

Contribution à la définition de solutions pour traverser les singularités de contraintes

Rapport de Projet de Fin d'Etudes

présenté par

Josselin Briand

Pôle MMS / Master de recherche en robotique



Entreprise et / ou Laboratoire :

IRCCyN

Tuteur du laboratoire :

Sébastien Briot

Tuteur IFMA :

Nicolas Bouton

Date : 19 septembre 2014

Référence du fichier Josselin_Briand_2014_PFE.pdf

INSTITUT FRANÇAIS DE MECANIQUE AVANCEE

CAMPUS DE CLERMONT-FERRAND – LES CEZEAUX – BP 265 – AUBIERE CEDEX– FRANCE

TEL. +33 (0)4 73 28 80 00 – FAX +33 (0)4 73 28 81 00 – josselin.briand@ifma.fr – www.ifma.fr



FICHE D'IDENTIFICATION DU DOCUMENT

Rapport de Projet de Fin d'Etudes		
<p>TITRE DU DOCUMENT : Contribution à la définition de solutions pour traverser les singularités de contraintes</p> <p>Contribution to the development of solutions to cross constrain singularities</p>		
<p>AUTEUR(S) : Josselin Briand – Pôle MMS / Master de recherche en robotique</p>		
Date du document	Nbre de pages	Référence du document
19 septembre 2014	55	Josselin_Briand_2014_PFE.pdf
<p>ABSTRACT:</p> <p>This rapport presents my contribution to the development of solutions to cross constrain singularities. It present a latest development of crossing singularities, a study of the possibility to cross constrain singularities by studying the degeneration of the dynamic model, technological solutions for the crossing of constrain singularities for the change of mode of operation.</p>		
<p>Keywords: Robotics, Parallel robots, Constrain singularity,</p>		
<p>RESUME :</p> <p>Ce rapport présente ma contribution à la définition de solutions pour traverser les singularités de contraintes. Il présente un état de l'art de la gestion des singularités des robots parallèles, nous étudierons la possibilité de traverser les singularités de contrainte en étudiant la dégénérescence du modèle dynamique, puis nous montrons des solutions technologiques permettant le changement de mode d'opération.</p>		
<p>Mots clés : Robotique, Robots parallèles, Singularité de contrainte</p>		

SOMMAIRE

SOMMAIRE	5
AVANT-PROPOS.....	7
INTRODUCTION	9
NOMENCLATURE	11
CHAPITRE 1. PRESENTATION DE L'IRCCYN	13
1.1. Présentation générale	13
1.2. Organisation et structure.....	15
CHAPITRE 2. ETAT DE L'ART	17
2.1. Espace de travail des robots parallèles	17
2.2. Les robots à conception optimale et robots découplés (sans singularité).....	19
2.3. Les robots reconfigurables en utilisant la redondance du mécanisme.....	20
2.3.1. Actionnement redondant.....	21
2.3.2. Actionnement variable.....	22
2.3.3. Redondance cinématique	22
2.4. Les robots reconfigurables en changeant de mode de fonctionnement.....	23
2.5. Les robots reconfigurables en changeant de mode d'assemblage	25
2.5.1. Changement de mode d'assemblage non singulier (Contournement de points cusps)	25
2.5.2. Changement de mode d'assemblage singulier	26
CHAPITRE 3. TRAVERSEE DES SINGULARITES DE CONTRAINTES.....	29
3.1. Introduction	29
3.2. Modélisation du mécanisme.....	30
3.2.1. Mode parallélogramme	30
3.2.2. Mode anti-parallélogramme.....	33
3.3. Analyse de la dégénérescence du modèle dynamique.....	37
3.4. Création de trajectoire.....	38
3.5. Analyse des résultats	42
3.6. Conclusion.....	43

CHAPITRE 4. MECANISME PERMETTANT LA BIFURCATION DE MODE	45
4.1. Introduction.....	45
4.2. Solution 1	45
4.3. Solution 2	47
4.4. Solution 3	47
4.5. Solution 4	48
4.6. Conclusion	48
CHAPITRE 5. OBSERVATION PERSONNELLE	49
CONCLUSION GENERALE	51
BIBLIOGRAPHIE	53

AVANT-PROPOS

Je voudrais remercier M. Sébastien Briot pour l'aide qu'il m'a apporté tout au long de ce stage. Je voudrais remercier également M. Ilian Bonev qui m'a accordé un peu de son temps.

INTRODUCTION

Dans le cadre de mon projet de fin d'étude IFMA et de mon stage de master de recherche en robotique, j'ai effectué un stage de 6 mois à l'Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes (IRCCyN). Ce stage a pour but d'étudier et de comprendre les singularités de contraintes des robots parallèles. L'objectif de cette étude est d'augmenter l'espace de travail opérationnel des robots parallèles pour répondre à une pression économique et industrielle importante. En effet, la plupart des entreprises sont contraintes de modifier rapidement leurs moyens de production (outils, machines-outils, robots sériels et parallèles, ...) pour assurer une cadence de production élevés, performante, obtenir une meilleure capacité de production et une grande flexibilité.

Les robots manipulateurs parallèles présentent de nombreux avantages en termes de capacités d'accélération et de ratio charge-utile/poids, mais un de leurs principaux inconvénients concerne la présence de singularités qui divisent l'espace de travail dans différents aspects, chaque aspect correspondant à l'un (ou plusieurs) mode d'assemblage.

Afin d'augmenter la taille de l'espace de travail des robots parallèles (en grande partie réduit par la présence de singularités), plusieurs solutions ont été proposées. Une solution prometteuse consiste à définir des trajectoires optimales qui garantissent la non-dégénérescence du modèle dynamique dans la singularité et donc qui sont capables de traverser les singularités de Type 2, ce qui permet le passage d'un mode d'assemblage donné à un autre. Ces travaux commencent maintenant à être bien traités [Briot, 2007], [Rakotomanga and Bonev, 2010].

Une nouvelle tendance de recherche est d'agrandir l'espace de travail des robots parallèles par la définition de solution pour traverser les singularités de contrainte. Pour les robots parallèles avec une mobilité réduite (avec un nombre de degrés de liberté inférieur à 6), différents modes d'opération peuvent exister. Ces différents modes sont séparés par des singularités de contrainte. Or on ne sait pas traverser les singularités de manière automatique car le modèle dynamique dégénère sur ces singularités. Ce qui conduit à la création d'efforts dans les liaisons à proximité de ces singularités.

Ainsi, de manière similaire à ce qui a été fait pour le passage des singularités de Type 2 nous allons étudier la possibilité de définir des trajectoires optimales qui garantissent la non-dégénérescence du modèle dynamique dans ces singularités. Cela est intéressant car la traversée des singularités de contraintes permet de reconfigurer un robot en changeant son mode d'opération, ce qui démultiplie les utilisations de ces robots parallèles en étendant la variété de produit et donc de répondre aux besoins industriels.

Les singularités de contraintes ont été mises en évidence par les Docteurs Dimiter Zlatanov et Ilian Bonev en 2001 dans [Zlatanov and Bonev, 2001] et [Zlatanov and Bonev, 2002]. Elles correspondent à des positions pour lesquelles le mécanisme gagne un degré de liberté supplémentaire et séparent les modes d'opérations pour lesquels la mobilité du mécanisme change. Aujourd'hui le problème de traverser ces singularités n'a toujours pas été traité. Cependant, passer d'un mode d'opération à un autre est très intéressant car cela permet de changer la mobilité du mécanisme.

Ce stage a pour objectif de lancer des travaux de recherche sur ce problème et de trouver des solutions permettant la traversée des singularités de contrainte. Pour cela, on va s'appuyer sur l'étude

d'un mécanisme 4 barres en parallélogramme qui en traversant sa configuration singulière permet une bifurcation du mode parallélogramme à celui anti-parallélogramme. Notons que dans le cas du système 4 barres, il ne s'agit pas d'une singularité de contrainte à proprement parler mais d'une singularité de l'espace articulaire. Cependant le comportement du mécanisme après la traversée de cette singularité est analogue à une singularité de contrainte. En effet on observe également un changement de mobilité.

Ce rapport présente dans un premier temps l'IRRCyN où le stage a été effectué ce stage, puis dans une seconde partie montre le contexte de recherche actuel grâce à un état de l'art sur l'augmentation de l'espace de travail opérationnel des robots parallèles. Ensuite une troisième partie nous présente le résultat du travail de recherche sur le changement de mode d'opération par étude de la dégénérescence du modèle dynamique. Le rapport présente dans une quatrième partie des solutions permettant changement de mode d'opération en utilisant d'autres méthodes. Et le rapport se termine par mes observations personnelles effectuées lors ce stage.

NOMENCLATURE

Pour réaliser mes modèles et écrire mes équations, j'ai utilisé les notations suivantes :

x_i : Position suivant x du point i , $i = [a, b, c, d]$

y_i : Position suivant y du point i , $i = [a, b, c, d]$

\dot{x}_i : Vitesse suivant x du point i , $i = [a, b, c, d]$

\dot{y}_i : Vitesse suivant y du point i , $i = [a, b, c, d]$

\ddot{x}_i : Accélération suivant x du point i , $i = [a, b, c, d]$

\ddot{y}_i : Accélération suivant y du point i , $i = [a, b, c, d]$

f_{xij} : Effort de liaison de i sur j suivant x

f_{yij} : Effort de liaison de i sur j suivant y

C_m : Couple moteur

q_i : Angle entre i et 0

\dot{q}_i : Vitesse angulaire de i par rapport à 0

\ddot{q}_i : Accélération angulaire de i par rapport à 0

m_i : Masse du corps i

g : Accélération de la pesanteur = 9.80665

I_i : Moment d'inertie (en G_i) de la barre i suivant z

CHAPITRE 1. PRESENTATION DE L'IRCCYN

1.1. Présentation générale

L'IRCCyN : « Institut de Recherche en communication et Cybernétique de Nantes » est une Unité Mixte de Recherche du CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique), UMR CNRS 6597, rattachée principalement à l'Institut des Sciences de l'Information et de leurs Interactions (INS2I), ainsi qu'à l'Institut des Sciences de l'Ingénierie et des Systèmes (INSIS) et l'Institut des Sciences Biologiques (INSB). Ses tutelles locales sont : « Ecole Centrale de Nantes », « Université de Nantes » et « Ecole des Mines de Nantes ». L'IRCCyN est membre de deux fédérations de recherche : AtlanSTIC (Fédération de recherches en Science et Technologies de l'Information et de la Communication, CNRS 2819) etIRSTV (Institut de Recherche en Sciences et Technique de la Ville, CNRS 2488).



L'IRCCyN est géographiquement réparti, à la fois pour ses bureaux et ses plates-formes, sur plusieurs sites Nantais de ses trois tutelles locales. Le bâtiment principal, qui regroupe environ 160 personnes, est situé sur le campus de l'Ecole Centrale de Nantes, avec un hall d'expérimentations principal, un amphithéâtre et des salles de réunions et d'informatique communes. Les trois autres sites sont : PolytechNantes, site de la Chantrerie ; IUT de Nantes, site de la Fleuraye, Ecole des Mines de Nantes, site de la Chantrerie.

L'IRCCyN fut créé en 1958 à l'ENSM (Ecole Nationale Supérieure de Mécanique, devenue Centrale Nantes en 1991), par le Professeur Romane Mezencev a été associé au CNRS pour la première fois en 1968. Il comptait alors une vingtaine de personnes. Il y avait alors à Nantes deux unités associées au CNRS : le laboratoire de chimie de Jean Rouxel (qui deviendra plus tard l'IMN) et le laboratoire d'Automatique de Romane Mezencev (qui deviendra plus tard l'IRCCyN). Les années passèrent et le laboratoire d'Automatique s'étoffait en termes de thématiques scientifiques, notamment grâce à l'arrivée de nouveaux enseignants-chercheurs de l'université et de personnels CNRS. A la fin des années 80, il comptait environ 50 personnes, thésards compris.

L'IRCCyN se focalise sur le développement de méthodes et d'outils destinés à apporter des solutions à des problèmes concrets qui émergent des acteurs économiques et sociaux. Cette politique volontariste permet notamment d'avantager le développement des entreprises industrielles et sociétés de services. En retour, cette politique est la source des problématiques de recherche amont qui sont investiguées par les chercheurs de l'IRCCyN.

Les recherches et les actions de valorisation qui sont développées à l'IRCCyN couvrent un spectre scientifique très large qui englobe :

- l'automatique des systèmes complexes
- le traitement du signal et des images
- la vidéo communication et le traitement de l'écriture manuscrite
- la robotique et les systèmes mécaniques articulés
- la conception mécanique assistée par ordinateur
- la conception orientée client
- la modélisation et l'optimisation de process de production
- l'ingénierie virtuelle pour l'amélioration des performances industrielles
- les systèmes temps réel
- la modélisation et la vérification des systèmes embarqués
- la bio-informatique
- les systèmes logistiques et de production
- les systèmes à évènements discrets
- la psychologie cognitive et l'ergonomie

L'IRCCyN développe une forte stratégie de coopération internationale institutionnalisée, en particulier avec le Mexique, la République Tchèque, la Chine, la Corée, la Pologne, l'Italie, l'Afrique du sud, la Malaisie, les Etats-Unis, la Russie, et l'Espagne. Sur le volet « formation à et par la recherche », l'IRCCyN joue un rôle essentiel dans les études de troisième cycle de ses tutelles par un flux conséquent de masters recherche et de doctorants. L'IRCCyN est associé à 3 Ecoles Doctorales pour ses différentes activités :

- dans les STIC à l'école STIM (Sciences et Technologies de l'Information et de Mathématiques, ED 366, Université de Nantes),
- dans la mécanique à l'école SPIGA (Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture, ED 367, Ecole Centrale de Nantes), et
- dans les interactions homme-machine à l'école CLC jusqu'en 2008 (Connaissances, Langages, Cultures, ED 80, Université de Nantes) et SHS depuis 2008 (Sciences Humaines et Sociales, ED 507, Université de Rennes 2).

L'IRCCyN compte 260 personnes : 98 enseignants chercheurs et chercheurs (dont 12 du CNRS), 18 ingénieurs, techniciens et administratif (dont 13 du CNRS), ainsi que 105 doctorants, et 24 autres contractuels (dont 6 post-doc).

1.2. Organisation et structure

L'institut a à sa tête un directeur nommé pour 4 ans (1 fois renouvelable), secondé par un directeur adjoint.

Directeur de l'IRCCyN (depuis 2008) : Michel Malabre, Directeur de recherche au CNRS.

Directeur Adjoint de l'IRCCyN (depuis 2010) : Franck Plestan, Professeur Ecole Centrale de Nantes.

L'IRCCyN s'est doté d'un règlement intérieur qui régit son organisation et son fonctionnement.

La direction s'appuie sur un Comité de Direction (CODIR), un conseil de l'Unité Mixte et un Comité d'Orientation et de Surveillance (COS).

La recherche à l'IRCCyN est structurée en onze équipes, et en support mutualisé un service technique et logistique, un service informatique ainsi qu'un service administratif.

