Introduction à la théorie des ensembles

- Eléments dans un ensemble E ;
  opérateur d'appartenance : $x \in E$ (vrai ou faux)
- Cardinal d'un ensemble E : nombre d'éléments dans E : card(E)
- Opérateurs constructeurs sur les ensembles E, F :

union	$E \cup F, \quad E \cup \{x\}$
intersection	$E \cap F$
différence	$E \setminus F$
produit cartésien	$E \times F$

- Opérateurs relationels sur les ensembles E, F :

inclusion	$E \subseteq F$

Exemple d'ensemble, Venn, Euler

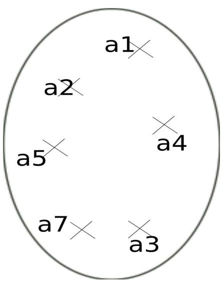

Figure: Exemple d'ensemble (E)

card(E) = 6

Exemples de Produit cartésien

- Soient $E = \{e_1, e_3, e_8\}$ un ensemble d'étudiants,
  $G = \{g_1, g_2\}$ un ensemble de groupes.
  On peut construire
  $E \times G = \{(e_1,\ g_1,),\ (e_1,\ g_2),\ (e_3,\ g_1),\ (e_3,\ g_2), (e_8,\ g_1),\ (e_8,\ g_2)\}$.
- Soit $E = \{e_1, e_3\}$ un ensemble d'étudiants,
  $V = \{v_1, v_3\}$ un ensemble de voitures.
  On peut construire $E \times V = \{(e_1,\ v_1), (e_1,\ v_3), (e_3,\ v_1),\ (e_3,\ v_3)\}$.
- Quelles interrogations cela suscitent ? quelles compréhensions vous en avez ?
  Quelles idées (interprétations) cela vous suggèrent ?

Relations

Relation

Une relation (notée avec $\leftrightarrow$) est un sous-ensemble du produit cartésien

- Exemple
  $r\ :\ ETUDIANT \leftrightarrow GROUPE$
  r est un sous-ensemble de $ETUDIANT \times GROUPE$

Fonction

Les fonctions sont des relations dotées de propriétés particulières.
Un élément de l'ensemble de départ n'a au plus qu'une image.

Ce sont des concepts fondamentaux en modélisation formelle (du logiciel).

Exemple de relation, Euler, Venn

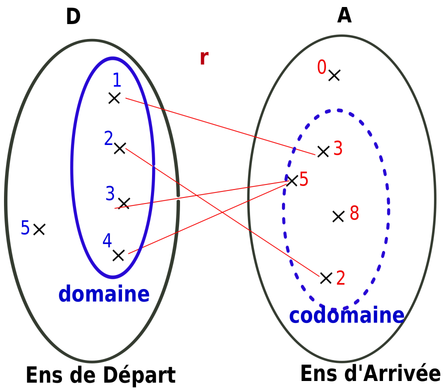

Figure: Exemple de relation - vocabulaire

Soit $r : D \leftrightarrow A$ une relation d'un ensemble D (dit de Départ) vers un ensemble A dit d'Arrivée

Les éléments de D qui ont une image dans A sont appelés antécédents

Les éléments de A qui ont un antécédent dans D sont appelés images

On appelle domaine de la relation r noté $dom(r)$, l'ensemble des éléments de D qui ont une image dans A.

On appelle codomaine de la relation r noté $ran(r)$, l'ensemble des éléments de A qui sont images des éléments de D.

