



encadrés par C. Attiogbé, G. Nachouki

Cahier d'exercices 1 - Modélisation logique et ensembliste

Tous les exos doivent être faits (finissez à la maison ceux qui ne sont pas traités en TD)

Nombre de séances : . . . - Compte-rendu demandé : . . . selon consignes...

[opt] indique les questions optionnelles en TD

Modélisation en Logique**Exercice 0 (bases de cours)**

Une **proposition** est un énoncé qui peut avoir une seule valeur de vérité : **vrai** ou **faux** ;
on peut **dénoter** une proposition par une constante (A, B, C, P, Q , etc).

On peut **composer** plusieurs propositions à l'aides des oérateurs de la Logique $\wedge, \neg, \vee, \Rightarrow$.

Q#1 Donnez les tables de vérité des opérateurs de la logique : $\wedge, \neg, \vee, \Rightarrow$.

On utilisera la forme habituelle rappelée ci-après (où 0, 1 représentent Faux, Vrai) :

A	$\neg A$
0	
1	

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg (A \vee B)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

A	B	$A \Rightarrow B$
		$(\neg A \vee B)$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Dans la suite vous allez vous exercez à **modéliser des énoncés simples**, dans le but de vous préparer à analyser et modéliser des données, des systèmes d'information, des **énoncés de cahiers de charges de logiciels**.

Exercice 1 : logique des propositions

On se donne comme cadre de travail, les transports en commun (bus, tram, chronobus, etc) dans une belle ville. Dans le système d'information de la société des transports, les périodes de l'année et les jours de la semaine sont catégorisés afin de définir des tarifs, etc

Soient les **propositions** suivantes, représentées par les constantes B, R, F, \dots

- B le jour est bleu
- R le jour est rouge
- F le jour est férié
- O le jour est orange
-

Q#2 Que signifient (en français) les énoncés suivants :

$$B \wedge F$$

$$F \vee O$$

$$\neg F$$

Q#3 Ecrivez les énoncés suivants (en ajoutant au besoin des propositions que vous nommerez) en logique (propositions, prédicats) :

- Un jour ne peut être à la fois bleu et orange.
- Le bus est gratuit durant les jours orange et fériés.
- Les bus ne circulent pas les jours fériés.
- Les bus circulent les jours orange fériés.

Exercice 2 : logique des prédicats

Un **prédicat** est un énoncé une valeur de vérité relative; elle dépend des variables (x, y, u, v , etc) utilisées dans la formulation du prédicat. Par exemple $x > 10$ est un prédicat.

Avec les prédicats, on peut aussi généraliser ou particulariser les énoncés en utilisant les **quantificateurs** : \forall (*pour tout*) et \exists (*il existe*)

Q#4 Que signifient (en français) les énoncés suivants :

- $\forall x . P(x)$
- $\exists y . F(y)$
- $\forall x . (P(x) \Rightarrow G(x))$
- $\exists y . (F(y) \wedge R(y))$
- $\forall n . (\text{entier}(n) \wedge n > 4 \Rightarrow n > 0)$

Q#5 qu'appelle-t-on variable *libre*? *liée*?

Exercice 3 : propositions et prédicats

Q#6 Modéliser à l'aide de propositions et prédicats, le comportement d'un algorithme qui, étant donné un jour j , indique si le bus circule ou pas et si le bus est gratuit ou pas.

Servez vous du contexte de l'exercice 1, en apportant les améliorations nécessaires.

Q#7 Ecrivez les propositions et prédicats correspondants aux énoncés suivants (vous pouvez réécrire l'énoncé avant, sans perdre son sens) :

- Tous les bus dont le numéro est impair circulent en cœur de ville.
- Il y a des bus qui circulent en site propre.
- Tous les étudiants du groupe 5 sont bons en *natation*.
- Aucune fonctionnalité de mon lecteur mp3 ne marche.
- Tous les étudiants inscrits ont une note d'assiduité.
- Un programme informatique bien écrit ne se plante pas.

Exercice 4 : propositions et prédicats

Ecrivez les énoncés suivants en logique du premier ordre; on définira si nécessaire, des constantes de proposition ou des prédicats auxiliaires.

1. Toute salle (de classe) a une porte.
2. Il y a des salles qui n'ont pas de porte.

3. Un bus b est dit *express* s'il circule en site propre et s'il a moins de 5 stations d'arrêt.
4. Un nombre entier n est premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même (autrement dit, ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même).
5. L'entier m est soit négatif soit strictement supérieur à 99.
6. Le carré du successeur de l'entier n est positif.
7. Les parents de cousins germains sont frères.

Exercice 5

Analysez et modélisez les énoncés suivants (sortis de leur contexte, mais qu'on peut bien imaginer) :

1. Les pièces de l'aile (de l'avion) qui ont été fabriquées entre 1998 et 2005 doivent être remplacées.
2. Les modules d'enseignement qui durent plus de 24h doivent avoir un coeff. supérieur ou égal à 3.