- Equipe Commande
- Equipe Image Vidéo Communication (IVC)
- Equipe Analyse et Décision en Traitement du Signal et de l'Image (ADTSI)
- Equipe Modélisation et Optimisation de Process de Production (MO2P)
- Equipe Robotique
- Equipe Ingénierie des Systèmes, Produits, Performances, Perceptions (IS3P)
- Equipe Systèmes Logistiques et de Production (SLP)
- Equipe Analyse et Commande des Systèmes à Evénements Discret (ACSED)
- Equipe Systèmes Temps-Réel (STR)
- Equipe Méthodes pour la bio-informatique (MeForBio)
- Equipe Psychologie Cognition Technologie (PsyCoTec)

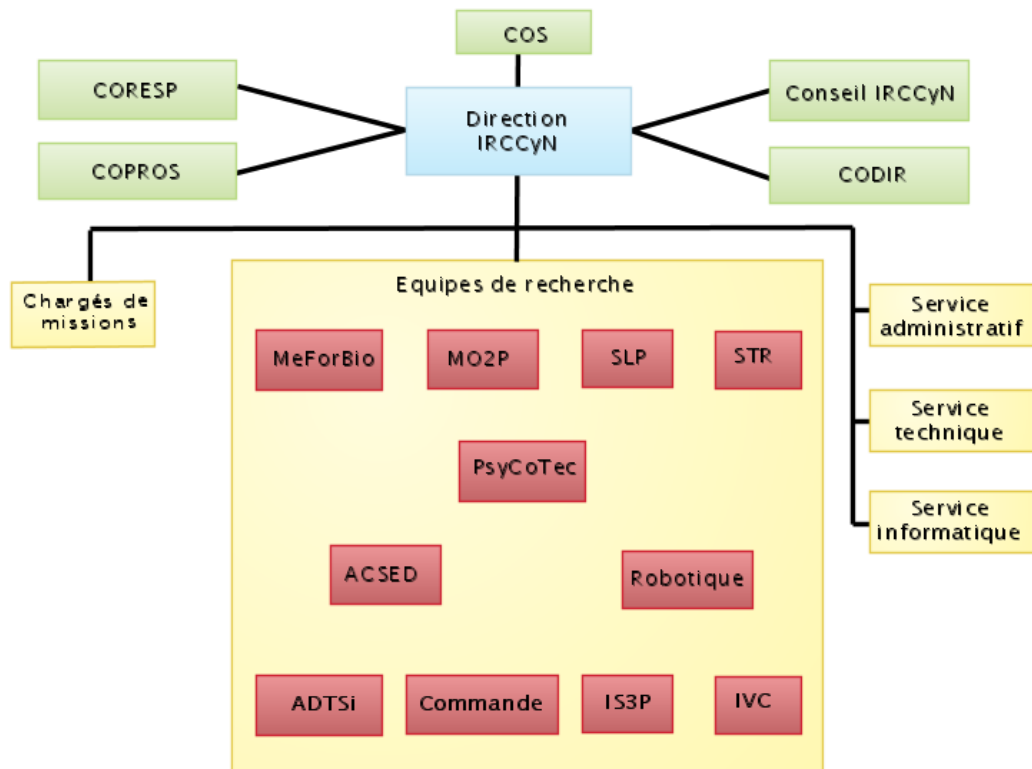


Figure 1: Organigramme de l'IRCCyN

Comité de Direction (CODIR)

Le Comité de Direction, constitué à l'initiative de Directeur et du Directeur Adjoint, est chargé d'analyser la cohérence du développement scientifique de l'institut, notamment à travers les grandes orientations de sa politique générale, en adéquation avec la stratégie nationale du CNRS et la politique des établissements d'enseignement supérieur. Il est une aide pour la représentation de la direction, notamment auprès des tutelles et collectivités locales.

Il est composé :

- Du Directeur et du Directeur Adjoint
- De 3 scientifiques confirmés.

Conseil de l'unité

Le Conseil de l'Unité est régi par les règles en vigueur définies dans le cadre de la contractualisation des unités de recherches associées au CNRS. Il est composé de la façon suivante :

- Directeur et Directeur Adjoint
- 9 membres élus (dont 5 chercheurs ou enseignants-chercheurs permanents, 2 chercheurs non permanents, et 2 IT)
- 5 membres nommés

La durée du mandat des membres du conseil de l'unité est de 5 ans.

Comité d'Orientatation et de Surveillance (COS)

Le Comité d'Orientatation et de Surveillance est composé :

- des présidents et directeurs des établissements d'enseignement supérieur impliqués dans l'IRCCyN en tant que tutelles locales,
- du délégué régional du CNRS de la circonscription Bretagne Pays de Loire, en tant que tutelle nationale.

Le comité d'orientation et de surveillance se réunit au moins une fois par an. Il analyse avec la direction de l'IRCCyN les prestations de l'UMR au niveau de toutes ses missions : recherche scientifique, formation, liens avec le milieu socio-économique, valorisation. Il analyse notamment l'impact de l'IRCCyN aux niveaux international, national et régional. A partir des résultats de cette analyse, il fait toutes recommandations utiles à la direction de l'IRCCyN pour son développement. Il est également une instance de concertation pour les établissements d'enseignement supérieur signataires quant à la définition des moyens apportés par chacun pour l'année à venir, en plus du cadre de la contractualisation.

CORESP : Comité des responsables.

COPROS : Comité de prospective.

CHAPITRE 2. ETAT DE L'ART

Nous avons vu précédemment dans l'introduction que l'augmentation de l'espace de travail des robots parallèles est un enjeu important dans le domaine de la robotique. En effet, les modèles cinématique et dynamique étant liés, cela engendre l'apparition de singularités ce qui détermine la taille de l'espace de travail opérationnel. De nombreuses recherches ont visé à augmenter cet espace de travail. Ce chapitre a pour objectif de regrouper ces études qui sont divisés en quatre catégories : une conception de robots parallèles sans singularité, l'utilisation de la redondance, la planification de trajectoire pour changer le mode de fonctionnement, la planification de trajectoire pour changer le mode de d'assemblage.

Une notion importante est nécessaire pour comprendre ce rapport. Il s'agit de la différence entre mode de fonctionnement, mode d'assemblage et mode d'opération :

- Un mode de fonctionnement d'un mécanisme est défini par la position des articulations en fonction de la position de l'effecteur. Si le mécanisme à plusieurs modes de fonctionnement, pour une position et orientation de l'effecteur donnée, il existe plusieurs configurations articulaires possibles. Les modes de fonctionnement sont de manière générale séparés par des singularités sérielles.
- Un mode d'assemblage d'un mécanisme est défini par la position de l'effecteur en fonction de la configuration des articulations. Si le mécanisme à plusieurs modes d'assemblage, pour une configuration articulaire donnée, il existe plusieurs positions et orientations de l'effecteur possibles. Les modes d'assemblage sont de manière générale séparés par des singularités parallèles. Cependant cela n'est pas toujours vrai notamment dans le cas où il existe des points cusp dans l'espace de travail (voir 2.5.1).
- Le mode d'opération est similaire au mode d'assemblage, à une position articulaire donnée, il existe plusieurs configurations de l'effecteur possibles mais le mécanisme à une mobilité différente d'un mode à l'autre. Les espaces des modes d'opération sont délimités par des singularités de contrainte.

2.1. Espace de travail des robots parallèles

Avant de regrouper ces différentes études, une définition de l'espace de travail est nécessaire. L'espace de travail d'un robot parallèle correspond au volume total parcouru par l'effecteur, ou la plateforme mobile dans le cas de certain robot. L'espace de travail est donc déterminé par les limites géométriques du manipulateur ainsi que les limites des articulations. Dans le cas des robots parallèles, l'espace de travail peut être divisé en différents aspects [Wenger and Chablat, 1997] et les frontières des différents aspects sont les positions singulières. Autrement dit, un aspect est un espace libre de toute position singulière. Il est aujourd'hui difficile de déterminer le lieu de ces singularités pour les robots à plus de trois degrés de liberté. De plus les robots parallèles ne peuvent pas toujours passer d'un aspect à un autre sans prendre en compte leur dynamique, ils sont donc limités à une partie de leur espace total que l'on appelle espace de travail opérationnel.

Les robots parallèles ont plusieurs types de singularités dont les principales sont:

- Les singularités de Type 1 (appelées aussi singularités sérielles) qui se situent en général aux extrémités de l'espace de travail et donc ne le séparent pas en différents aspect. Dans une singularité de Type 1, le robot perd la capacité de déplacer l'organe terminal dans une direction précise (perte d'un degré de mobilité).
- Les singularités de Type 2 (appelées aussi singularités parallèles). Dans le voisinage d'une singularité de Type 2, le robot gagne un ou plusieurs degrés de mobilité, cette ou ces mobilités sont incontrôlables ce qui impacte fortement la précision du mécanisme.
- Les singularités de Type 3, ces singularités sont une combinaison de singularité de Type 1 et de singularité de Type 2.
- Les singularités de contraintes. Tout comme les singularités de Type 2, le mécanisme gagne un ou plusieurs degrés de mobilités, mais dans le cas des singularités de contraintes, le mécanisme peut changer de mode d'opération en passant la singularité et la mobilité du mécanisme change aussi.

Pour montrer l'impact de des singularités les plus générales (Type 1 et Type 2) sur l'espace de travail, on va prendre pour exemple le cas du mécanisme plans 5R (robot 5 barres). La figure 2 représente les différents aspects d'un mécanisme 5R (en ne prenant pas en compte les collisions mécaniques). Pour chacun des quatre modes de fonctionnement, il existe deux modes d'assemblage (le premier en blanc et le second en jaune), ces deux modes sont séparés par une singularité de Type 2 (appelé aussi singularité parallèle) représenté en rouge. Les singularités de Type 1 (en noir) délimitent l'espace de travail total. Comme on peut le constater, l'espace de travail opérationnel est largement inférieur à l'espace de travail total du mécanisme.

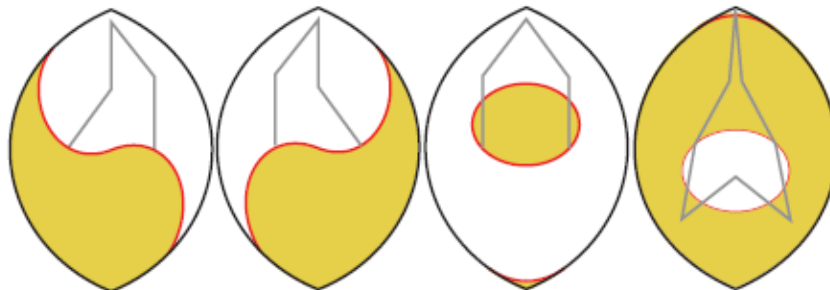


Figure 2: Mode de fonctionnement du robot 5R. Singularité de Type 1 (noir), Type 2 (rouge), modes d'assemblages (blanc et jaune).

Pour pallier à cette faiblesse, de nombreuses études visent à augmenter l'espace de travail. Quatre familles principales de solutions existent :

- Les robots dont la conception est optimisée afin de ne pas avoir de singularités dans leur espace de travail: il s'agit de robots parallèles dont la conception est dite optimale [Gogu, 2004], [Kong and Gosselin, 2002,], [Briot et al., 2010. Parmi ces robots, on notera une famille dite de "robots découplés" [Gogu, 2004], [Kong and Gosselin, 2002,] Ces solutions permettent de créer des robots sans singularités mais au dépend de leur rigidité.
- Les robots reconfigurables grâce leurs mode d'actionnement : trois approches consistent à permettre à un mécanisme de changer sa morphologie, ce qui lui permet de d'augmenter le volume de l'espace de travail opérationnel : (i) mécanismes à

actionnement redondant, (ii) mécanismes à cinématique redondante, (iii) mécanismes à actionnement variable.

- La première solution rend le mécanisme redondant ce qui permet de supprimer les singularités du point de vue de la commande.
- La seconde approche consiste à changer de mode de fonctionnement. La dernière approche consiste à changer de mode d'assemblage.

2.2. Les robots à conception optimale et robots découplés (sans singularité)

Afin d'éviter la présence de singularités dans l'espace de travail, l'approche la plus classiquement proposée consiste à trouver une conception optimale du robot [Luh, 1996] [Gogu, 2004]. Dans [Briot et al., 2010], un algorithme d'optimisation d'autres paramètres de conception est proposé pour augmenter l'espace de travail opérationnel. Cet algorithme prend en compte des critères de rigidité et de déformation. Les figures 3 et 4 présentent des exemples de robot à conception optimale.

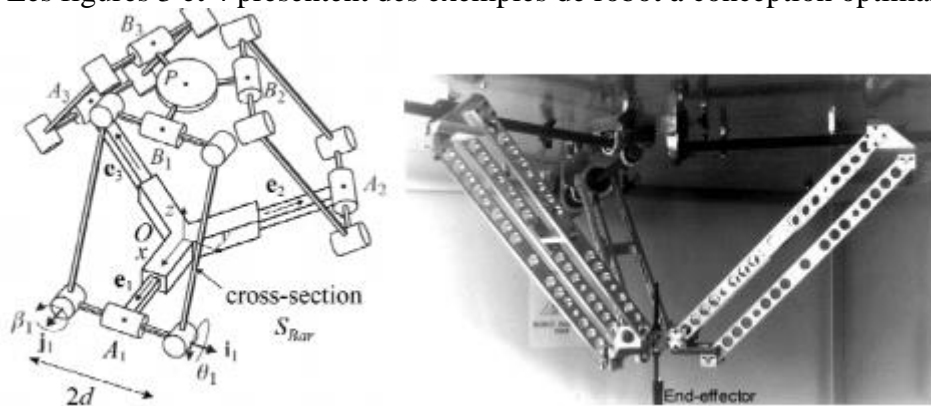


Figure 3: Le robot Y-STAR, schéma cinématique et prototype.

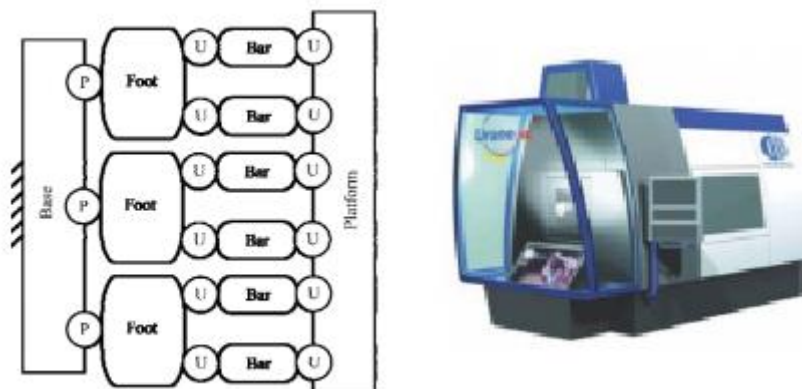


Figure 4: Le robot UraneSX, schéma cinématique et prototype

Une autre approche consiste à synthétiser des mécanismes qui, d'un point de vue architectural, n'ont pas de singularités. On appelle ces mécanismes "robots découplés", puisque d'un point de vue cinématique, leurs lois entrée / sortie sont linéaires et découplées.

Ainsi le Tripteron est l'un des premiers robots découplés (représenté sur la Figure 5) développé par Gosselin et Kong au laboratoire de robotique de l'université Laval [Kong and Gosselin, 2002, Gosselin, 2009]. Ce mécanisme possède trois degrés de liberté en translation, chaque degré étant actionné par un actionneur linéaire.



Figure 5: Robot Tripteron du laboratoire de robotique de l'université de Laval

Des architectures similaires ont été développées dans [Gogu 2004, Gosselin, 2009]. Ce type d'architecture permet donc d'avoir un modèle cinématique linéaire, proche de ceux des mécanismes sériels cartésiens. Ces mécanismes ont donc une modélisation simple tout en ayant leurs moteurs supportés par la base, un des avantages majeur des structures parallèles. Cependant, le découplage total des degrés de liberté rend le mécanisme peu rigide. De plus, la taille de l'espace de travail des robots découplés reste faible et leur architecture cinématique est difficilement réalisable. On admet désormais généralement que le découplage total ne permet pas de créer des mécanismes assez raides pour être une solution viable.

Afin de simplifier la modélisation des robots parallèles tout en conservant une rigidité importante, une autre classe de manipulateurs découplés a été créée : les robots PAMINSA [Arakelian et al., 2006]. Ces architectures proposent un compromis entre le découplage et la conservation de sa rigidité.

Les mécanismes partiellement découplés proposent donc une alternative intéressante aux robots entièrement découplés. Leur conception n'est cependant pas triviale. Ces mécanismes permettent donc de répondre à des problématiques spécifiques que les mécanismes parallèles non découplés ne peuvent réaliser, mais il ne s'agit que de cas particulier. D'autres solutions plus générales sont donc recherchées.