Exemple de relation, Euler, Venn

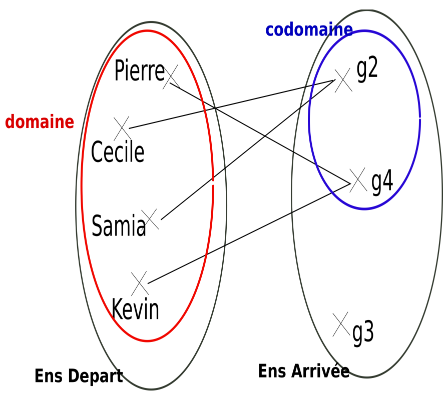

Figure: Exemple de relation

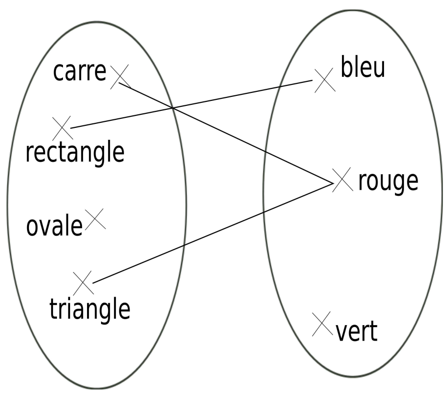

Figure: Exemple de relation

Fonctions

Plusieurs types de fonction

- fonctions : partielles, totales, injectives, surjectives, bijectives

fonction injective f (ou une injection)

- une fonction f telle que, pour deux antécédents distincts, on a deux images distinctes ; $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

fonction surjective f (ou une surjection)

- une fonction f telle que, tout élément de l'ensemble d'arrivée est image : le codomaine de f égal à l'ensemble d'arrivée ; $ran(f) = A$

fonction bijective f (ou une bijection)

une fonction f telle que f est injective et surjective.

Relations, Fonctions

Lorqu'on a (défini) $r : E \leftrightarrow F$, on peut utiliser aussi son inverse $r^{-1} : F \leftrightarrow E$.

De la même façon on a l'inverse d'une fonction.
Synonymes : inverse, réciproque, transposée

Attention : l'inverse d'une fonction peut être une relation.

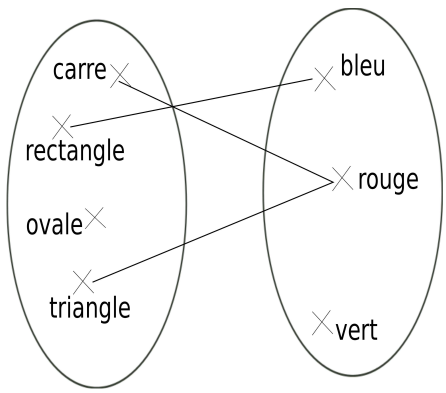

Figure: Exemple de relation (r)

Trouver la relation inverse r^{-1}.

Opérateurs sur les relations

Désignation	Notation	Ascii
relation	$r : S \leftrightarrow T$	r : S <-> T
domaine	$dom(r) \subseteq S$	dom(r) <: S
image	$ran(r) \subseteq T$	ran(r) <: T
composition	$r;s$	r;s
composition r(s)	$r \circ s$	r(s)
identité	$id(S)$	id(S)

Opérateurs sur les relations (suite)

<table>
<tr><th>Désignation</th><th>Notation</th><th>Ascii</th></tr>
<tr><td>restriction domaine</td><td>$S \triangleleft r$</td><td>S <| r</td></tr>
<tr><td>restriction codomaine</td><td>$r \triangleright T$</td><td>r |> T</td></tr>
<tr><td>antirestriction domaine</td><td>$S \blacktriangleleft r$</td><td>S <<| r</td></tr>
<tr><td>antirestriction codomaine</td><td>$r \blacktriangleright T$</td><td>r |>> T</td></tr>
<tr><td>inverse</td><td>$r^{\sim}$</td><td>r ~</td></tr>
<tr><td>image relationnelle</td><td>$r[S]$</td><td>r[S]</td></tr>
<tr><td>écrasement</td><td>$r1 \oplus r2$</td><td>r1 <+ r2</td></tr>
<tr><td>produit direct de rel.</td><td>$r1 \otimes r2$</td><td>r1>< r2</td></tr>
<tr><td>fermeture</td><td>$closure(r)$</td><td>closure(r)</td></tr>
<tr><td>fermeture reflexive trans.</td><td>$closure1(r)$</td><td>closure1(r)</td></tr>
</table>