Petit mémo du Langage de données de B (11/2019)

1 Logique

Description	Notation	Ascii
and	$p \wedge q$	`p & q`
or	$p \vee q$	`p or q`
not	$\neg p$	`not p`
implication	$p \Rightarrow q$	`((p) ==> (q))`
univ. quantif.	$\forall x.p(x)$	`!x.(p(x))`
exist. quantif.	$\exists x.p(x)$	`#x.(p(x))`

Variables with one character are used (and reserved) by the Atelier B prover.
User variables should have more than one character and be typed :
⚠ `#xx.((xx : T) & p(xx))` and `!xx.((xx : T) ==> p(xx))`

2 Sets, relations, functions

A reminder on set theory can be found in Section 3

2.1 Basic operators

E, F and T are sets, x an member of F

Description	Notation	Ascii
union	$E \cup F$	`E \/ F`
intersection	$E \cap F$	`E /\ F`
membership	$x \in F$	`x : F`
difference	$E \setminus F$	`E - F`
inclusion	$E \subseteq F$	`E <: F`
selection	`choice(E)`	`choice(E)`

2.2 Generalised/Quantified union and intersection

The B language proposes the generalised union and intersection : `union`, `inter`

Generalised Union. An operator to achieve the generalised union of well-formed *set expressions*.

$S \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(T))$

$\Rightarrow$

$union(S) = \{x \mid x \in T \wedge \exists u.(u \in S \wedge x \in u)\}$

Example

$$union(\{\{aa,\ ee,\ ff\},\{bb,\ cc,\ gg\},\{dd,\ ee,\ uu,\ cc\}\})$$

$$= \{aa, ee, ff, bb, cc, gg, dd, uu\}$$

Generalised Intersection. An operator to achieve the generalised intersection of of well-formed *set expressions.*

$S \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(T))$
$\Rightarrow$
$inter(S) = \{x \mid x \in T \wedge \forall u.(u \in S \Rightarrow x \in u)\}$

Example
$inter(\{\{aa,\ ee,\ ff,\ cc\},\ \{bb,\ cc,\ gg\},\{dd,\ ee,\ uu,\ cc\}\} = \{cc\}$

Quantified Union. An operator to achieve the quantified union of well-formed *set expressions.*

$\forall x.(x \in S \Rightarrow E \subseteq T)$
$\Rightarrow$

$$\bigcup x.(x \in S|E) = \{y|y \in T \wedge \exists x.(x \in S \wedge y \in E)\}$$

Exemple

$$UNION(x).(x \in \{1,\ 2,\ 3\} \mid \{y|y \in NAT \wedge y = x * x\})$$

$$= \{1\} \cup \{4\} \cup \{9\} = \{1,\ 4,\ 9\}$$

Quantified Intersection. An operator to achieve the quantified intersection of of well-formed *set expressions.*
$\forall x.(x \in S \Rightarrow E \subseteq T)$
$\Rightarrow$
$\bigcap x.(x \in S \mid E)$
$= \{y \mid y \in T \wedge \forall x.(x \in S \Rightarrow y \in E)\}$

Example
$INTER(x).(x \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \mid \{y \mid y \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} \wedge y > x\})$

$$= inter(\{\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},\{2,\ 3,\ 4,\ 5\},\ \{3,4,5\},\ \{4,5\}\})$$

2.3 Negations of operators.

Description	Notation	Ascii
not member	$x \notin F$	`x /: F`
non inclusion	$E \not\subseteq F$	`E /<: F`
non equality	$E \neq F$	`E /= F`

2.4 Relations

A relation r over D and A is a subset of the cartesian product $D \times A$. A relation is is noted $r : D \leftrightarrow A$ or $r \subseteq D \times A$
r is a set of couples (d, a)
(d, a) is also written $d \mapsto a$

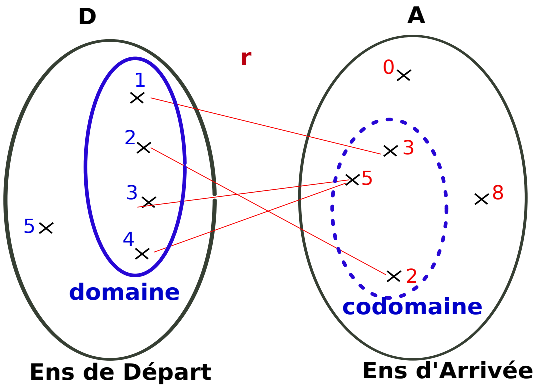


FIGURE 1 – Euler-Venn diagram of r

$r = \{(1,3),(2,2),(3,5),(4,5)\}$ ou $r = \{1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 5, 4 \mapsto 5\}$

dom$(r) = \{1, 2, 3, 4\}$ et ran$(r) = \{3, 5, 2\}$

Domaine : domaine Codomaine : range

Relations.