2.3. Les robots reconfigurables en utilisant la redondance du mécanisme

On s'intéresse dans la partie suivante aux robots capables de modifier leur morphologie : les robots reconfigurables.

2.3.1. Actionnement redondant

En position singulière, la plate-forme perd un degré de liberté. Une solution intuitive est de rajouter des actionneurs redondants [Dasgupta and Mruthyunjaya, 1998, Cheng et al., 2003]. L'ajout d'actionneurs permet d'obtenir un système redondant hors singularités, ce qui permet de supprimer les singularités du point de vue de la commande [Arakelian et al., 2008, Glazunov et al., 2004, Alvan and Sloush, 2003].

Pour illustrer ce principe, on s'intéresse à un mécanisme 3-RRR (voir figure 6). Ce mécanisme à trois degrés de liberté et les trois actionneurs sont situés aux points C_1 , C_2 et C_3 .

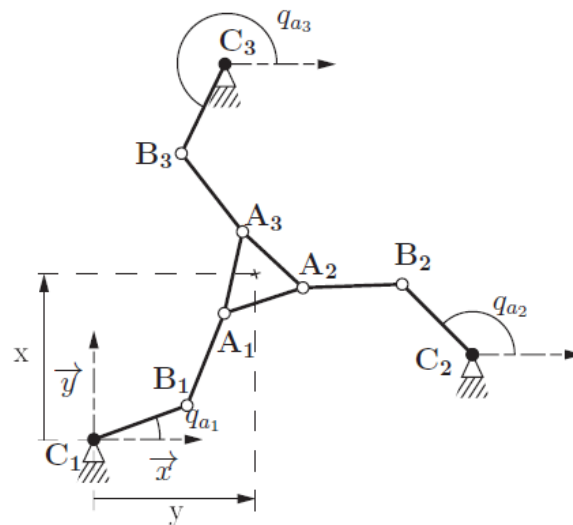


Figure 6: Architecture du mécanisme 3-RRR

Ce mécanisme a été étudié à de nombreuses reprises [Arakelian et al., 2008, Chablat, 2008] en particulier pour les propriétés de ses singularités.

Par exemple le LIRMM (Laboratoire d'informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier) a conçu le DUAL V (voir figure 7). Le DUAL V est un mécanisme 4-RRR redondant conçu pour la manipulation de haute précision à haute vitesse. L'ajout d'une jambe permet de modifier la morphologie du mécanisme. Elle n'est pas utile dans pour le fonctionnement de base mais elle permet d'éviter la présence de singularités dans l'espace de travail.

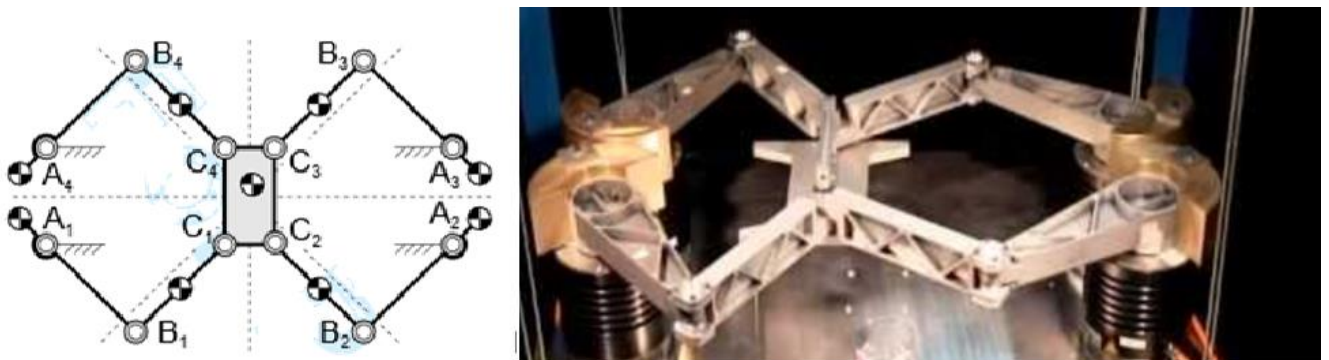


Figure 7: Architecture de 4-RRR V et prototype DUAL V du LIRMM

La redondance en actionnement a pour avantage d'être applicable à n'importe quel mécanisme, il est même envisageable d'ajouter des actionneurs sur des robots déjà existants. Cependant cette solution est très onéreuse, les actionneurs représentant une partie importante du coût d'un robot. De plus, la gestion de la redondance en actionnement est un problème complexe qui complique considérablement la commande du robot.

2.3.2. Actionnement variable

Les mécanismes à actionnements variables furent proposés dans [Arakelian et al., 2008] pour les mécanismes plans et dans [Arakelian et al., 2007] pour des mécanismes spatiaux. Un ou plusieurs actionneurs du mécanisme ont la possibilité de changer de mode d'actionnement. Ce changement engendre une modification du lieu des singularités rendant accessible tout l'espace de travail

Pour une architecture donnée, il existe plusieurs manières de mettre en place des actionnements variables. Une méthodologie de calcul de l'architecture à actionnement variable optimale est proposée dans [Arakelian et al., 2008]. Dans le cas du mécanisme 3RRR, l'architecture optimale proposée est représenté sur la figure 8.

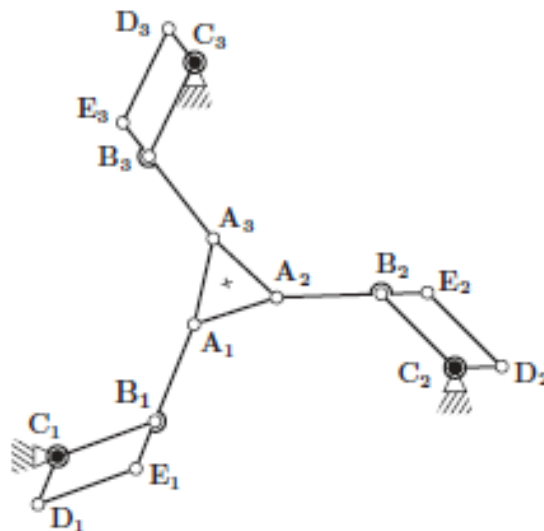


Figure 8: Mécanisme 3RRR avec actionnement variables [Arakelian et al., 2008]

Le changement de mode d'assemblage se fait en plusieurs étapes. Lorsque le mécanisme est proche d'une position singulière, celui-ci s'arrête. Son mode d'actionnement est modifié, de sorte que la position inaccessible avec le premier mode d'actionnement devienne une position accessible. Bien que cette méthode soit efficace, le changement de mode d'actionnement est relativement long et ne peut se faire qu'à l'arrêt.

2.3.3. Redondance cinématique

Tout comme la redondance en actionnement, la redondance cinématique nécessite l'ajout d'actionneurs, mais cette solution permet de limiter l'impact des singularités sur l'espace de travail. Cependant, la redondance cinématique modifie les degrés de liberté interne, le principe étant de rajouter des liaisons dans les jambes déjà existantes. Dans [Wang and Gosselin, 2004], les auteurs étudient 3 mécanismes redondants cinématiquement : un mécanisme plan 3RPR, un mécanisme sphérique à 3 degrés de liberté et une plate-forme de Stewart (6 degrés de liberté). Seul l'exemple du mécanisme 3RPR sera présenté ici.

Au mécanisme 3RPR (voir figure 9), on ajoute un quatrième actionneur en B1 et en rajoutant un degré de liberté (voir figure 10) par l'intermédiaire de la liaison en A'1, on obtient un mécanisme qui a autant de degrés de liberté que d'actionneurs, et une telle architecture n'engendre donc pas d'efforts internes.

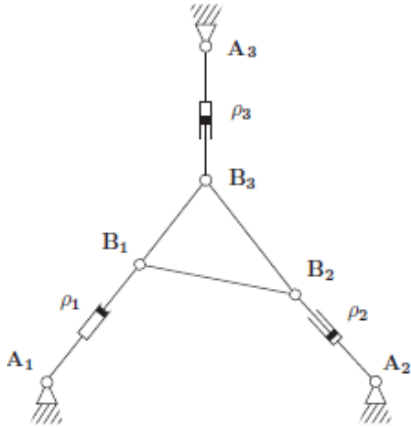


Figure 9 : Schéma cinématique d'un mécanisme 3RPR

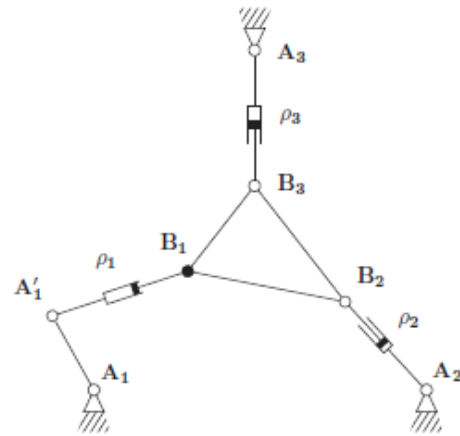


Figure 10: Architecture du mécanisme 3RPR avec redondance cinématique



Figure 11: Prototype de mécanisme redondant 3(P) RRR de l'Institut des Système Mécatroniques de Hannover

En étudiant les propriétés de ces mécanismes et de leurs matrices cinématiques, les auteurs de [Wang and Gosselin, 2004, Kong et al., 2013] ont montré que ces mécanismes étaient très efficaces pour éviter les singularités comparé à leurs homologues sans redondance cinématique. Finalement cette solution, très étudiés pour les mécanismes sériels, est assez peu utilisée. Tout comme la redondance en actionnement, l'ajout d'actionneur est coûteux.

2.4. Les robots reconfigurables en changeant de mode de fonctionnement

Toujours dans le but d'augmenter l'espace de travail opérationnel, des études ont réalisé sur la création d'une trajectoire pour traversées les singularités de Type 1 grâce à une commande adaptée [Alba et al., 2007, Bourbonnais et al., 2014]. Cette traversée permet d'accéder à de nouveaux modes de fonctionnements, chaque mode ayant ses propres singularités de Type 2 donc des frontières différentes. Ce type de commande permet par exemple dans le cas d'un robot 5R (5 barres) en figure 12 de passer d'un mode de fonctionnement coude haut à coude bas.

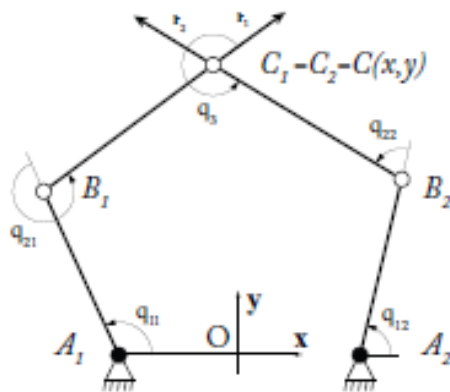


Figure 12: Cinématique d'un mécanisme 5R

Dans le cas du robot 5 barres (5R), traverser une singularité sérielle change donc l'espace de travail opérationnel (hors singularité de Type 2). La figure 13 représente différentes étapes de la traversée de singularité sérielle extraites d'une vidéo du laboratoire CoRo (laboratoire de Commande et de Robotique)



Figure 13: Extraits vidéo de changement de mode de fonctionnement d'un robot DeXtaR du laboratoire CoRo de l'ETS Montréal

Le changement de mode de fonctionnement permet donc d'accéder à des espaces non accessibles dans un seul mode de fonctionnement. L'inconvénient principal de cette solution est la nécessité d'atteindre une position singulière souvent éloignée de la trajectoire optimale car les singularités sérielles se situent en bordure de l'espace de travail.

2.5. Les robots reconfigurables en changeant de mode d'assemblage

2.5.1. Changement de mode d'assemblage non singulier (Contournement de points cusps)

Un mécanisme peut avoir plus de deux solutions à son modèle géométrique directe. Un point cusp est une position telle qu'au moins trois des différents modes d'assemblages sont confondus [McAree, 1999]. Le contournement de point cusp est une manière efficace de changer le mode d'assemblage du mécanisme, elle a pour principal inconvénient de ne pas être applicable à tout type d'architecture parallèle.

Le principe est de créer une trajectoire qui permet de passer d'un mode d'assemblage à un autre sans passer par une position singulière. Le mécanisme 3RPR et ses points cusps ont été beaucoup étudiés [Zein et al., 2006],[Bonev et al., 2008], [Moroz et al., 2010],[Manubens et al., 2012] et sera ici utilisé pour illustrer le contournement de point cusps.

Sur la figure 14 le point P représente un point cusp du mécanisme, les point A_1 , A_2 et A_3 représentent les 3 positions possibles de l'effecteur pour une position A' . L'angle θ définit l'orientation de la plateforme par rapport au repère global. La trajectoire (en rouge) est créée en pilotant les actionneurs ρ_1 et ρ_2 . Les limites de chaque « pli » correspondent aux lieux des singularités de Type 2, puisque deux modes d'assemblages y sont concourants.

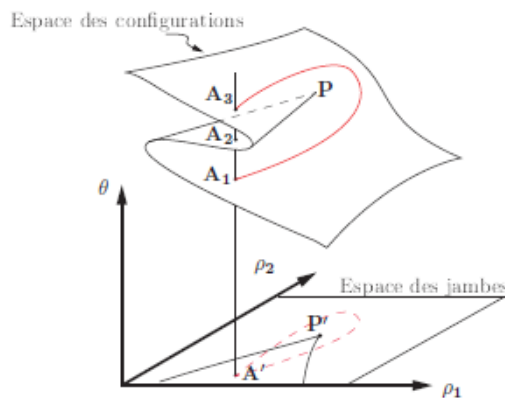


Figure 14: Exemple de trajectoire contournant un point cusp

On remarquera que, outre le fait que cette solution ne soit pas applicable à de nombreux mécanismes, le calcul des points cusps est complexe. Des méthodes algébriques permettant de déterminer l'ensemble des points cusps de certains mécanismes existent (exemple du 3RPR : [Moroz et al., 2010]), cependant aucune méthode générique n'existe. De plus, les trajectoires de contournement de point cusps peuvent être longues et de ce fait inutilisables pour des applications (*pick-and-place*, ...).

De manière similaire au contournement de point cusp, des travaux [Murray et al., 2010] ont été réalisés sur la création d'une trajectoire permettant à un mécanisme à 5 degrés de liberté : le Gantry-Tau [Johannesson et al., 2004], de changer de mode d'assemblage sans passer par une singularité de Type 2.

Cependant, cette méthode ne permet pas d'augmenter l'espace de travail opérationnel du mécanisme à proprement parlé, le mécanisme ne pouvant pas suivre une trajectoire quelconque allant

d'un mode d'assemblage à un autre. De plus rien ne tend à prouver que ce type de trajectoire existe pour d'autres mécanismes.

2.5.2. Changement de mode d'assemblage singulier

La dernière approche consiste à créer une trajectoire qui traverse la singularité de Type 2 [Briot et al., 2008]. Cette méthode s'appuie sur l'étude de la dégénérescence du modèle dynamique lors de l'approche de la singularité de Type 2. Dans [Briot et al., 2008], il a été démontré que cette dégénérescence n'est pas dû uniquement à la dynamique du mécanisme, mais dépend aussi de la trajectoire suivie par l'effecteur. La figure 15 représente un mécanisme 5R en position singulière de Type 2. Les efforts appliqués par les moteurs en A_1 et A_2 engendrent des forces r_1 et r_2 sur l'effecteur. Ici, ces forces sont colinéaires : pour contrer un effort quelconque suivant la direction t_s , les efforts appliqués par le mécanisme sur l'effecteur r_1 et r_2 doivent donc être définis.

