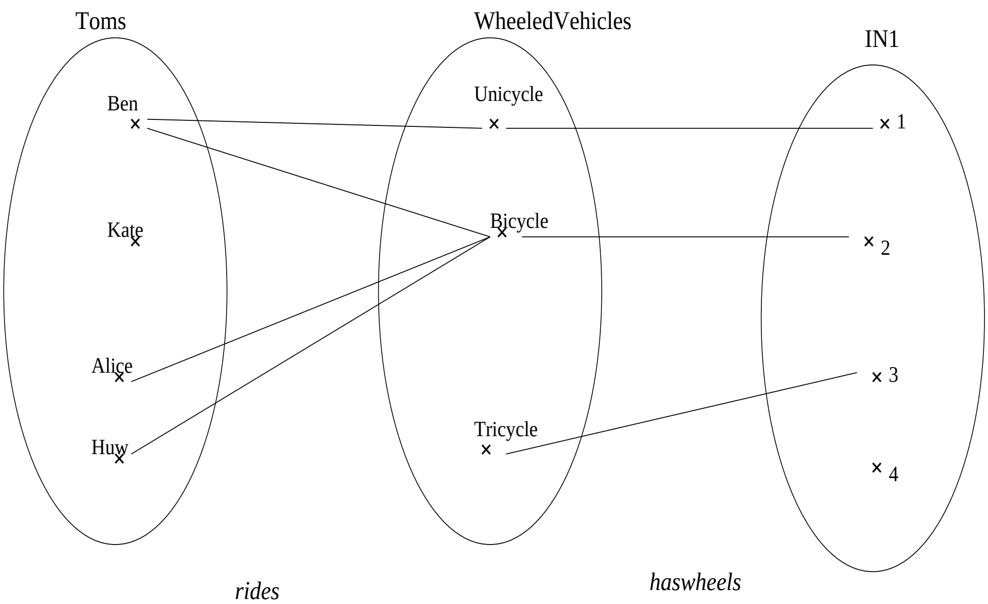
$rides : Toms \longleftrightarrow WheeledVehicles$

$haswheels : WheeledVehicles \longrightarrow \mathbb{N}1$

On voudrait construire une relation qui donne le nombre de roues du véhicule conduit par chaque élément de $Toms$.

1. Donnez la relation $ridesonwheels$ à l'aide de $rides$ et $haswheels$,
2. Donnez en extension $ridesonwheels$.

On donne le diagramme de Venn suivant :



Exercice 2

Quelles sont les relations définies par

1. $\{Alice\} \lhd (rides \fatsemi haswheels)$
2. $(\{Alice\} \lhd rides) \fatsemi haswheels$
3. $(rides \fatsemi haswheels) \ntriangleright \{2\}$
4. $(rides \fatsemi haswheels) \rhd \{2\}$
5. $\{Ben\} \lhd rides$
6. $rides \rhd \{Bicycle\}$

Qu'exprime-t-on avec

1. $dom(rides \rhd \{Bicycle\})$
2. $card(dom(rides \rhd \{Bicycle\}))$

Exercice 3

Déterminez

1. $rides[\{Ben,\ Alice\}]$
2. $rides[\{Kate,\ Alice\}]$
3. $rides^{-1}[\{Unicycle\}]$

Exprimez
– L'ensemble des personnes qui conduisent un Bicycle ;
– Le nombre de personnes qui conduisent un Unicycle ;
– L'ensemble des personnes qui ne conduisent pas d'Unicycle.

Exercice 4

Soient les ensembles suivants : LANG qui identifie un type de langage ;APPLI qui identifie des applications logicielles ; ANNEE qui représente des années.
Soient les relations suivantes :
– $langappli = \{(nx1, python), (ny2, java), (nx2, cobol), (nz2, .net), (nz1, java)\}$
– $anneeappli = \{(nx1, 2000), (ny2, 1999), (nx2, 1989), (nz2, 2003), (nz1, 2002)\}$

1. Calculez la relation qui exprime le produit direct : $langaplli \otimes anneeappli$
2. Dessinez les diagrammes de EULER-VENN correspondant aux trois relations.
3. Spécifier une opération qui permet de trouver toutes les applications développées en Java en l'an 1999 (plusieurs solutions possible : utilisez le produit direct ; utilisez une intersection)
4. Spécifiez une opération qui permet de trouver les applications développées en cobol et avant 2000.

Séquences

Exercice 1

Soit la séquence $s_1 = \langle Kate, Alice, Huw \rangle$

Expliciter graphiquement sous forme d'une fonction (Euler-Venn) la fonction s_1

Expliciter textuellement sous forme d'une fonction la fonction s_1.

Exercice 2

Voici quelques exemples de séquences :

$\langle\,\rangle$, $\langle Kate, Alice, Huw \rangle$

$\langle Ben \rangle$, $\langle Huw, Alice, Alice \rangle$

1. Donnez une expression ensembliste de $\langle Huw, Alice, Alice \rangle$.
2. En déduire la définition d'une séquence d'objets de type X.

Exercice 3

Soit $cafequeue : seq\ Toms$ avec
$cafequeue\ =\ \langle Kate, Alice, Huw\rangle$

1. Ecrivez les ensembles représentés par les notations de séquence suivantes :
   $\langle 3,\ 2,\ 1\rangle$
   $\langle\{Ben, Kate\}, \{Alice, Huw\}\rangle$
2. Ecrivez les séquences correspondant aux ensembles :
   $\{3 \mapsto Alice,\ 1 \mapsto Alice, 4 \mapsto Huw, 2 \mapsto Huw\}$
   $\{x : \mathbb{N} \mid 0 < x < 5 \bullet (x,\ x^2)\}$
3. Parmi les expressions suivantes, dites lesquelles représentent des séquences :
   $\{1 \mapsto 1\}$
   $\{0 \mapsto Huw, 1 \mapsto Alice\}$
   $cafequeue \backslash \langle\,\rangle$
   $cafequeue \cup \langle\,\rangle$
   $cafequeue \cup \{1 \mapsto Huw\}$

Exemples d'abstraction

Structures mathématiques (abstraites) | **Structures informatiques (concrètes)**

Structure abstraite
$\{r,\ s,\ t,\ u,\ v\}$

Une structure concrète correspondante

s	t	r	u	v

ou bien une liste chaînée

Structure abstraite
$\{(1, a), (2, c), (3, b), (4, e)\}$

Une structure concrète correspondante

a	c	b	e
1	2	3	4

Structure abstraite
$(c \wedge t_1) \vee (\neg c \wedge t_2)$

Une structure concrète correspondante
si c alors t_1 sinon t_2

Structure abstraite
$\{(Elise, 30),\ (Behia, 18),\ (Pierre, 36),\ (Glenn, 24)\}$

Une structure concrète correspondante

Behia	18
Glenn	24
Elise	30
Pierre	36