Description	Notation	Ascii
relation	$r : S \leftrightarrow T$	r : S <-> T
domain	$dom(r) \subseteq S$	dom(r) <: S
range	$ran(r) \subseteq T$	ran(r) <: T
composition	$r;s$	r;s
composition r(s)	$r \circ s$	r(s)
identity	$id(S)$	id(S)

Description	Notation	Ascii
domain restrictition	$S \lhd r$	S <| r
range restriction	$r \rhd T$	r |> T
domain antirestriction	$S \lhd r$	S <<| r
range antirestriction	$r \unrhd T$	r |>> T
inverse	$r^{\sim}$	r ~
relationnelle image	$r[S]$	r[S]
overiding	$r1 \oplus r2$	r1 <+ r2
direct product of rel.	$r1 \otimes r2$	r1 >< r2
closure	$closure(r)$	closure(r)
reflexive trans. closure	$closure1(r)$	closure1(r)

Fonctions.

Description	Notation	Ascii
partial function	$S ⇸ T$	S +-> T
total function	$S \rightarrow T$	S --> T
partial injection	$S ⤔ T$	S >+> T
total injection	$S \rightarrowtail T$	S >-> T
partial surjection	$S ⤀ T$	S +->> T
total surjection	$S \twoheadrightarrow T$	S -->> T
total bijection	$S ⤖ T$	S >->> T
lambda abstraction	$\%x.(P \mid E)$	

3 Introduction à la théorie des ensembles : des rappels

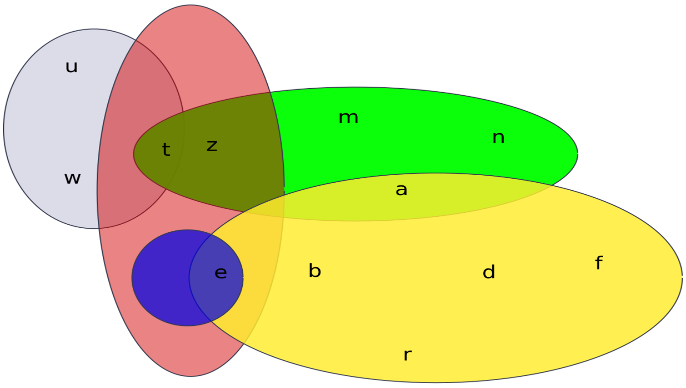


FIGURE 2 – Exemple de représentation d'ensembles

Un ensemble . c'est un regroupement d'éléments de même nature ou propriété (voir Figure 3).

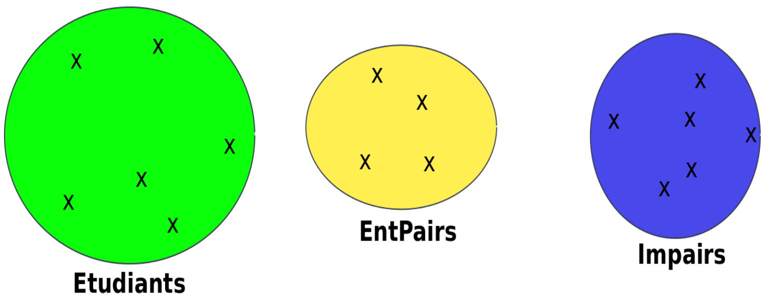


FIGURE 3 – Des ensembles

Que pensez-vous de l'illustration de la Figure 4 ?

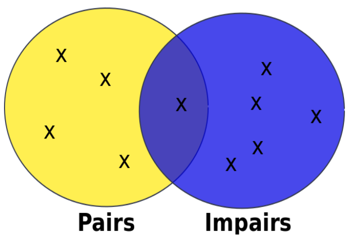


FIGURE 4 – Une description ensembliste

⚠ On peut écrire des expressions fausses.