Exercice 6 - Raisonnement en logique

Que pensez vous des raisonnements suivants :

- Les paresseux sont étudiants, Jean est étudiant, donc Jean est paresseux.
- Les éléphants venant d'Afrique ont de grandes oreilles, l'éléphant (Bouba) du Zoo de la Pointe a de grandes oreilles; Bouba vient d'Afrique.
- Que dire du raisonnement précédent si on avait :
Les éléphants **vivant** en Afrique ont de grandes oreilles, l'éléphant (Bouba) du Zoo de la Pointe a de grandes oreilles; Bouba **vient** d'Afrique.
- De $Q_1 \Rightarrow Q_3$, on déduit $(Q_1 \vee Q_2) \Rightarrow Q_3$.
- Sachant $Q_1 \Rightarrow Q_3$, on en conclut $Q_1 \wedge Q_2 \Rightarrow Q_3$.
- Plus il y a d'emmental, plus il y a de trous;
Plus il y a de trous, moins il y a d'emmental;
Plus il y a d'emmental, moins il y a d'emmental.

Exercice - à faire chez soi

1. Modélisez en logique les énoncés suivants :
 - (a) L'indice de la première occurrence de U dans la chaîne de caractères CH est supérieure à ceux des occurrences de M et N ou alors M et N n'apparaissent pas dans la chaîne.
 - (b) Tout étudiant est dans un groupe (d'étudiants);
 - (c) Toute voiture a quatre roues;
 - (d) Aucune porte ne doit être fermée;
 - (e) Tout compte doit être approvisionné;
 - (f) Toutes les cellules doivent être valuées;
 - (g) Le tarif J est appliqué pour les moins de 12 ans et le tarif K pour les autres.
 - (h) La température de la pièce ne doit jamais dépasser 18 degrés.
 - (i) On affiche M1 lorsque la température est basse et il n'y a pas de brouillard, et on affiche M2 lorsque il pleut et il ne fait pas nuit.
2. Ecrivez un algorithme qui donne comme résultat un booléen (la valeur est Vrai ou Faux), selon que la condition donnée en **1a** soit vraie ou fausse.

En guise de synthèse et de leçons :

Attention au raisonnement (rapide) en Logique!
prenez donc le temps de réfléchir à vos modèles, à vos raisonnements, à vos programmes, ...

Ex Falso Quodlibet : du faux on peut déduire n'importe quoi!

Sachez détecter le *sophisme* : raisonnement logique qui aboutit à une affirmation fausse!

Modélisation ensembliste

Exercice 7 - ensembles

Considérons un ensemble de points dans le plan. Considérons un ensemble d'abscisses et un ensemble d'ordonnées. On veut exprimer que tout point a une abscisse et une ordonnée. Proposez des solutions.

Exercice 8 - ensembles

Considérez un ensemble B de bus et un ensemble N de numéros (donnés aux bus). Proposez quelques éléments dans chacun des ensembles.

Q#8 selon votre proposition, quel est le **cardinal** de B ? de N ?

Q#9 calculez le **produit cartésien** $N \times B$; quel est son cardinal?

Q#10 Proposez un exemple d'attribution de numéro au bus. Pouvez-vous dessiner votre exemple? Est-ce une fonction? une relation?

Q#11 Etant donné, un ensemble de bus, quels sont tous les regroupements possibles de bus qu'on peut faire (quel opérateur permet de les calculer)? combien de regroupements de bus sont-ils possibles?

Exercice 9 - ensembles, relations et fonctions

Soient deux ensembles abstraits : D (comme Départ) et A (comme Arrivée). En guise d'illustration, imaginons que D est constitué des **éléments** (certains seront des **antécédents**) : $a_1, a_2, a_4, a_7, a_0, a_5$ et que A est constitué des **éléments** (certains seront des **images**) : i_1, i_3, i_6, i_9, i_5 .

On écrit $D = \{a_1, a_2, a_4, a_7, a_0, a_5\}$ et $A = \{i_1, i_3, i_6, i_9, i_5\}$

Notons par \leftrightarrow le symbole de la relation entre ensembles, \rightarrow le symbole de la fonction totale et par \rightarrow le symbole de la fonction partielle. Rappelez-vous aussi des diagrammes de EULER-VENN.

1. Donnez sous forme de diagramme puis en extension, un exemple de fonction injective entre D et A , appelons la f_i .
quelle est la forme et quel est le type des éléments de f_i ?
quel est le type qui caractérise f_i ?
2. est-ce qu'il y a d'autres fonctions injectives entre D et A ? pour D et A quelconques, combien y-a-t-il de fonctions entre D et A ?

3. Donnez sous forme de diagramme puis en extension, un exemple de fonction surjective, appelons la f_s . Donnez le type de f_s .
4. Donnez sous forme de diagramme puis en extension, un exemple de fonction bijective, appelons la f_b . Donnez le type de f_b [Modifiez les ensembles A, D au besoin].
5. Donnez, en terme d'inclusion d'ensemble, des relations entre \leftrightarrow , \leftrightarrow , \rightarrow .
6. Quelle est le lien (ou la propriété) qui lie : ensemble, relation, fonction?

