

encadrés par C. Attiogbé, N. Hadj-Rabia, J-F. Hue

Cahier d'exercices - Modélisation logique et ensembliste

Tous les exos doivent être faits (finissez à la maison ceux qui ne sont pas traités en TD)

Nombre de séances : . . . - Compte-rendu demandé : . . . selon consignes...

[opt] indique les questions optionnelles en TD

Modélisation logique

Exercice 0 (un peu de logique)

Q#1 Donnez les tables de vérité des opérateurs de la logique : \wedge , \neg , \Rightarrow . On utilisera la forme habituelle rappelée ci-après (où 0, 1 représentent Faux, Vrai) :

A	B	$A \wedge B$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

A	$\neg A$
0	
1	

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Dans la suite vous allez vous exercer à modéliser des énoncés simples, dans le but de vous préparer à analyser et modéliser des données, des systèmes d'information, des énoncés de cahiers de charges de logiciels.

Exercice 1 : logique des propositions

Soient les **propositions** suivantes, représentées par les constantes P_1, P_2, P_3, \dots

- P_1 le jour est bleu
- P_2 le jour est rouge
- P_3 le jour est férié
- P_4 le jour est orange
-

Q#2 Que signifient (en français) les énoncés suivants :

- $P_1 \wedge P_3$
- $P_3 \vee P_4$
- $\neg P_3$

Q#3 Ecrivez les énoncés suivants (en ajoutant au besoin des propositions que vous numérez) en logique (propositions, prédicats) :

- Un jour ne peut être à la fois bleu et orange.
- Le bus est gratuit durant les jours orange et fériés.
- Les bus ne circulent pas les jours fériés.
- [opt] Les bus circulent les jours orange fériés.

Exercice 2 : logique des prédicats

Q#4 Que signifient (en français) les énoncés suivants :

- $\forall x . P(x)$
- $\exists y . F(y)$
- $\forall x . P(x) \Rightarrow G(x)$
- $\forall n . \text{entier}(n) \wedge n > 4 \Rightarrow n > 0$

Exercice 3 : propositions et prédicats

Q#5 Ecrivez les propositions et prédicats correspondants aux énoncés suivants (vous pouvez réécrire l'énoncé avant, sans perdre son sens) :

- Tous les étudiants du groupe 5 sont bons en *natation*.
- Aucune fonctionnalité de mon lecteur mp3 ne marche.
- Tous les étudiants inscrits ont une note d'assiduité.
- Un programme informatique bien écrit ne doit pas se planter.

Exercice 4

Ecrivez les énoncés suivants en logique du premier ordre ; on définira si nécessaire, des constantes de proposition ou des prédicats auxiliaires.

1. Toute salle (de classe) a une porte.
2. Il y a des salles qui n'ont pas de porte.
3. Un nombre entier n est paire s'il est divisible par 2.
4. Un nombre n est premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même (autrement dit, ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même).
5. [opt] L'entier m est soit négatif soit strictement supérieur à 99.
6. [opt] Le carré du successeur de l'entier n est positif.
7. Toute instruction du langage L1 se termine par un point virgule (En programmation, on écrit des instructions dans des langages).
8. Le résultat de la composée horizontale des pièces a et b est différent du résultat de leur composée verticale. [Imaginez un jeu où on peut assembler des pièces de façon horizontale ou verticale, on parle ainsi de composée verticale / horizontale].
9. [opt] Pour les pièces de catégorie 2, les composées verticales et horizontales donnent le même résultat.
10. [opt] Les parents de cousins germains sont frères.

Exercice 5

Analysez et modélisez les énoncés suivants (sortis de leur contexte, mais qu'on peut bien imaginer) :

1. Les pièces de l'aile (de l'avion) qui ont été fabriquées entre 1998 et 2005 doivent être remplacées.
2. [opt] Les modules d'enseignement de plus de 24h doivent avoir un coeff. supérieur ou égal à 3.

Exercice 6 - Raisonnement en logique

Que pensez vous des raisonnements suivants :

- Les paresseux sont étudiants, Jean est étudiant, donc Jean est paresseux.
- Les éléphants venant d'Afrique ont de grandes oreilles, l'éléphant (Bouba) du Zoo de la Pointe a de grandes oreilles ; Bouba vient d'Afrique.
- Que dire du raisonnement précédent si on avait :
Les éléphants **vivant** en Afrique ont de grandes oreilles, l'éléphant (Bouba) du Zoo de la Pointe a de grandes oreilles ; Bouba **vient** d'Afrique.
- Mon copain m'a largué donc tous les garçons sont des salauds. (ou bien Ma copine m'a largué donc toutes les filles sont belles).
- De $Q_1 \Rightarrow Q_3$, on déduit $(Q_1 \vee Q_2) \Rightarrow Q_3$.
- Sachant $Q_1 \Rightarrow Q_3$, on en conclut $Q_1 \wedge Q_2 \Rightarrow Q_3$.
- Plus il y a d'emmental, plus il y a de trous ;
Plus il y a de trous, moins il y a d'emmental ;
Plus il y a d'emmental, moins il y a d'emmental.