Exemples d'ensembles prédéfinis. Les entiers naturels ($\mathbb{N}$) ; les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) ; les réels ($\mathbb{R}$), etc

On peut définir plusieurs autres ensembles (dans un modèle, ou logiciel) : PERSONNE, HOMME, FEMME, ETUDIANT, NUMINSEE, POINT, Abscisses, Ordonnees, Processus, Dossiers, Emoji, etc

On peut définir les ensembles

— *abstraits :* soit S un ensemble ; soit E un ensemble
— *en extension* : = Couleur = $\{r, b, v\}$
— en *compréhension* : CarreN4 = $\{n | n \in \mathbb{N} \wedge n < 5 \ . \ n * n\}$
— en *composant* d'autres ensembles, avec des opérateurs $\cup$ $\cap$ $\times$:
  Soit $C = A \cup B$, $D = A \cap B$, etc

— Eléments dans un ensemble E; opérateur d'appartenance : $x \in E$ (vrai ou faux)
— *Cardinal* d'un ensemble E : nombre d'éléments dans E : card(E)
— *Opérateurs constructeurs* sur les ensembles E, F :

union	$E \cup F, \quad E \cup \{x\}$
intersection	$E \cap F$
différence	$E \setminus F$
produit cartésien	$E \times F$

— *Opérateurs relationels* sur les ensembles E, F :

inclusion	$E \subseteq F$

Exemples d'ensemble (notation de VENN, EULER)

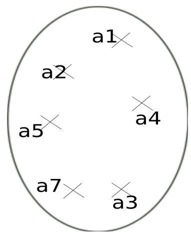


FIGURE 5 – Exemple d'ensemble (E) - avec card(E) = 6

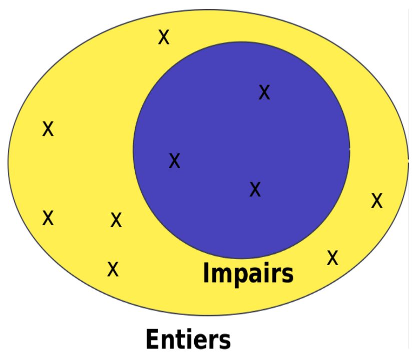


FIGURE 6 – Exemple d'inclusion
Impairs ⊆ Entiers

Exemples de Produit cartésien

— Soient $E = \{e_1, e_3, e_8\}$ un ensemble d'étudiants, $G = \{g_1, g_2\}$ un ensemble de groupes.
On peut construire $E \times G = \{(e_1,\ g_1),\ (e_1,\ g_2),\ (e_3,\ g_1),\ (e_3,\ g_2), (e_8,\ g_1),\ (e_8,\ g_2)\}$.
— Soit $E = \{e_1, e_3\}$ un ensemble d'étudiants, $V = \{v_1, v_3\}$ un ensemble de voitures.
On peut construire $E \times V = \{(e_1,\ v_1), (e_1,\ v_3), (e_3,\ v_1),\ (e_3,\ v_3)\}$.
— Quelles interrogations cela suscitent ?
quelles compréhensions vous en avez ?
Quelles idées (interprétations) cela vous suggèrent ?

Relation. Une *relation (notée avec ↔)* est un sous-ensemble du produit cartésien
Exemple
$r\ :\ ETUDIANT \leftrightarrow GROUPE$
r est un sous-ensemble de $ETUDIANT \times GROUPE$

Fonction. Une *fonction* est une relation dotée de propriétés particulières : *un élément de l'ensemble de départ n'a au plus qu'une image.* Voir Figure 7.

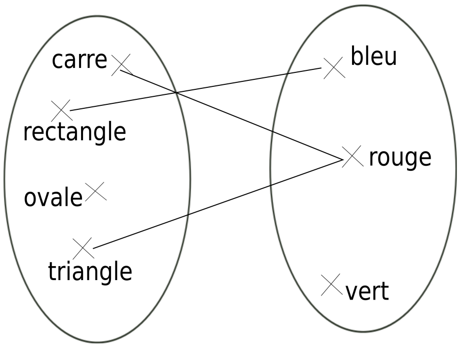


FIGURE 7 – Exemple de fonction

Exemple de relation (diagramme de EULER-VENN).

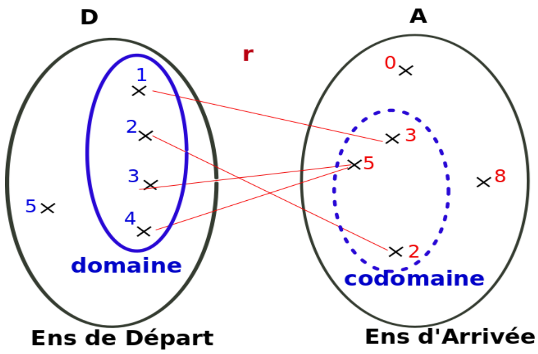


FIGURE 8 – Relation - vocabulaire

Soit $r : D \leftrightarrow A$ une relation d'un ensemble D (dit de **Départ**) vers un ensemble A dit d'**Arrivée**
antécédents : éléments de D qui ont une image dans A
images : éléments de A qui ont un antécédent dans D
domaine de la relation r, noté $dom(r)$: l'ensemble des éléments de D qui ont une image dans A.
codomaine de la relation r, noté $ran(r)$: l'ensemble des éléments de A qui sont images des éléments de D.