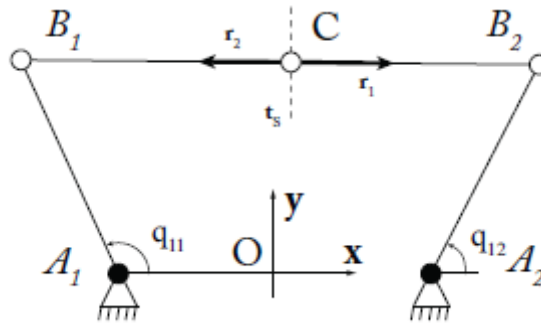


Figure 15: Mécanisme 5R en position singulière

Le mécanisme a donc un mouvement incontrôlable suivant la direction t_s . De ce fait, si la trajectoire désirée nécessite que des efforts soient appliqués suivant la direction t_s lors de la traversée, le modèle dynamique dégénère et les efforts des actionneurs divergeront.

En revanche, si la trajectoire à suivre est calculée de sorte que lorsque le mécanisme atteint la position singulière, les efforts $r_{1\text{desiree}}$ et $r_{2\text{desiree}}$ sont orthogonaux à la direction du mouvement incontrôlable, le modèle dynamique ne dégénère pas. Cette condition se traduit par la relation analytique :

$$t_s^T W_p = 0 \quad (1)$$

Où W_p est le torseur des efforts appliqués sur l'effecteur.

Dans [Briot et al., 2008], ce critère a été découvert et formulé à partir de la forme générale du modèle dynamique d'un robot parallèle. De plus, sa signification physique est donnée. Il en résulte qu'un mécanisme parallèle peut traverser une singularité de Type 2 sans que son modèle dynamique ne dégénère si la trajectoire à suivre a été planifiée en prenant en compte ce critère dynamique. Le résultat est prometteur : n'importe quel mécanisme parallèle peut traverser une singularité de Type 2 sans modifier son architecture et sans ajouter d'actionneur.

Pour illustrer ce critère, prenons un manipulateur parallèle de m liens, n degrés de liberté et piloté par n actionneurs. Une formulation dynamique Lagrangienne du manipulateur parallèle peut être exprimée sous la forme

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2)$$

Où: $\boldsymbol{\tau}$ est le vecteur des efforts d'entrée; L est le lagrangien du manipulateur ; $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ et $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$ représentent les vecteurs des variables et des vitesses des actionneurs ; $\mathbf{x} = [x, y, z, \varphi, \psi, \theta]^T$ et $\mathbf{v} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}]^T$ sont respectivement les paramètres de la trajectoire et leurs dérivés, x, y, z représentent respectivement la position du point contrôlé et φ, ψ et θ la rotation de la plate-forme autour de trois axes $\mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_\psi$ et \mathbf{a}_θ , $\boldsymbol{\lambda}$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange, qui est liée aux efforts appliqués sur la plate-forme par

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{A}^{-T} \mathbf{W}_p \quad (3)$$

Où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont deux matrices relatives des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{q} selon $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$ (ils peuvent être trouvés en dérivant les équations de fermeture par rapport au temps) ; \mathbf{W}_p est l'effort appliqué sur la plate-forme par les jambes et les forces externes [Khalil et Guégan 2002], qui est définie par

$$\mathbf{W}_p = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{n}_p \end{bmatrix} \quad (4)$$

Où \mathbf{f}_p est la force le long des directions du repère global et \mathbf{n}_p est le couple sur les axes $\mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_\psi$ et \mathbf{a}_θ .

Le terme \mathbf{W}_p peut être réécrit dans le repère global en utilisant une transformation matricielle \mathbf{D} [Merlet 2006]:

$$\mathbf{W}_p = \mathbf{D}({}^{\mathbf{R}o}\mathbf{W}_p) \quad (5)$$

Où ${}^{\mathbf{R}o}\mathbf{W}_p$ est l'expression des efforts \mathbf{W}_p dans le repère de base.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Où $\mathbf{R}_{3 \times 3}$ est la matrice de rotation entre les axes $\mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_\psi$ et \mathbf{a}_θ et le repère global et

En remplaçant (6) dans (2), on obtient :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{W}_b + \mathbf{J}^{TR0} \mathbf{W}_p, \quad \mathbf{W}_b = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \quad (7)$$

Où $\mathbf{J} = ({}^{\mathbf{R}o}\mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$ est la matrice Jacobienne entre le torseur cinématique \mathbf{t} de la plate-forme (exprimée dans le repère de base) et $\dot{\mathbf{q}}$, ${}^{\mathbf{R}o}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{D}$ est l'expression de la matrice \mathbf{A} dans le repère base.

Pour une trajectoire prescrite $\mathbf{x}(t)$, les valeurs des vecteurs $\ddot{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{q}}$ et \mathbf{q} peuvent être trouvées en utilisant le modèle cinématique inverse. Ainsi, en tenant compte du fait que le manipulateur n'est pas dans une singularité de Type 1, les termes \mathbf{W}_b et ${}^{R_0}\mathbf{W}_p$ peuvent être calculées. Toutefois, selon une trajectoire passant par une singularité de Type 2, le déterminant de la matrice \mathbf{J} tend vers l'infini. Numériquement, les valeurs des efforts appliqués par les actionneurs deviennent infinies. Dans la pratique, le manipulateur est soit bloqué dans cette position, soit il génère un mouvement non contrôlé. C'est-à-dire que l'effecteur produit un mouvement qui est différent de la trajectoire prescrite. Il est connu que la singularité de Type 2 apparaît lorsque le déterminant de matrice ${}^{R_0}\mathbf{A}$ est nul, en d'autres termes, quand au moins deux de ses colonnes sont linéairement dépendante [Merlet 2006]. En réécrivant la matrice ${}^{R_0}\mathbf{A}$, on obtient :

$${}^{R_0}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \cdots & \alpha_{66} \end{bmatrix} \quad (8)$$

En présence de singularité de Type 2, moins deux colonnes de la matrice ${}^{R_0}\mathbf{A}$ sont linéairement dépendante donc,

$$\sum_{j=1}^6 \alpha_j \alpha_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (9)$$

Où α_{ij} sont les coefficients, qui sont en général fonction de \mathbf{q}_p ($p=1, \dots, n$). On peut noter que le vecteur $\mathbf{t}_s = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6]^T$ représente la direction du mouvement incontrôlable de la plateforme dans la singularité de Type 2.

En réécrivant (9) sous forme vectorielle, on obtient

$$\sum_{j=1}^6 \alpha_j \mathbf{N}_j = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N}_j = [\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{6j}]^T, \quad j = 1, \dots, 6 \quad (10)$$

Où \mathbf{N}_j représente la j ème colonne de la matrice ${}^{R_0}\mathbf{A}$. En remplaçant (10) dans (3), on obtient

$$\mathbf{N}_j^T \boldsymbol{\lambda} = W_j, \quad j = 1, \dots, 6 \quad (11)$$

Où W_j est la j ème ligne du vecteur ${}^{R_0}\mathbf{W}_p$.

Puis de (10) et (11) les conditions suivantes sont dérivées:

$$\sum_{j=1}^6 (\alpha_j \mathbf{N}_j^T \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^6 (\alpha_j W_j), \quad j = 1, \dots, 6 \quad (12)$$

Le terme de droite de (12) correspond au produit scalaire de \mathbf{t}_s et ${}^{R_0}\mathbf{W}_p$.

Ainsi, en présence d'une singularité de Type 2, il est possible de satisfaire les conditions (12) si les efforts appliqués sur la plate-forme par les jambes et les efforts externes ${}^{R_0}\mathbf{W}_p$ sont orthogonaux à la direction des mouvements incontrôlables \mathbf{t}_s . Sinon, le modèle dynamique n'est pas compatible. Bien entendu, en présence d'une singularité de Type 2, le déplacement de l'effecteur doit être prévu pour satisfaire (12).

Cependant dans [Briot et al., 2008], aucun contrôleur n'a été développé afin de réaliser un tel changement de mode d'assemblage. Le critère (1) faisant intervenir des vitesses et des accélérations, seule une loi de commande permettant le suivi de trajectoire peut être appliqué lors du changement de mode d'assemblage singulier (en particulier, toute commande de type pose-to-pose est incompatible). De plus, en cas de problème lors de la traversée de singularité, le mécanisme peut potentiellement se retrouver bloqué en position singulière. Dans [Pagis et al., 2013], un mouvement optimal a été défini pour sortir des singularité de type 2.

CHAPITRE 3. TRAVERSEE DES SINGULARITES DE CONTRAINTES

3.1. Introduction

Comme il est dit précédemment dans l'introduction, l'objectif de ce stage est de trouver des solutions permettant de réaliser la traversée des singularités de contraintes. Pendant la première partie de mon stage je me suis concentré sur la création de trajectoires permettant la non-dégénérescence du modèle dynamique. Durant la seconde partie de mon stage j'ai recherché des solutions technologiques permettant la bifurcation du mode d'opération du mécanisme 4 barres.

Nous avons choisi ici d'étudier un mécanisme 4 barres en parallélogramme car il s'agit à priori d'un mécanisme peu complexe disposant de singularités. Ce mécanisme dispose de deux modes d'opération : le mode parallélogramme et le mode anti parallélogramme. Dans les deux cas le mécanisme a un seul degré de liberté mais la mobilité est différente. En effet dans le mode parallélogramme la barre supérieure a un mouvement de translation circulaire tandis que dans le mode anti-parallélogramme cette barre à un mouvement de translation et de rotation combinées dans un plan.

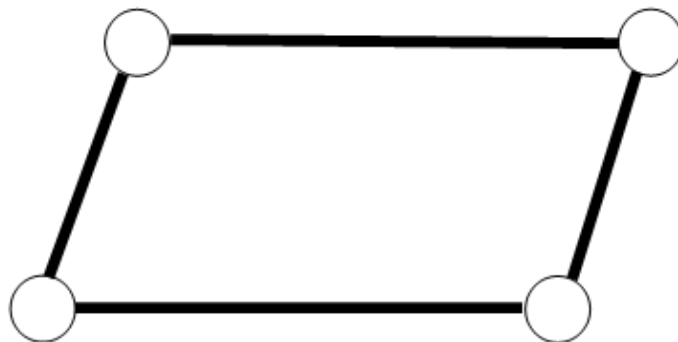


Figure 16: Mode parallélogramme

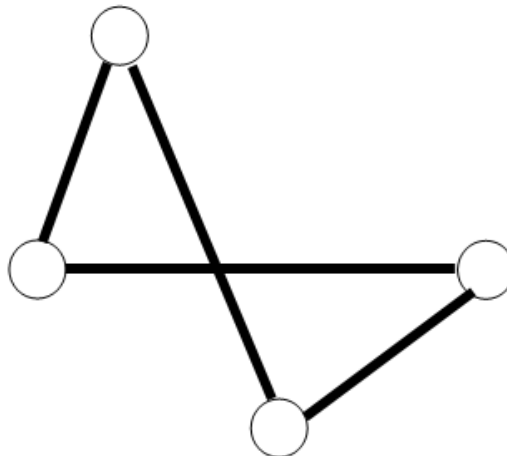


Figure 17: Mode anti-parallélogramme

3.2. Modélisation du mécanisme

Pour étudier le comportement du système lors du passage de la singularité et ensuite créer une trajectoire permettant le changement de mode d'opération, l'étude du comportement cinématique et dynamique des deux systèmes est nécessaire. Pour cela dans un modèle cinématique puis dynamique des mécanismes en modes d'opération parallélogramme et anti-parallélogramme sont réalisés.

Pour les applications numériques, on a choisi les paramètres suivant :

$$a_1 = 1 \text{ m}$$

$$a_2 = 0.7 \text{ m}$$

$$x_a = -\frac{a_1}{2}$$

$$y_a = 0$$

$$x_b = \frac{a_1}{2}$$

$$y_b = 0$$

$$m_1 = 14.4122775745 \text{ kg}$$

$$m_2 = 14.4122775745 \text{ kg}$$

$$m_3 = 42.01830019664 \text{ kg}$$

$$g = 9.80665 \text{ m.s}^{-2}$$

Les inerties et les masses ont été calculées à l'aide d'un modèle ADAMS.

3.2.1. Mode parallélogramme

Dans ce mode d'opération les barres 1 et 2 et les barres 0 et 3 sont deux à deux parallèles et de même longueur. La figure 18 représente le mécanisme en mode parallélogramme.

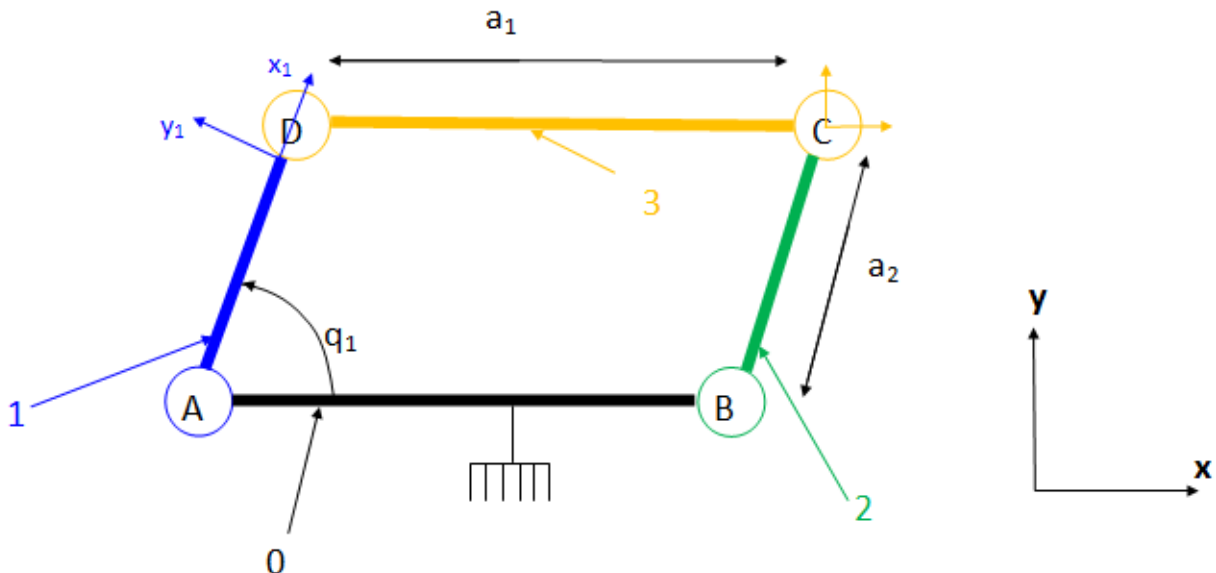


Figure 18:Schéma du mode parallélogramme

A l'aide de relations géométriques (13), (14), (15) et (16) simple des différents points caractéristique A, B, C et D du mécanisme, on obtient le modèle cinématique (17) et (18) du mécanisme. Rappel:

x_i : Position suivant x du point i , $i = [a, b, c, d]$

y_i : Position suivant y du point i , $i = [a, b, c, d]$

$$x_c = \frac{a_1}{2} + a_2 \cos q_1 \quad (13)$$

$$y_c = a_2 \sin q_1 \quad (14)$$

$$x_d = -\frac{a_1}{2} + a_2 \cos q_1 \quad (15)$$

$$y_d = a_2 \sin q_1 \quad (16)$$

$$\dot{x}_c = \dot{x}_d = -a_2 \dot{q}_1 \sin q_1 \quad (17)$$

$$\dot{y}_c = \dot{y}_d = a_2 \dot{q}_1 \cos q_1 \quad (18)$$

En dérivant les équations (17) et (18) on obtient les accélérations des différents points caractéristiques en fonction de la variable d'entrée et des différents paramètres du système.

$$\ddot{x}_c = \ddot{x}_d = -a_2 \ddot{q}_1 \sin q_1 - a_2 \dot{q}_1^2 \cos q_1 \quad (19)$$

$$\ddot{y}_c = \ddot{y}_d = a_2 \ddot{q}_1 \cos q_1 - a_2 \dot{q}_1^2 \sin q_1 \quad (20)$$