Exercice - à faire chez soi

1. Modélisez en logique les énoncés suivants :
 - (a) L'indice de la première occurrence de U dans la chaîne de caractères CH est supérieure à ceux des occurrences de M et N ou alors M et N n'apparaissent pas dans la chaîne.
 - (b) Tout étudiant est dans un groupe (d'étudiants) ;
 - (c) Toute voiture a quatre roues ;
 - (d) Aucune porte ne doit être fermée
 - (e) Tout compte doit être approvisionné
 - (f) Toutes les cellules doivent être valuées
 - (g) Les tarifs J sont applicables pour les moins de 12 ans et les tarifs K pour les autres.
 - (h) La température de la pièce ne doit jamais dépasser 18 degrés.
 - (i) On affiche M1 lorsque la température est basse et il n'y a pas de brouillard, et on affiche M2 lorsque il pleut et il ne fait pas nuit.
2. Ecrivez un algorithme qui donne comme résultat un booléen (la valeur est Vrai ou Faux), selon que la condition donnée en **1a** soit vraie ou fausse.

En guise de synthèse et de leçons :

Attention au raisonnement (rapide) en Logique !
prenez donc le temps de réfléchir à vos modèles, à vos raisonnements, à vos programmes, ...

Ex Falso Quodlibet : du faux on peut déduire n'importe quoi !

Sachez détecter le *sophisme* : raisonnement logique qui aboutit à une affirmation fausse !

Modélisation ensembliste

Exercice 7 - ensembles, relations et fonctions

Soient deux ensembles abstraits D (comme Départ) et A (comme Arrivée). En guise d'illustration, imaginons que D est constitué des éléments (appelés antécédents) : $a_1, a_2, a_4, a_7, a_0, a_5$ et que A est constitué des éléments (appelés images) i_1, i_3, i_6, i_9, i_5 .

On écrit $D = \{a_1, a_2, a_4, a_7, a_0, a_5\}$ et $A = \{i_1, i_3, i_6, i_9, i_5\}$

Nous allons utiliser **les notions que vous avez déjà vues** dans le cours et TD de Maths pour l'Info (ERCB, Thierry Brugère).

Notons par \leftrightarrow le symbole de la relation entre ensembles, \rightarrow le symbole de la fonction totale et par \mapsto le symbole de la fonction partielle. Rappelez-vous aussi des diagrammes de EULER-VENN.

1. Donnez sous forme de diagramme puis en extension, un exemple de fonction injective entre D et A , appelons la f_i .
Quel est le type qui caractérise f_i ?
quel est la forme et le type des éléments de f_i ?
2. est-ce qu'il y a d'autres fonctions injectives entre D et A ? pour D et A quelconques, combien y-a-t-il de fonctions entre D et A ?
3. Donnez sous forme de diagramme puis en extension, un exemple de fonction surjective, appelons la f_s . Donnez le type de f_s .
4. Donnez sous forme de diagramme puis en extension, un exemple de fonction bijective, appelons la f_b . Donnez le type de f_b [Modifiez les ensembles A, D au besoin].
5. Donnez, en terme d'inclusion d'ensemble, des relations entre $\leftrightarrow, \mapsto, \rightarrow$.
6. Quelle est le lien (ou la propriété) qui lie : ensemble, relation, fonction ?

Exercice 7 bis - ensemble, relation

Modélisation d'un arbre généalogique. On considère une version simplifiée où les personnes sont identifiées par un nom et une date de naissance. Il ne peut y avoir d'inversion dans l'ascendance.

Exercice 8 - modélisation ensembliste

Soit un réseau constitué d'un ensemble d'ordinateurs connectés entre eux par des cables. On peut bien imaginer le dessin d'un tel réseau.

On veut manipuler ce réseau avec un logiciel, pour simuler sa construction et sa maintenance (ajout/suppression d'ordinateurs, connexion entre ordinateurs, etc).

On précise qu'un ordinateur peut être relié (ou connecté) à un ou plusieurs autres ordinateurs.