Exercice 10 - ensembles, relations et fonctions

Prenons maintenant le contexte de transports en commun. On veut décrire et modéliser une partie du système d'information de la société de transports en commun. Pour cela les hypothèses de travail réalistes et raisonnables peuvent être faites. Au minimum, on considère qu'il y a des bus et des tramways ; il y a des lignes qui portent des identifiants ; des bus circulent sur des lignes. Chaque ligne a deux stations d'extrémité, et est composée d'un ensemble de stations qui se suivent. Des lignes peuvent partager des stations ;

Q#12 Modélisez une partie de ce système d'information, en faisant les abstractions nécessaires.

Q#13 Comment peut-on exprimer un *trajet* (sur une ligne)? un trajet entre deux stations?

Q#14 Peut-on savoir si deux lignes données partagent au moins une station?

Exercice 11 - ensembles, relations

Modélisation d'un arbre généalogique. On considère une version simplifiée où les personnes sont identifiées par un nom et une date de naissance. Il ne peut y avoir d'inversion dans l'ascendance. (Simplifier avec *parent de...*)

Exercice 12 - modélisation ensembliste

Soit un réseau constitué d'un ensemble d'ordinateurs connectés entre eux par des cables. On peut bien imaginer le dessin d'un tel réseau.

On veut manipuler ce réseau avec un logiciel, pour simuler sa construction et sa maintenance (ajout/suppression d'ordinateurs, connexion entre ordinateurs, etc).

On précise qu'un ordinateur peut être relié (ou connecté) à un ou plusieurs autres ordinateurs.

1. Ecrivez un modèle ensembliste représentant le réseau d'ordinateurs ;
2. En utilisant votre modèle, modéliser l'opération d'ajout d'un ordinateur au réseau ;
3. le retrait d'un ordinateur dans un réseau ;
4. [opt] la connexion entre deux ordinateurs donnés qui ne sont pas encore reliés entre eux (appartenant au réseau).

Exercice 13 - modélisation des données pour programmer

Faites les abstractions nécessaires pour modéliser les données dans les descriptions informelles suivantes :

cas1 Tout ordinateur est composé d'un processeur (CPU), d'un écran et d'un clavier. Si l'ordinateur est en état de marche alors l'écran, le processeur et le clavier sont en état de marche. Si le clavier ou l'écran ou le processeur est en panne, on ne peut utiliser l'ordinateur.

Cas2 Dans la formation il y a trois promotions d'étudiants correspondant à des années (D1, D2, L3). Dans chaque promotion, il y a plusieurs étudiants; les étudiants sont regroupés en groupes de TD. Un étudiant est dans un et un seul groupe. Chaque groupe a un étudiant délégué. Le délégué d'un groupe est nécessairement membre du groupe. Des modules d'enseignement sont associés aux années. Les étudiants sont inscrits à des modules. Un étudiant ne peut s'inscrire qu'à des modules associés à sa promotion.

Cas3 [opt] Soit une application (un programme, un logiciel) de gestion d'une bibliothèque. Il y a plusieurs livres référencés dans la base documentaire de la bibliothèques. Dans la base documentaire, tout livre a un éditeur, un auteur, un titre, un nombre d'exemplaires et un nombre d'exemplaires disponibles.

Exercice 14 : analyse des besoins, abstraction, modélisation

Vous avez peut-être un lecteur mp3; les musiques que vous écoutez sont organisées et stockées à votre façon sur le lecteur (dans des dossiers, avec des genres, des interpretes, etc).

1. Proposez un modèle qui décrit votre système d'information musical.
2. Est-ce qu'il est possible de transformer ce modèle en un autre (pour réorganiser votre lecteur)? énoncer clairement une fonctionnalité qui réaliserait cette transformation (pour la faire construire par un informaticien)

Exercice 15 : analyse des besoins, abstraction, modélisation

1. Pour effectuer la maintenance ou le suivi de véhicules, on a besoin de la description complète de tous les composants des véhicules.
Analysez ce cahier de charges de projet, complétez le au besoin et faites ressortir les principales données ainsi que leur caractérisation. Faites des hypothèses de travail raisonnables.
2. Système d'information pour le suivi de patients à distance. La médicalisation à domicile se développe de plus en plus. Elle consiste à assister un patient convalescent (ou non) à distance; une équipe médicale a accès à tout moment ou à la demande aux patients qui sont suivis. Chaque patient a un dossier médical (unique); il est suivi par une équipe médicale constituée de médecins et d'infirmiers. Pour la sécurité des patients et la fiabilité des soins/suivis on veut élaborer un système d'information le plus complet possible et facilement extensible.
Analyser ce cahier de charges, compléter le et modéliser le système d'information adéquat; on se contentera de dégager les données et les regroupements pertinents.
3. Même travail pour la description de tous les articles dans un supermarché!