En utilisant le principe fondamental de la dynamique et en isolant successivement les corps 3, 2, 1 on obtient les équations suivantes :

$$m_3 a_2 (-\ddot{q}_1 \sin q_1 - \dot{q}_1^2 \cos q_1) = f_{x13} + f_{x23} \quad (21)$$

$$m_3 a_2 (\ddot{q}_1 \cos q_1 - \dot{q}_1^2 \sin q_1) = f_{y13} + f_{y23} - m_3 g \quad (22)$$

$$f_{y13} = f_{y23} \quad (23)$$

$$m_2 \frac{a_2}{2} (-\ddot{q}_1 \sin q_1 - \dot{q}_1^2 \cos q_1) = f_{x02} - f_{x23} \quad (24)$$

$$m_2 \frac{a_2}{2} (\ddot{q}_1 \cos q_1 - \dot{q}_1^2 \sin q_1) = f_{y02} - f_{y23} - m_2 g \quad (25)$$

$$I_2 \ddot{q}_1 = \frac{a_2}{2} (\sin q_1 (f_{x02} + f_{x23}) - \cos q_1 (f_{y02} + f_{y23})) \quad (26)$$

$$m_1 \frac{a_2}{2} (-\ddot{q}_1 \sin q_1 - \dot{q}_1^2 \cos q_1) = f_{x01} - f_{x13} \quad (27)$$

$$m_1 \frac{a_2}{2} (\ddot{q}_1 \cos q_1 - \dot{q}_1^2 \sin q_1) = f_{y01} - f_{y13} - m_1 g \quad (28)$$

$$I_1 \ddot{q}_1 = \frac{a_2}{2} (\sin q_1 (f_{y01} + f_{y13}) - \cos q_1 (f_{x01} + f_{x13})) + C_m \quad (29)$$

Sois sous forme matricielle :

$$\mathbf{A}_{pfd} \mathbf{x}_{pfd} = \mathbf{b}_{pfd} \quad (30)$$

avec

$$\mathbf{x}_{pfd} = \begin{bmatrix} f_{x13} \\ f_{x23} \\ f_{y13} \\ f_{y23} \\ f_{x01} \\ f_{y01} \\ f_{y01} \\ f_{y01} \\ C_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{pfd} = \begin{bmatrix} m_3 a_2 (-\ddot{q}_1 \sin q_1 - \dot{q}_1^2 \cos q_1) \\ m_3 \frac{a_2}{2} (\ddot{q}_1 \cos q_1 + \dot{q}_1^2 \sin q_1) + m_3 g \\ 0 \\ m_2 \frac{a_2}{2} (-\ddot{q}_1 \sin q_1 - \dot{q}_1^2 \cos q_1) \\ m_2 \frac{a_2}{2} (\ddot{q}_1 \cos q_1 + \dot{q}_1^2 \sin q_1) + m_2 g \\ I_2 \ddot{q}_1 \\ m_1 \frac{a_2}{2} (-\ddot{q}_1 \sin q_1 - \dot{q}_1^2 \cos q_1) \\ m_1 \frac{a_2}{2} (\ddot{q}_1 \cos q_1 + \dot{q}_1^2 \sin q_1) + m_1 g \\ I_1 \ddot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{pfd} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{2} \sin q_1 & 0 & -\frac{a_2}{2} \cos q_1 & 0 & \frac{a_2}{2} \sin q_1 & 0 & -\frac{a_2}{2} \cos q_1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{2} \sin q_1 & 0 & -\frac{a_2}{2} \cos q_1 & 0 & \frac{a_2}{2} \sin q_1 & 0 & -\frac{a_2}{2} \cos q_1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.2. Mode anti-parallélogramme

Dans ce mode d'opération, le mécanisme est analogue à un mécanisme quatre barres classique avec cependant des barres deux à deux de même longueur. La figure 19 représente le mécanisme en mode anti-parallélogramme.

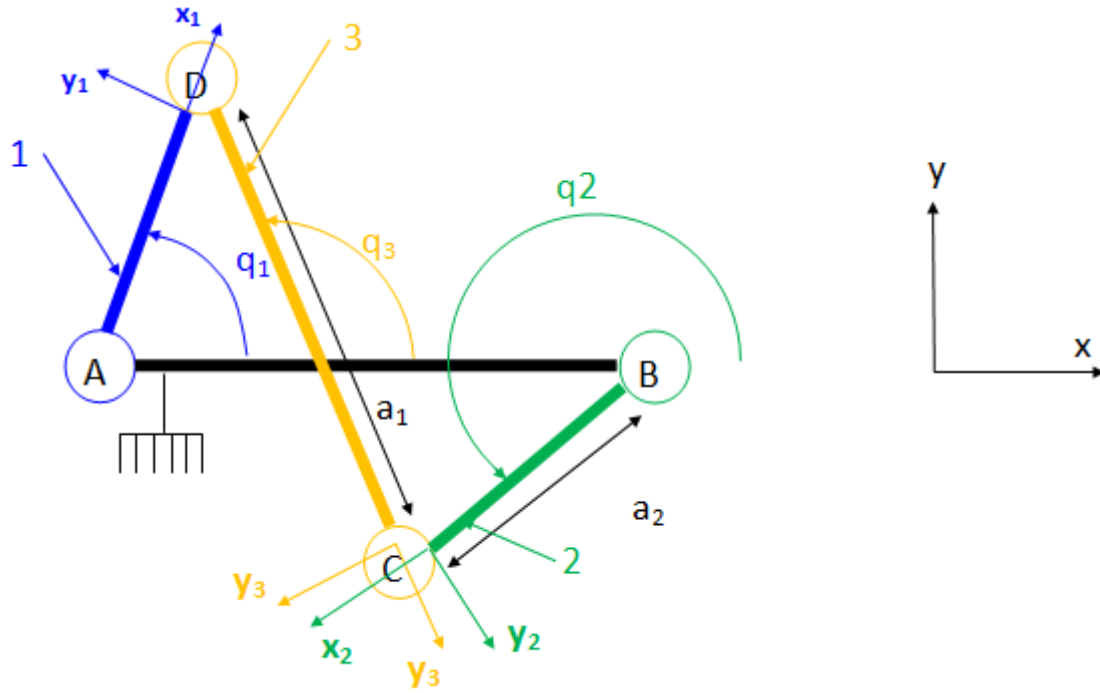


Figure 19: Schéma du mode anti-parallélogramme

La cinétique du point D est identique au modèle précédent. Pour obtenir la position du point C un calculé l'intersection du cercle de centre D et de rayon DC et du cercle de centre B et de rayon DC est réalisé. On obtient alors le système d'équations suivant :

$$f_1 = (x_d - x_c)^2 + (y_d - y_c)^2 - a_1^2 = 0 \quad (31)$$

$$f_2 = (x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2 - a_2^2 = 0 \quad (32)$$

On obtient alors une équation du second degré qui nous donne la position du point C dans les 2 modes.

Pour calculer les vitesses et accélération du point C, on utilise les dérivées partielles des fonctions précédentes, le mécanisme peut se mettre sous la forme :

$$bq_1 + A\dot{x} = 0 \quad (33)$$

Avec :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_c} & \frac{\partial f_1}{\partial y_c} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_c} & \frac{\partial f_2}{\partial y_c} \end{bmatrix}$$

On a donc d'après (33)

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} * \dot{q}_1 \quad (34)$$

Pour calculer l'accélération du point C, on dérive (34) et on obtient :

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\dot{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{b}\dot{q}_1 + \mathbf{b}\ddot{q}_1 + \dot{\mathbf{a}}\dot{\mathbf{x}} \quad (35)$$

Avec $\dot{\mathbf{b}}$ et $\dot{\mathbf{A}}$ les dérivées respectivement de \mathbf{b} et de \mathbf{A} par rapport au temps.

En utilisant le principe fondamental de la dynamique et en isolant successivement les corps 3, 2, 1 on obtient les équations suivantes : rappel :

f_{xij} : Effort de liaison de i sur j suivant \mathbf{x}

f_{yij} : Effort de liaison de i sur j suivant \mathbf{y}

$$m_3 a_2 (-\ddot{q}_3 \sin q_3 - \dot{q}_3^2 \cos q_3) = f_{x13} + f_{x23} \quad (36)$$

$$m_3 a_2 (\ddot{q}_3 \cos q_3 - \dot{q}_3^2 \sin q_3) = f_{y13} + f_{y23} - m_3 g \quad (37)$$

$$I_3 \ddot{q}_3 = \frac{a_1}{2} (\sin q_3 (f_{x13} - f_{x23}) - \cos q_3 (f_{y13} - f_{y23})) \quad (38)$$

$$m_2 \frac{a_2}{2} (-\ddot{q}_2 \sin q_2 - \dot{q}_2^2 \cos q_2) = f_{x01} - f_{x02} \quad (39)$$

$$m_2 \frac{a_2}{2} (\ddot{q}_2 \cos q_2 - \dot{q}_2^2 \sin q_2) = f_{y01} - f_{y02} - m_2 g \quad (40)$$

$$I_2 \ddot{q}_2 = \frac{a_2}{2} (\sin q_2 (f_{x01} + f_{x02}) - \cos q_2 (f_{y01} + f_{y02})) \quad (41)$$

$$m_1 \frac{a_2}{2} (-\ddot{q}_1 \sin q_1 - \dot{q}_1^2 \cos q_1) = f_{x01} - f_{x13} \quad (42)$$

$$m_1 \frac{a_2}{2} (\ddot{q}_1 \cos q_1 - \dot{q}_1^2 \sin q_1) = f_{y01} - f_{y13} - m_1 g \quad (43)$$

$$I_1 \ddot{q}_1 = \frac{a_2}{2} (\sin q_1 (f_{x01} + f_{x13}) - \cos q_1 (f_{y01} + f_{y13})) + c_m \quad (44)$$

Sois sous forme matricielle :

$$\mathbf{A}_{pfd} \mathbf{x}_{pfd} = \mathbf{b}_{pfd} \quad (45)$$

avec

$$\mathbf{x}_{pfd} = \begin{bmatrix} f_{x13} \\ f_{x23} \\ f_{y13} \\ f_{y23} \\ f_{x01} \\ f_{01} \\ f_{y01} \\ f_{y01} \\ c_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{pfd} = \begin{bmatrix} m_3 a_2 (-\ddot{q}_3 \sin q_3 - \dot{q}_3^2 \cos q_3) \\ m_3 a_2 (\ddot{q}_3 \cos q_3 - \dot{q}_3^2 \sin q_3) + m_3 g \\ I_3 \ddot{q}_3 \\ m_2 \frac{a_2}{2} (-\ddot{q}_2 \sin q_2 - \dot{q}_2^2 \cos q_2) \\ m_2 \frac{a_2}{2} (\ddot{q}_2 \cos q_2 - \dot{q}_2^2 \sin q_2) + m_2 g \\ I_2 \ddot{q}_2 \\ m_1 \frac{a_2}{2} (-\ddot{q}_1 \sin q_1 - \dot{q}_1^2 \cos q_1) \\ m_1 \frac{a_2}{2} (\ddot{q}_1 \cos q_1 - \dot{q}_1^2 \sin q_1) + m_1 g \\ I_1 \ddot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{pfd} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{2} \sin q_3 & -\frac{a_1}{2} \sin q_3 & \frac{a_1}{2} \cos q_3 & -\frac{a_1}{2} \cos q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{2} \sin q_2 & 0 & -\frac{a_2}{2} \cos q_2 & 0 & \frac{a_2}{2} \sin q_2 & 0 & -\frac{a_2}{2} \cos q_2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{2} \sin q_1 & 0 & -\frac{a_2}{2} \cos q_1 & 0 & \frac{a_2}{2} \sin q_1 & 0 & -\frac{a_2}{2} \cos q_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme les matrices \mathbf{A}_{pfd} et \mathbf{b}_{pfd} sont définis en fonction des 3 angles q_1 , q_2 et q_3 ainsi que leurs dérivées secondes, on a besoin de déterminer q_2 et q_3 en fonction de q_1 ; \dot{q}_2 et \dot{q}_3 en fonction de \dot{q}_1 puis \ddot{q}_2 et \ddot{q}_3 en fonction de \ddot{q}_1 .

On a :

$$\tan q_2 = \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b} \quad (46)$$

Donc

$$q_2 = \tan^{-1} \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b} \quad (47)$$

On dérive (47) et on obtient :

$$\dot{q}_2 = \frac{(\dot{y}_c(x_c - x_b) - \dot{x}_c(y_c - y_b))}{(1 + (\tan q_2)^2)(x_c - x_b)^2} \quad (48)$$

Pour simplifier l'expression, on introduit la variable intermédiaire e_{q2} :

$$e_{q2} = \frac{d((1 + (\tan q_2)^2)(x_c - x_b)^2)}{dt} \quad (49)$$

$$e_{q2} = 2\dot{q}_2((1 + (\tan q_2)^2) \tan q_2)((x_c - x_b)^2 + 2(1 + (\tan q_2)^2)(x_c - x_b)\dot{x}_c) \quad (50)$$

On dérive (48) et à l'aide de (50) on obtient :

$$\ddot{q}_2 = \frac{((\dot{y}_c(x_c - x_b) - \dot{x}_c(y_c - y_b)) * ((1 + (\tan q_2)^2)(x_c - x_b)^2) - (\dot{y}_c(x_c - x_b) - \dot{x}_c(y_c - y_b))e_{q2})}{e_{q2}^2} \quad (51)$$

De façon analogue on a :

$$\tan q_3 = \frac{y_c - y_d}{x_c - x_d} \quad (52)$$

$$q_3 = \tan^{-1} \frac{y_c - y_d}{x_c - x_d} \quad (53)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{((\dot{y}_c - \dot{y}_d)(x_c - x_d) - (\dot{x}_c - \dot{x}_d)(y_c - y_d))}{(1 + (\tan q_3)^2)(x_c - x_d)^2} \quad (54)$$

$$e_{q3} = \frac{d((1 + (\tan q_3)^2)(x_c - x_d)^2)}{dt} \quad (55)$$

On dérive (53) et à l'aide de (55) on obtient :

$$\ddot{q}_3 = \frac{(((\dot{y}_c - \dot{y}_d)(x_c - x_d) - (\dot{x}_c - \dot{x}_d)(y_c - y_d)) * ((1 + (\tan q_3)^2)(x_c - x_d)^2) - (\dot{y}_c(x_c - x_d) - \dot{x}_c(y_c - y_d))e_{q3})}{e_{q3}^2} \quad (56)$$

Le mécanisme est entièrement défini en fonction de ses paramètres et des données d'entrée qui sont l'angle q_1 , \dot{q}_1 et \ddot{q}_1 .

3.3. Analyse de la dégénérescence du modèle dynamique

Pour réaliser une trajectoire qui assure la non dégénérescence du modèle dynamique de manière analogue à la méthode proposé dans [Briot, 2007], il faut déterminer un vecteur \mathbf{t}_s tel que lors du passage de la position singulière :

$$\mathbf{t}_s^T \mathbf{A}_{\text{pfd}} = 0 \quad (57)$$

Donc on a aussi

$$\mathbf{A}_{\text{pfd}}^T \mathbf{t}_s = \mathbf{0} \quad (58)$$

La matrice \mathbf{A}_{pfd} a donc été étudiée dans une position singulière ($\sin(q1) = 0$ [π])

On appelle cette nouvelle matrice \mathbf{A}_0 :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_1}{2} & -\frac{a_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a_2}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_2}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_2}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_2}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le rang de la matrice \mathbf{A}_0 est de 8, on a donc une perte de rang 1 lors du passage de la singularité.