1. Ecrivez un modèle ensembliste représentant le réseau d'ordinateurs ;
2. En utilisant le modèle trouvé, modéliser l'opération d'ajout d'un ordinateur dans un réseau ;
3. [opt] le retrait d'un ordinateur dans un réseau ;
4. [opt] la connexion entre deux ordinateurs donnés qui ne sont pas encore reliés entre eux (appartenant au réseau).

Exercice 9 - modélisation des données pour programmer

Faites les abstractions nécessaires pour modéliser les données dans les descriptions informelles suivantes :

cas1 Tout ordinateur est composé d'un processeur (CPU), d'un écran et d'un clavier. Si l'ordinateur est en état de marche alors l'écran, le processeur et le clavier sont en état de marche. Si le clavier ou l'écran ou le processeur est en panne, on ne peut utiliser l'ordinateur.

Cas2 Dans la formation il y a trois promotions d'étudiants correspondant à des années (D1, D2, L3). Dans chaque promotion, il y a plusieurs étudiants ; les étudiants sont regroupés en groupes de TD. Un étudiant est dans un et un seul groupe. Chaque groupe a un étudiant délégué. Le délégué d'un groupe est nécessairement membre du groupe. Des modules d'enseignement sont associés aux années. Les étudiants sont inscrits à des modules. Un étudiant ne peut s'inscrire qu'à des modules associés à sa promotion.

Cas3 [opt] Soit une application (un programme, un logiciel) de gestion d'une bibliothèque. Il y a plusieurs livres référencés dans la base documentaire de la bibliothèques. Dans la base documentaire, tout livre a un éditeur, un auteur, un titre, un nombre d'exemplaires et un nombre d'exemplaires disponibles.

Exercice 10 : analyse des besoins, abstraction, modélisation

Vous avez peut-être un lecteur mp3 ; les musiques que vous écoutez sont organisées et stockées à votre façon sur le lecteur (dans des dossiers, avec des genres, des interpretes, etc).

1. Proposez un modèle qui décrit votre système d'information musical.
2. Est-ce qu'il est possible de transformer ce modèle en un autre (pour réorganiser votre lecteur) ? énoncer clairement une fonctionnalité qui réaliserait cette transformation (pour la faire construire par un informaticien)

Exercice 11 : analyse des besoins, abstraction, modélisation

1. Pour effectuer la maintenance ou le suivi de véhicules, on a besoin de la description complète de tous les composants des véhicules.
Analyser ce cahier de charges de projet, compléter le au besoin et faites ressortir les principales données ainsi que leur caractérisation. Faites des hypothèses de travail raisonnables.

2. Système d'information pour la télérelève. La télérelève de données consiste à récupérer à distance des informations provenant d'un environnement ciblé, à l'aide de capteurs, de systèmes électroniques ou électriques, etc. Imaginons qu'on ait un ensemble de capteurs positionnés à différents endroits, que chaque capteur enregistre à intervalle de temps régulier trois valeurs qu'il mesure.

On veut élaborer un modèle décrivant un système d'information qui va permettre d'exploiter toutes les données télérelevées.

Les capteurs sont identifiés et reliés à des centres de collecte. Il y a plusieurs centres de collecte. Un capteur n'est relié qu'à un seul centre. Le système d'information contient les données provenant de tous les centres et uniquement de ces centres identifiés. La position de chaque capteur est donnée en termes de latitude¹ et longitude².

Analyser ce cahier de charges de projet, compléter le au besoin, et faites ressortir les principales données ainsi que leur caractérisation.

3. Système d'information pour le suivi de patients à distance. La médicalisation à domicile se développe de plus en plus. Elle consiste à assister un patient convalescent (ou non) à distance ; une équipe médicale a accès à tout moment ou à la demande aux patients qui sont suivis. Chaque patient a un dossier médical (unique) ; il est suivi par une équipe médicale constituée de médecins et d'infirmiers. Pour la sécurité des patients et la fiabilité des soins/suivis on veut élaborer un système d'information le plus complet possible et facilement extensible.

Analyser ce cahier de charges de projet, compléter le et modéliser le système d'information adéquat ; ici on se contentera de dégager les données et les regroupements pertinents.

4. Même travail pour la description de tous les articles dans un supermarché !

1. La latitude est une mesure angulaire s'étendant de 0° à l'équateur à 90° aux pôles

2. La longitude est une mesure angulaire sur 360° par rapport à un méridien de référence ; donc de -180° à +180°, ou de 180° ouest à 180° est.