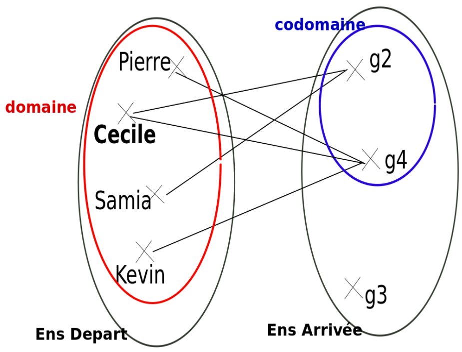


FIGURE 9 – Exemple de relation

Types de fonction. Il y a plusieurs types de fonction. Fonction **partielle, totale, injective, surjective, bijective**

Fonction partielle. une fonction partielle f est une fonction telle que, *certains éléments* de l'ensemble de départ *n'ont pas d'images.* dom(f) $\subset$ ensemble de départ. voir Fig. 10

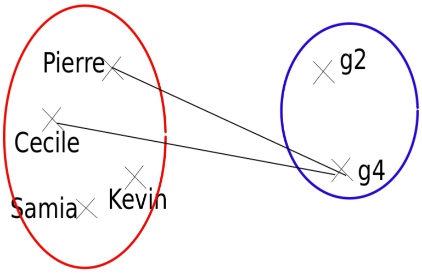


FIGURE 10 – Exemple de fonction partielle

Fonction totale. Une fonction totale f est une fonction telle que, *tous les éléments* de l'ensemble de départ *nt une* image. dom(f) = ensemble de départ. Voir Fig. 11

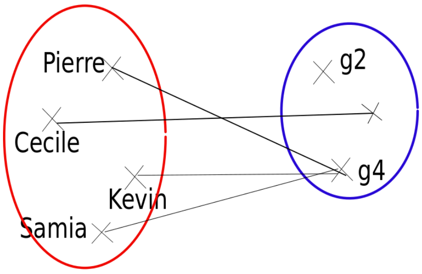


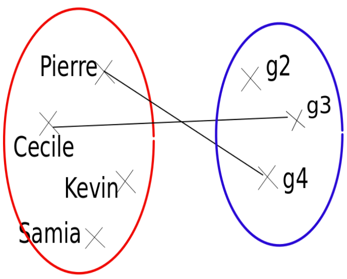
FIGURE 11 – Exemple de fonction totale

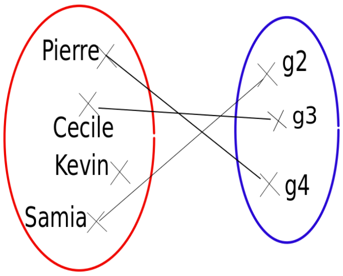
fonction injective f (ou une injection). Une fonction f telle que, pour deux antécédents distincts, on a deux images distinctes; $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

fonction surjective f (ou une surjection). Une fonction f telle que, tout élément de l'ensemble d'arrivée est image : le codomaine de f égal à l'ensemble d'arrivée; $ran(f) = A$

fonction bijective f (ou une bijection). une fonction f telle que f est injective et surjective.

Exercice. Trouver le type de chacune des relations/focntions suivantes





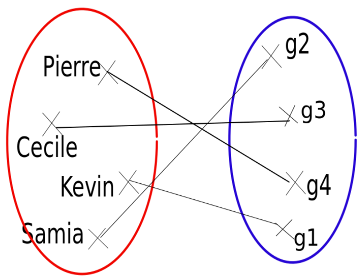


FIGURE 12 – fonctions ... (avez vous trouvé?)

Propriétés des relations. Lorqu'on a (défini) $r : E \leftrightarrow F$, on peut utiliser aussi son inverse $r^{-1} : F \leftrightarrow E$.
Synonymes : inverse, réciproque, transposée.

De la même façon on a l'inverse d'une fonction; cependant, l'inverse d'une fonction peut être une relation.

N.B. Document de travail en cours d'évolution, Novembre 2019