Le vecteur \mathbf{t}_s qui correspond à l'équation (57) est le vecteur directeur du noyau de la matrice $\mathbf{A}_{\text{pfd}}^T$.

$$\mathbf{t}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_2 \\ a_1 \\ 0 \\ a_2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On a alors $\mathbf{A}_0^T \mathbf{t}_s = \mathbf{0} \quad (59)$

Donc d'après (45) qui dit que

$$\mathbf{A}_{\text{pfd}} \mathbf{x}_{\text{pfd}} = \mathbf{b}_{\text{pfd}} \quad (60)$$

On a donc

$$\mathbf{x}_{\text{pfd}}^T \mathbf{A}_{\text{pfd}}^T = \mathbf{b}_{\text{pfd}}^T$$

Et alors

$$\mathbf{x}_{\text{pfd}}^T \mathbf{A}_{\text{pfd}}^T \mathbf{t}_s = \mathbf{b}_{\text{pfd}}^T \mathbf{t}_s \quad (61)$$

Doit être égal à 0

On doit à présent créer une trajectoire qui lors du passage de la singularité assure que :

$$\mathbf{b}_{pfd}^T \mathbf{t}_s = 0 \quad (62)$$

On observe aussi que les efforts suivant X dans les liaisons sont discontinus lors du passage de la singularité mais que le couple et les efforts suivant Y sont continus. La figure 20 montre les efforts de liaison suivant \mathbf{x} avec une trajectoire défini par $\ddot{q}_1(t) = t$.

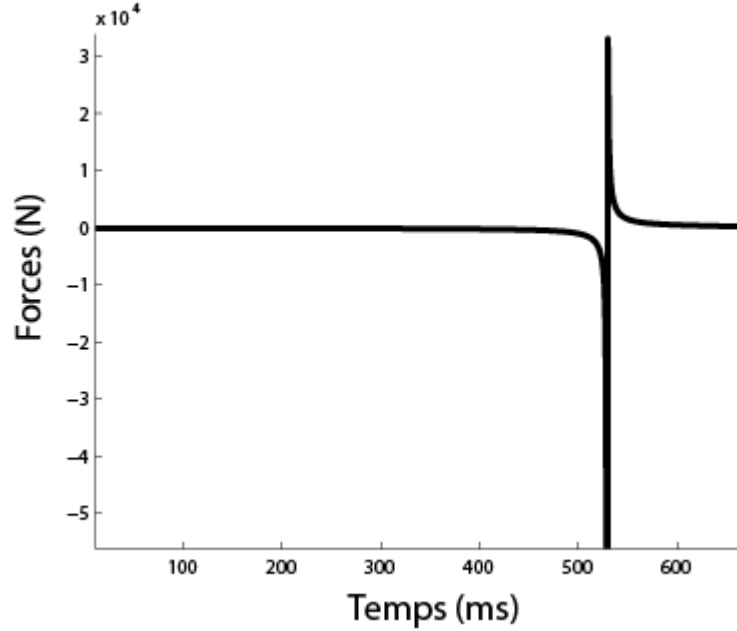


Figure 20: Efforts de liaison suivant \mathbf{x} lors du passage de la singularité

3.4. Création de trajectoire

Pour créer une trajectoire, tel que lors du passage de la singularité $\mathbf{b}_{pfd}^T \mathbf{t}_s = \mathbf{0}$, on doit déterminer quelle variable de \mathbf{b}_{pfd} on doit prendre pour paramètre. La barre 3 est celle qui gagne le degré de liberté au point de singularité et sa mobilité change d'une mode d'opération à l'autre. Le paramètre q_3 et ses dérivées sont donc pris en paramètres d'entrée. Or les calculs précédant (relation entre \ddot{q}_1 , \ddot{q}_2 et \ddot{q}_3) ne permettent pas de connaître la relation entre \ddot{q}_3 et \ddot{q}_1 et \ddot{q}_3 et \ddot{q}_2 au point de singularité car la fonction arctangente dégénère à proximité de la singularité.

Pour trouver la relation entre ces variables, on utilise la propriété de continuité des variables q_i et \dot{q}_i . Donc en calculant la position du centre instantané de rotation de 3 par 0 juste avant et juste après le point de singularité on peut déterminer la relation entre les différents q_i et donc \dot{q}_i .

Le centre instantané de rotation de 3 par rapport à 0 se trouve à l'intersection des droites AD et BC
Soit :

$$\begin{cases} y = \tan q_1 x + \frac{a_1}{2} \tan q_1 \\ y = \tan q_2 x - \frac{a_1}{2} \tan q_2 \end{cases} \quad (63)$$

En résolvant ce système, on obtient :

$$x_{cir} = -\frac{a_1 \tan q_1 + \tan q_2}{2 \tan q_1 - \tan q_2} \quad (64)$$

$$y_{cir} = \tan q_1 x_{cir} + \frac{a_1}{2} \tan q_1 \quad (65)$$

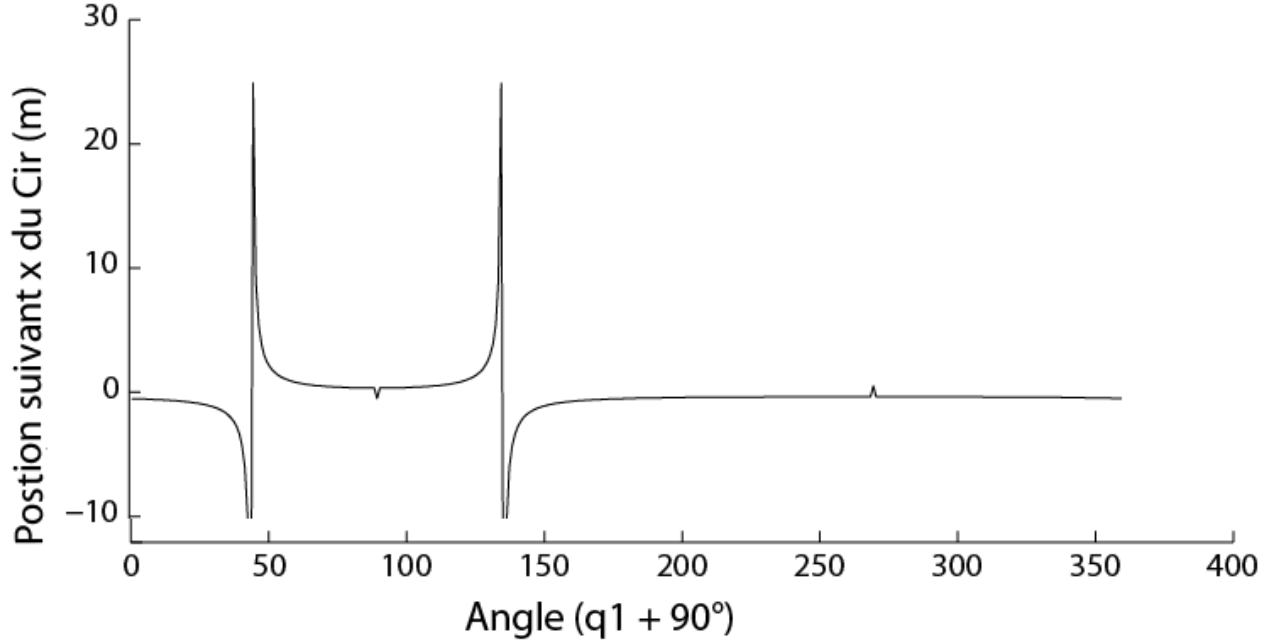


Figure 21: Positon suivant x du CIR °

On peut observer à l'aide de la figure 21 que la position en x du centre instantané de rotation est égale à $\frac{a_2}{2}$ (par rapport au centre de la barre 0, ici $\frac{a_2}{2} = 0.35$) lorsque $q_1 = 0 [2\pi]$ et $-\frac{a_2}{2}$ lorsque $q_1 = \pi [2\pi]$. Les points à 0° et 180° n'étant pas correcte sur la figure 21, on utilise la continuité de la fonction pour les calculer. En calculant la distance du point A et du point B par rapport au centre instantané de rotation de 3 par rapport à 0, on peut établir une relation entre les vitesses \dot{q}_1 , \dot{q}_2 et \dot{q}_3 . On obtient alors :

$$\dot{q}_1 = 2 \frac{a_2}{a_1 + a_2} \dot{q}_3 \quad (66)$$

$$\dot{q}_2 = 2 \frac{a_2}{a_1 - a_2} \dot{q}_3 \quad (67)$$

Et donc en dérivant (66) et (67) on obtient

$$\ddot{q}_1 = 2 \frac{a_2}{a_1 + a_2} \ddot{q}_3 \quad (68)$$

$$\ddot{q}_2 = 2 \frac{a_2}{a_1 - a_2} \ddot{q}_3 \quad (69)$$

On peut alors définir une valeur de \ddot{q}_3 pour que $\mathbf{b}_{pfd}^T \mathbf{t}_s = \mathbf{0}$, car

$$\mathbf{b}_{\text{pfd}}^T \mathbf{t}_s = \left(a_2 \left(g m_2 + \frac{m_2 \ddot{q}_3 \left(\frac{a_1}{2} + a_2 - \frac{a_2}{2a_1} \right)}{2} \right) - a_2 \left(\frac{m_3 \left(\ddot{q}_3 \left(\frac{a_1}{2} - a_2 + \frac{a_2}{2a_1} \right) - \ddot{q}_3 \left(\frac{a_1}{2} + a_2 - \frac{a_2}{2a_1} \right) - g m_3 \right)}{2} + \frac{I_3 a_2 \ddot{q}_3}{a_1} + \frac{I_2 \ddot{q}_3 \left(\frac{a_1}{2} + a_2 - \frac{a_2}{2a_1} \right)}{a_2} \right) \right) \quad (70)$$

Avec les paramètres du mécanisme, on obtient de (70) :

$$-5.607014869 \ddot{q}_3 + 27.4562 = 0 \quad (71)$$

Donc $\ddot{q}_3 = 5.283697737$ (72)

On notera sans gravité, l'équation (78) devient

$$\ddot{q}_3 = 0 \quad (73)$$

Remarque : Pour obtenir un changement de configuration, les fonctions \dot{q}_3 et \ddot{q}_3 doivent être continues d'un mode à l'autre. Donc ces deux valeurs devront être nulles lors du passage de la singularité car en configuration parallélogramme \dot{q}_3 et \ddot{q}_3 sont nulles pour toutes valeurs de q_1 . Ce qui est contradictoire avec la valeur obtenue précédemment à l'équation (72) (sauf dans le cas où la gravité n'est pas prise en compte car dans ce cas le critère de passage (70) dégénère en $\ddot{q}_3 = 0$).

On peut à présent créer un polynôme de degré 8 pour générer une trajectoire comprenant 9 conditions (3 conditions initiales, 3 conditions au point de singularité et 3 conditions finales) données par :

$$\begin{aligned} q_3(t=0) &= -1.221451928778417 \text{ rad (défini pour } q_1 = 90^\circ) \\ q_3(t=t_s=1) &= 0 \text{ rad} \\ q_3(t=t_f=2) &= 0.59795578269246 \text{ rad (défini arbitrairement)} \\ \dot{q}_3(t=0) &= 0 \\ \dot{q}_3(t=t_s=1) &= 1.5 \text{ rad.s}^{-1} \text{ (fixé)} \\ \dot{q}_3(t=t_f=2) &= 0 \\ \ddot{q}_3(t=0) &= 0 \\ \ddot{q}_3(t=t_s=1) &= 5.283697737 \text{ rad.s}^{-2} \text{ (ou 0 si on ne prend pas en compte la gravité)} \\ \ddot{q}_3(t=t_f=2) &= 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas la trajectoire passe à une seconde le point de singularité et termine à deux secondes. Les conditions initiales et finales en vitesses et accélérations sont nulles. Ici la vitesse \dot{q}_3 au passage de la singularité n'est pas contrainte, on peut donc la fixer (ici 1.5 rad.s^{-1})

Pour créer le polynôme de Lagrange, on pose le système sous forme matricielle :

On a $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{b}$ donc $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{b}$ où \mathbf{X} représente les coefficients du polynôme de degré 8.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^8 & 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 8 * 2^7 & 7 * 2^6 & 6 * 2^5 & 5 * 2^4 & 4 * 2^3 & 3 * 2^2 & 2 * 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 56 & 42 & 30 & 20 & 12 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 56 * 2^6 & 42 * 2^5 & 30 * 2^4 & 20 * 2^3 & 12 * 2^2 & 6 * 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1.221451928778417 \\ 0 \\ 0.59795578269246 \\ 0 \\ 1.5 \\ 0 \\ 0 \\ 5.283697737 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On a à présent une trajectoire en $q_3(t)$, de façon analogue aux équations (46 à 56), on calcule le model inverse qui donne q_3 en fonction de q_1 . On obtient alors une trajectoire en $q_1(t)$, qui est la variable d'entrée du mécanisme.

Comme expliqué dans la remarque précédente, les variables \dot{q}_3 et \ddot{q}_3 doivent être continues, or dans la configuration parallélogramme ces deux variables sont nulles quel que soit q_1 . Pour changer de mode d'opération, $\dot{q}_3(t_s)$ et $\ddot{q}_3(t_s)$ doit être égale à zéro.

Quatre trajectoires ont été réalisées en utilisant le polynôme de Lagrange décrit précédemment en utilisant des conditions de passage différentes. Ces trajectoires ont été implantées dans ADAMS :

- Sans gravité et vitesse positive pour passer la singularité de Type 2
 $\dot{q}_3(t = t_s = 1) = 1.5 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\ddot{q}_3 = 0$
- Sans gravité et vitesse nulle pour changer de mode d'opération
 $\dot{q}_3(t = t_s = 1) = 0$ et $\ddot{q}_3 = 0$
- Avec gravité et vitesse positive pour passer la singularité de Type 2
 $\dot{q}_3(t = t_s = 1) = 1.5 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\ddot{q}_3 = 5.283697737 \text{ rad.s}^{-2}$
- Avec gravité et vitesse nulle pour changer de mode d'opération
 $\dot{q}_3(t = t_s = 1) = 0$ et $\ddot{q}_3 = 5.283697737 \text{ rad.s}^{-2}$

3.5. Analyse des résultats

- Sans gravité et vitesse positive.
Le mécanisme passe la singularité et les efforts suivant x sont continus (la discontinuité est ponctuelle et est due à un problème numérique).

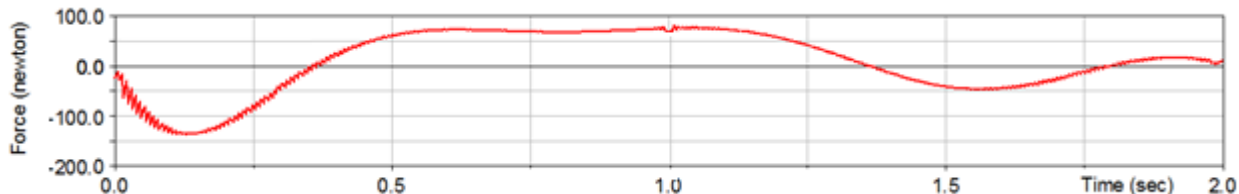


Figure 22: Effort suivant x (1ère trajectoire)

- Sans gravité et vitesse nulle pour changer de mode.
Le mécanisme change de configuration mais les efforts suivant x sont discontinus.

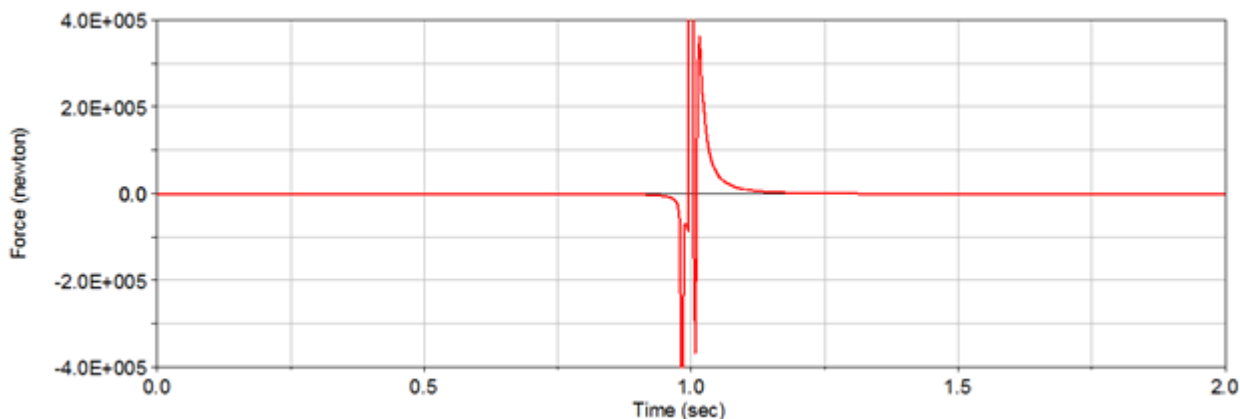


Figure 23: Effort suivant X (2nde trajectoire)

- Avec gravité et vitesse positive pour passer la singularité de Type 2
Le mécanisme passe la singularité mais les efforts suivant x sont discontinus.

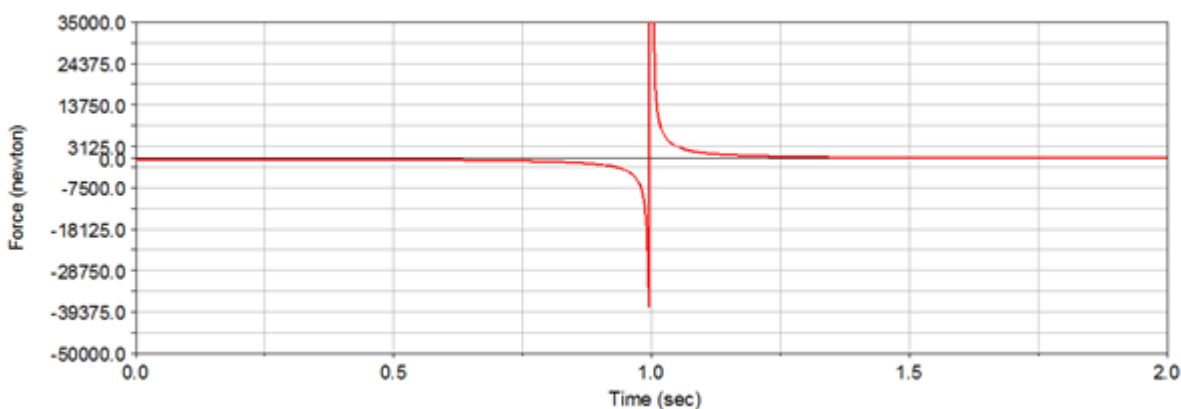


Figure 24: Effort suivant x (3ème trajectoire)

- Avec gravité et vitesse nulle pour changer de mode
Le mécanisme ne change pas de mode et les efforts suivant \mathbf{x} sont discontinus.

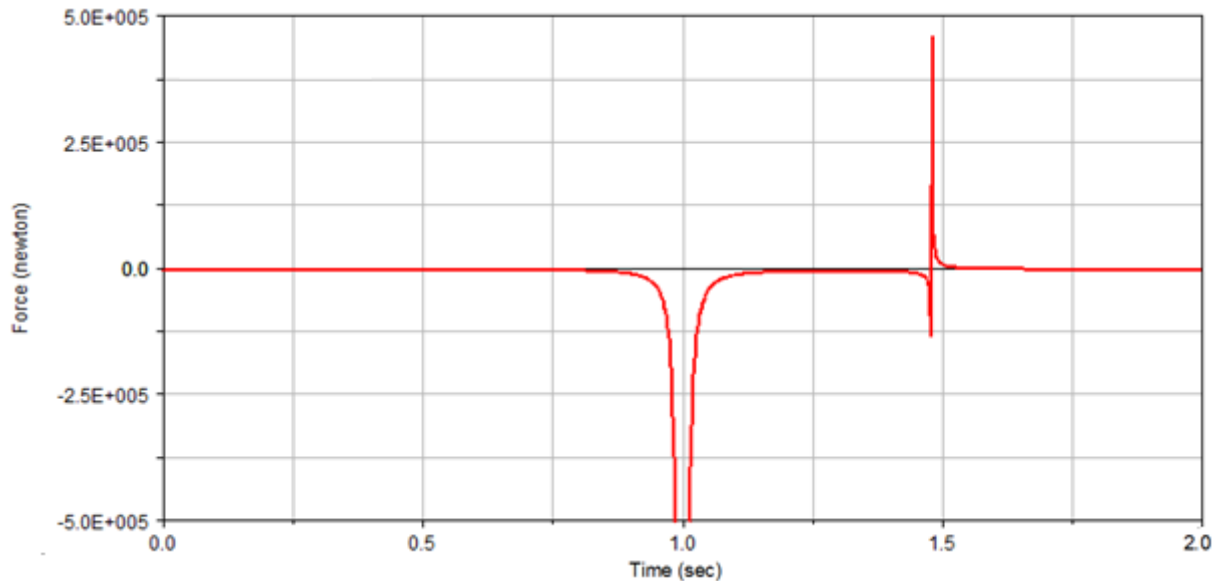


Figure 25: Effort suivant \mathbf{x} (4ème trajectoire)

Cependant on effectuant la trajectoire à vitesse $\dot{q}_3(t_s) = 0$ et accélération nulle $\ddot{q}_3(t_s) = 0$ au point de singularité, on arrive aussi à changer de mode d'opération du mécanisme avec gravité mais les efforts suivant \mathbf{x} sont discontinus.

En réalisant la même procédure en prenant q_2 en paramètre principale car \ddot{q}_2 peut être différent de 0 lors du passage de la singularité. On peut passer la singularité de Type 2 avec des efforts continus suivant \mathbf{x} (sans gravité) mais on ne peut pas changer de configuration.

3.6. Conclusion

L'étude de la dégénérescence du modèle dynamique ne nous a pas permis de trouver un moyen de traversée la singularité de contrainte. Cependant on a réussi à passer du mode anti-parallélogramme au parallélogramme en utilisant la continuité de variable cinématique mais ce changement n'est pas réversible et réalisable, en effet la trajectoire demande des efforts infinis suivant \mathbf{x} ce qui est impossible à réaliser dans un cas réel. Il faut noter aussi que le nombre de pas lors d'une simulation peut influencer sur le changement de configuration et qu'une discontinuité des efforts suivant \mathbf{x} est toujours présente (alors que le couple moteur est constant) lors du passage du point singulier. On n'arrive pas à déterminer la cause exacte de cette discontinuité et on ne serait prédire les efforts sur un système réel (non parfait).

C'est pourquoi dans la suite de mon stage on va chercher des solutions technologiques pour changer de mode d'opération.

CHAPITRE 4. MECANISME PERMETTANT LA BIFURCATION DE MODE

4.1. Introduction

Dans cette partie, on présente différents ajouts au mécanisme 4 barres qui permettent un changement désiré de mode d'opération.

4.2. Solution 1

Principe de fonctionnement :

À l'aide d'un élément de liaison qui réalise une liaison glissière piloté entre les barres 1 et 3, on diminue la longueur de la barre 1. Une fois la taille modifiée, il suffit de passer le point de singularité de l'ancien mécanisme ($q_1 = 0 [\pi]$) et de revenir à la taille normale de la barre 1. Le mécanisme a alors changé de mode de configuration. On utilise ici la redondance cinématique comme dans [Wang and Gosselin, 2004, Kong et al., 2013]. La figure 26 nous présente un schéma de la solution.

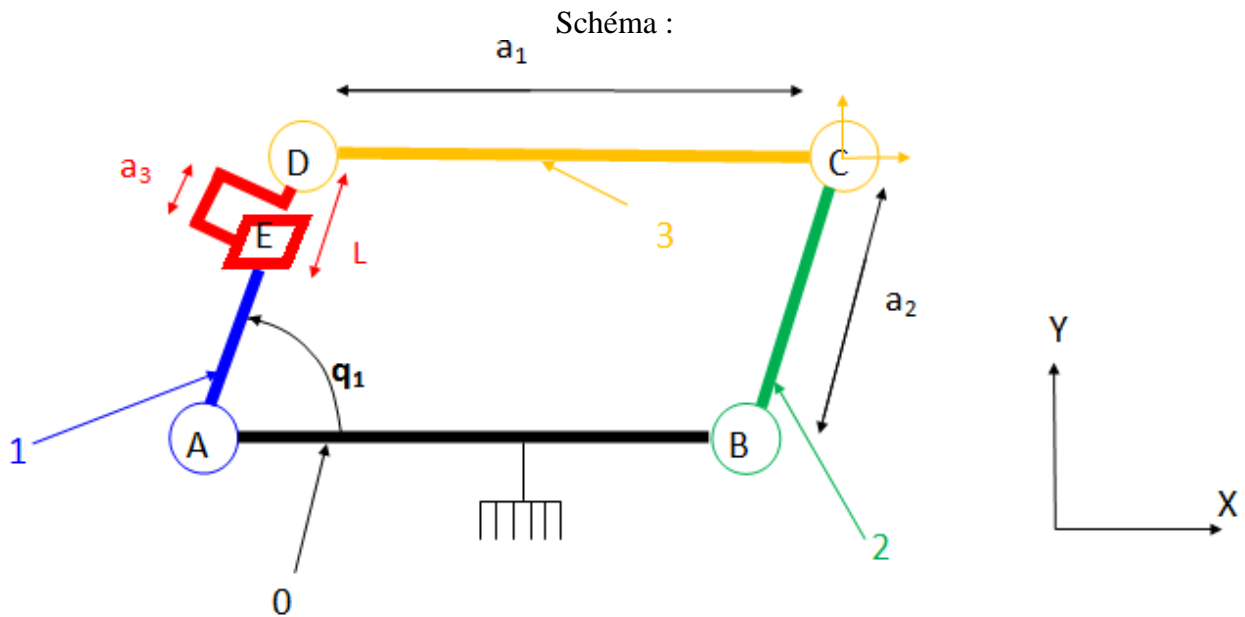


Figure 26:Schéma de la solution 1

On recalcule alors une nouvelle modélisation dynamique du système :

Avec $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{a_1}{2} \sin q_2 & -\frac{a_1}{2} \sin q_2 & -\frac{a_1}{2} \cos q_2 & \frac{a_1}{2} \cos q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{a_2}{2} \sin q_2 & 0 & -\frac{a_2}{2} \cos q_2 & 0 & -\frac{a_2}{2} \cos q_2 & 0 & \frac{a_2}{2} \sin q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2}{2} \sin q_1 & 0 & -\frac{a_2}{2} \cos q_1 & 0 & 0 & \frac{a_2}{2} - l - \frac{a_2}{2} & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin q_1 & -\cos q_1 & 0 & 0 & 0 \\
\left(\frac{a_2}{2} + 1\right) \sin q_1 & 0 & -\left(\frac{a_2}{2} + 1\right) \cos q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2}{2} - l & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}
m_3 \frac{\ddot{x}_d + \ddot{x}_c}{2} \\
m_3 \frac{\ddot{y}_d + \ddot{y}_c}{2} + m_3 g \\
I_3 \ddot{q}_3 \\
m_2 \frac{\ddot{x}_c}{2} \\
m_2 \frac{\ddot{y}_d}{2} + m_2 g \\
I_2 \ddot{q}_2 \\
m_1 \frac{\ddot{x}_d}{2} \\
m_1 \frac{\ddot{x}_d}{2} + m_1 g \\
I_1 * \ddot{q}_1 \\
m_4 \left(a_2 - l - \frac{a_3}{2}\right) (-\ddot{q}_1 \sin q_1 - \dot{q}_1^2 \cos q_1) \\
m_4 \left(a_2 - l - \frac{a_3}{2}\right) (-\ddot{q}_1 \cos q_1 - \dot{q}_1^2 \sin q_1) + m_4 g \\
I_4 \ddot{q}_4
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}
f_{x43} \\
f_{x23} \\
f_{y43} \\
f_{y23} \\
f_{x01} \\
f_{x02} \\
f_{y01} \\
f_{y02} \\
f \\
t \\
n \\
C_m
\end{bmatrix}$$

Où f, t, n représentent respectivement l'effort axial, transversal et le couple de la liaison entre 4 et 1.

La figure 27 montre une validation sous ADAMS de la solution.

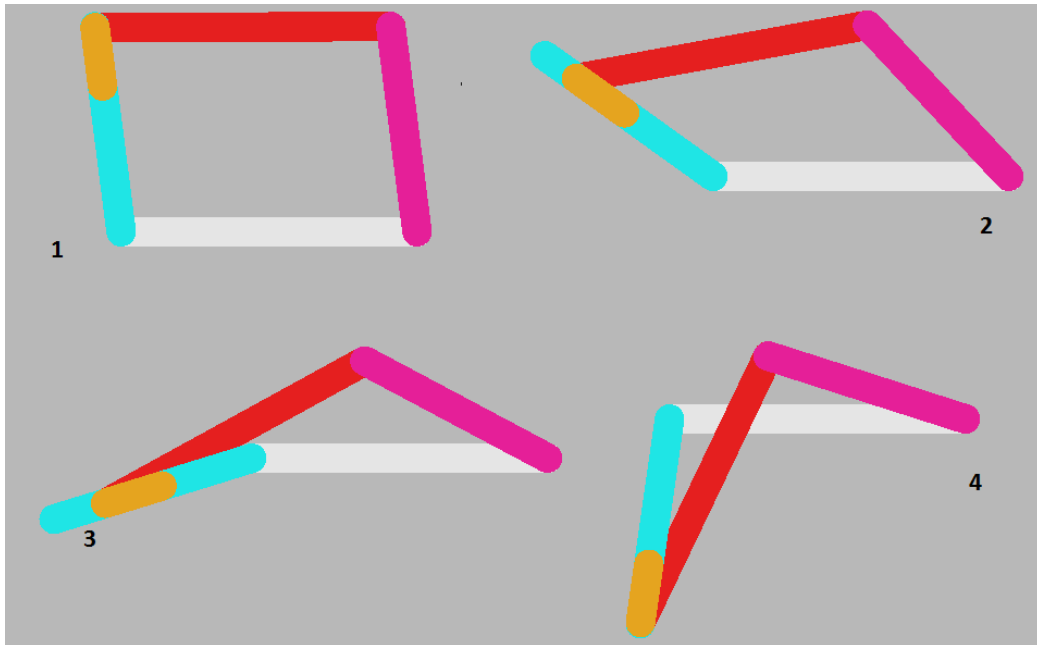


Figure 27: Principe de la solution modélisé sous ADAMS

Le système change bien de configuration.

Pour réaliser cette liaison glissière pilotée, on peut par exemple un vérin. On le dimensionnera grâce au paramètre f du vecteur \mathbf{x} qui correspond à l'effort du vérin.

4.3. Solution 2

Principe de fonctionnement :

À l'aide d'un second moteur placé en B ou en C, et en positionnant le système en position singulière, on applique un couple sur la barre 2. En fonction du sens du couple le mécanisme basculera dans une des deux configurations. Si le couple est dans le même sens que $Q1$ alors le système basculera en parallélogramme, dans le cas contraire le système bascule en anti-parallélogramme.

4.4. Solution 3

Principe de fonctionnement :

On positionne le système en position singulière, on utilise deux tiges rétractables souples pour orienter la barre 3

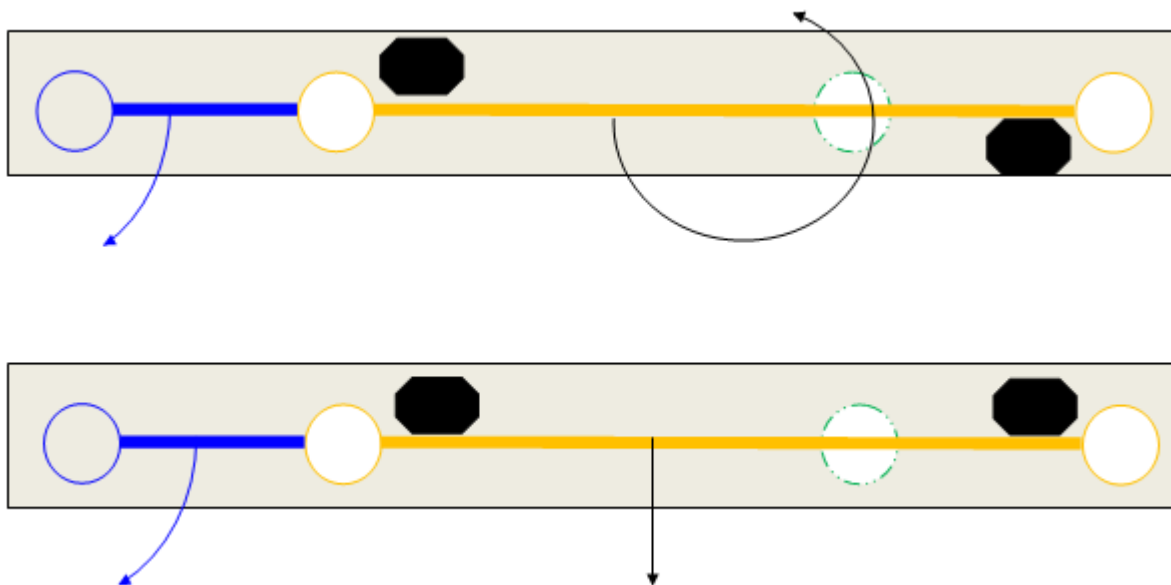


Figure 28:Principe de la solution 3

4.5. Solution 4

Principe de fonctionnement :

Toujours en positionnant le système en position singulière, on débraille le moteur principale et on utilise une pince piloté qui agit sur la barre 3.

Pour passer en configuration parallélogramme la pince applique une force perpendiculaire à la barre (au niveau du centre de gravité) ce qui la mettra la barre en translation.

Pour passer en configuration anti-parallélogramme la pince applique un couple dans le sens opposé à la future rotation sur la barre ce qui la mettra en rotation.

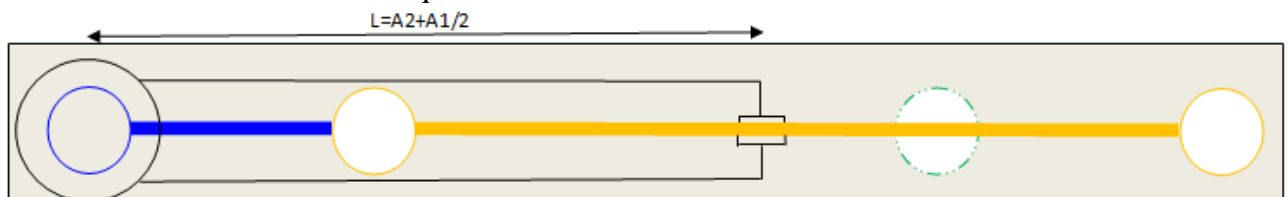


Figure 29:Principe de la solution 4

4.6. Conclusion

On a donc élaboré 4 principes de solution permettant le changement de configurations. Grâce à ces solutions, le changement de configuration est désiré et contrôlé. Il est donc possible de les utilisés dans le milieu industriel.

CHAPITRE 5. OBSERVATION PERSONNELLE

Dans cette partie, je vais vous présenter les observations que j'ai pu effectuer lors de mon travail de recherche à l'IRCCyN. Ces observations concernent principalement le milieu de la recherche et reflètent uniquement mon point de vue personnel.

Tout d'abord j'ai trouvé le travail de recherche très intéressant et très enrichissant. En effet, travailler sur un domaine nouveau où il existe très peu de travaux sur le sujet a été un défi personnel. Cette expérience a été très stimulante car je n'avais que peu de travaux sur lesquels m'appuyer. Et je trouve que dans ce cas il est difficile de savoir où cela aboutir. C'est pourquoi je trouve que le fait de travailler à (au moins) deux est presque indispensable car chacune des personnes a des points de vue différents sur le problème et ça permet donc de le résoudre sous différents angles. Cela m'a permis aussi de mieux comprendre certaines idées et de rendre le problème moins flou.

Bien que M. Briot m'ait beaucoup aidé sur ce sujet, je trouve que le travail de recherche est un travail relativement solitaire. Même si je travaillais dans le même environnement que d'autres étudiants en Master, il est difficile d'échanger sur les différents projets et de s'entraider car chaque projet et chaque problème nécessite un temps de compréhension et d'adaptation.

Ce qui a été le plus difficile de mon point de vue lors de ce stage a été de comprendre des résultats inattendus de simulation. En effet, lorsque je ne trouvais pas le « bon » résultat, je devais chercher les causes de l'erreur. Et il est difficile lorsque le sujet est nouveau et que l'on n'est pas sûr de savoir vraiment à quoi s'attendre en terme de simulation de savoir si on s'est trompé ou si le résultat est juste. J'ai dû donc vérifier à plusieurs reprises la modélisation, le code, les équations, vérifiés qu'il n'y ait pas de problème de solveur (assez fréquent lors du passage de singularité). Cela peut paraître anodin mais on peut facilement se perdre en passant de la modélisation au code et trouvé la source des erreurs qui peut être multiples. C'est très frustrant de voir que l'on peut perdre plusieurs heures à cause d'un signe moins ou d'une faute de frappe. C'est pourquoi j'essayais de vérifier le plus souvent possible la modélisation et le code pour détecter les erreurs et réduire la zone de recherche de celle-ci.

Lors de ce stage, j'ai eu la chance de rencontrer M. Ilian Bonev, un chercheur renommé qui a été un pionnier de la découverte des singularités de contrainte, et de lui présenter mon travail. J'ai été très honoré de faire sa connaissance et de pouvoir discuter avec lui.

CONCLUSION GENERALE

L'étude de la dégénérescence du modèle mécanique ne nous a pas permis de trouver une solution viable et robuste à la traversée des singularités de contraintes et donc au changement de mode d'opération. Cependant, cette étude a été réalisée sur un système 4 barres parallélogramme dont les points de singularités de contraintes ou plutôt points de singularités de l'espace articulaire correspondent aux points de singularité de Type 3 (sérielle et parallèle). Cette pluri singularité ne nous permet pas de généraliser l'étude ou même faire des analogies avec d'autres mécanismes. On peut donc remettre en question le choix du mécanisme et refaire une étude avec un mécanisme certes plus complexe en termes de nombre d'éléments mais dont les différentes singularités ne seraient pas confondues. De même les solutions proposées dans la seconde partie du rapport ne fonctionnent qu'avec ce mécanisme, certaines solutions peuvent marcher pour effectuer la traversée d'une singularité de contrainte d'un autre mécanisme mais l'étude de cette possibilité devra être réalisée au cas par cas.

Cependant dans le cas d'un mécanisme 4 barres, l'étude de la continuité d'une variable a permis de créer une trajectoire permettant le changement de mode d'opération. Bien que dans ce cas, le changement ne soit pas réversible et non réalisable avec un système réel, il peut exister d'autres trajectoires utilisant la continuité d'autres variables qui permettent le changement de mode d'opération. Dans la continuité de ce stage, on peut envisager de mener une étude sur l'existence de telles trajectoires

Dans le cadre d'une autre étude qui prolongerait celle-ci, on peut étudier la dégénérescence du modèle dynamique d'autres systèmes, on peut aussi envisager la conception de contrôleur permettant tester la traversée de la singularité avec les trajectoires créées dans la partie 3.4. L'objectif suivant est consacré au développement d'algorithmes de contrôles avancés et robustes basés sur des modèles évolués et dédiés aux systèmes robotiques reconfigurables. Ce contrôleur intelligent permettra d'augmenter la taille des zones parcourables de l'espace de travail du robot en gérant en ligne les modifications structurelles du système en fonction de la tâche à réaliser tout en garantissant la stabilité (mécanique et automatique) dans les phases de reconfigurations. On peut aussi concevoir de nouvelles structures parallèles robotisées permettant de répondre aux attentes industrielles en termes de configuration (la structure pourra réaliser plusieurs tâches complexes en modifiant sa structure mécanique interne grâce à un changement de mode d'opération). La création d'un ou plusieurs prototypes sera nécessaire pour valider les études.

BIBLIOGRAPHIE

- [Alba et al., 2007] Alba, O., Pamanes, G., and Wenger, P. (2007). Trajectory planning of a redundant parallel manipulator changing of working mode. *12th IFToMM World Congress*, pages 1_6.
- [Alvan and Slousch, 2003] Alvan, K. and Slousch, A. (2003). On the control of the spatial parallel manipulators with several degrees of freedom. *Mechanism and Machine Theory*.
- [Arakelian et al., 2006] Arakelian, V., Briot, S., and Glazunov, V. (2006). Singular Position of a PAMINSA Parallel manipulator. *Journal of Machinery, Manufacture and Reliability, Alterton Press Inc.*, 1 :62_63.
- [Arakelian et al., 2008] Arakelian, V., Briot, S., and Glazunov, V. (2008). In rease of singularity-free zones in the workspace of parallel manipulators using mechanisms of variable structure. *Mechanism and Machine Theory*, 43(9) :1129_1140.
- [Arakelian al., 2007] Arakelian, V. ; Briot, S. ; Glazunov, V. (2007). Improvement of functional performance of spatial parallel manipulators using mechanisms of variable structure. In *Proceedings of the 12th World Congress in Mechanism and Machine Science*.
- [Briot, 2007] Briot, S. (2007). *Analyse et Optimisation d'une Nouvelle Famille de Manipulateurs Paralleles*. PhD thesis.
- [Briot et al., 2008] Briot, S., Arakelian, V., and Chablat, D. (2008). Optimal Force Generation in Parallel Manipulators for Passing through the Singular Positions. *The International Journal of Robotics Research*, 27(8) :967_983.
- [Briot and Bonev, 2009] Briot, S. and Bonev, I. a. (2009). Self Motions of the pantopteron. *ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences*, pages 13_18.
- [Briot et al., 2010] Sébastien Briot, Anatol Pashkevich and Damien Chablat(2010). Optimal Technology-Oriented Design of Parallel Robots for High-Speed Machining Applications, "*Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2010)*"
TECHNOLOGY-ORIENTED OPTIMIZATION OF THE SECONDARY DESIGN PARAMETERS OF ROBOTS FOR HIGH-SPEED MACHINING APPLICATIONS. *Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*
- [Chablat, 2008] Chablat, D. (2008). Contributions à l'analyse et à l'optimisation de mécanismes poly-articulés. *Thèse d'habilitation à Diriger des Recherches*.
- [Cheng et al., 2003] Cheng, H., Yiu, Y.-k., Member, S., and Li, Z. (2003). Dynamics and Control of Redundantly Actuated Parallel Manipulators. *ASME transaction on mechatronics*, 8(4) :483_491.
- [Dasgupta and Mruthyunjaya, 1998] Dasgupta, B. and Mruthyunjaya, T. (1998). Force redundancy in parallel manipulators : theoretical and practical issues. *Mechanism and Machine Theory*.

-
- [Glazunov et al., 2004] Glazunov, V., Kraynev, A., Bykov, R., Rashoyan, G., and Novikova, N. (2004). Parallel manipulator control while intersecting singular zones. In *Proceedings of the 15th Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators (RoManSy) CISM-IFTOMM*.
- [Gogu, 2004] Gogu, G. (2004). Structural synthesis of fully-isotropic translational parallel robots via theory of linear transformations. *European Journal of Mechanics A/Solids* 23, (6) :1021_1039.
- [Gosselin, 2009] Gosselin, C. (2009). Compact dynamic models for the tripteron and quadruperon parallel manipulators. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, pages 1_12.
- [Gosselin and Clément, 2007] Gosselin, C. and Clément, M. (2007). Parallel mechanisms of the multipteron family : kinematic architectures and benchmarking. In *Robotics and Automation*.
- [Johannesson et al., 2004] : Johannesson, L., Berbyuk, V., and Torgny, B. (2004). Gantry Tau - A New Parallel Kinematic Robot. Proceedings of the 4th Chemnitz Parallel Kinematics Semina.
- [Khalil et Guégan 2002], A novel solution for the dynamic modeling of Gough-Stewart manipulators. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Washington, DC, 11–15 May.
- [Kong et al., 2013] Kong, K., Chablat, D., Caro, S., Yu, J., and Gosselin, C. (2013). Type Synthesis of Kinematically Redundant 3T1R Parallel Manipulators. *ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*.
- [Kong and Gosselin, 2002] Kong, K. and Gosselin, C. (2002). A class of 3-dof translational parallel manipulators with linear input-output equations. In *the workshop on Fundamental issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, pages 3_4.
- [Kotlarski et al., 2008] Kotlarski, J., Abdellatif, H., and Heimann, B. (2008). Improving the Pose Accuracy of a Planar 3RRR Parallel Manipulator using Kinematic Redundancy and Optimized Switching Patterns. *Proc. of the 2008 International Conference on Robotics and Automation*, pages 3863_3868.
- [Luh, 1996] Luh, C.-M., Adkins, F.A., Haug, E.J., and Qui, C.C., 1996, “Working capability analysis of Stewart platforms,” *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 118(6), pp. 89-91
- [Manubens et al., 2012] Manubens, M., Moroz, G., Chablat, D., Wenger, P., and Rouillier, F. (2012). Cusp Points in the Parameter Space of Degenerate 3-RPR Planar Parallel Manipulators. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 4(4) :041003.
- [McAree, 1999] McAree, P. R. (1999). An Explanation of Never-Special Assembly Changing Motions for 3-3 Parallel Manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 18(6) :556_574.
- [Merlet 2006]: Merlet, J.-P. (2006). *Parallel Robots*, 2nd edition. Berlin, Springer.

[Moroz et al., 2010] Moroz, G., Rouiller, F., Chablat, D., and Wenger, P. (2010). On the determination of cusp points of 3-RPR parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 45(11) :1555_1567.

[Murray et al., 2010] Murray, M., Hovland, G., and Brogardh, T. (2010). Optimised assembly mode reconfiguration of the 5-DOF Gantry-Tau using mixed-integer programming. *Mechanica*, 46(1) :101_111.

[Pagis et al., 2013] Georges Pagis, Sébastien Briot, Nicolas Bouton and Philippe Martinet. *Proceedings of the ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*.

[Rakotomanga and Bonev, 2010] Novona Rakotomanga and Ilian A. Bonev(2010). A 3-R PR Parallel Mechanism With Singularities That are Self-Motions. *Journal of Mechanisms and Robotics August 2010*.

[Wang and Gosselin, 2004] Wang, J. and Gosselin, C. M. (2004). Kinematic Analysis and Design of Kinematic ally Redundant Parallel Mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 126(1) :109.

[Wenger and Chablat, 1997] Wenger, P. and Chablat, D. Definition sets for the direct kinematics of parallel manipulators. *1997 8th International Conference on Advanced Robotics. Proceedings. ICAR'97*, 6597(2) :859_864.

[Zein et al., 2006] Zein, M., Wenger, P., and Chablat, D. (2006). Singular curves and cusp points in the joint space of 3-RPR parallel manipulators. *Proceedings 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006.*, pages 777_782.

[Zlatanov and Bonev, 2001] : Zlatanov, D. and Bonev (2001), 'The Mystery of the Singular SNU Translational Parallel Robot''

[Zlatanov and Bonev, 2002] Zlatanov, D. and Bonev, I. (2002). Constraint singularities of parallel mechanisms. *Proceedings of International Conference on Robotics and Automation*.